УДК 539.3

Дослідження поведінки внутрішніх силових факторів в трансверсально-ізотропних пластинах за дії локальних навантажень

І. П. Боков, Н. С. Бондаренко, О. О. Стрельнікова
Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, Україна

У статті розглядається задача про дію на трансверсально-ізотропну пластину локального силового навантаження. Навантаження розподілене рівномірно та діє у нормальному до серединної площини пластини напрямку. Розміри локальної області набагато менше характерного розміру пластини. Для розв’язання поставленої задачі використаний метод фундаментальних розв’язків і формула згортки. Розглянуто вирази для внутрішніх силових факторів, отриманих на базі узагальненої теорії {1,2}-апроксимації. Проаналізовано вплив пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу на внутрішні силові фактори.

Ключові слова: *теорія {m,n}-апроксимації, трансверсально-ізотропні пластини, локальні навантаження, внутрішні силові фактори.*

В статье рассматривается задача о действии на трансверсально-изотропную пластину локальной силовой нагрузки. Нагрузка распределена равномерно и действует в нормальном к срединной плоскости пластины направлении. Размеры локальной области намного меньше характерного размера пластины. Для решения поставленной задачи использован метод фундаментальных решений и формула свертки. Рассмотрены выражения для внутренних силовых факторов, полученные на базе уточненной теории {1,2}-аппроксимации. Проанализировано влияние упругих постоянных трансверсально-изотропного материала на внутренние силовые факторы.

Ключевые слова: *теория {m,n}-аппроксимации, трансверсально-изотропные пластины, локальные нагрузки, внутренние силовые факторы.*

The paper deals with the problem of a transversely isotropic plate under action of a local power load. The load is distributed evenly and acts in the direction normal to the median plane of the plate. The dimensions of the local area are essentially smaller than the characteristic size of the plate. To solve this problem, we use the method of fundamental solutions and the convolution formula. Expressions for internal force factors obtained on the basis of the refined theory of {1,2}-approximation are considered. The influence of the elastic constants of a transversally isotropic material on internal force factors is analyzed.

Key words: *theory of {m,n}-approximation, transversely-isotropic plates, local loads, internal force factors.*

1. Вступ

У багатьох прикладних задачах потрібно визначити пружно-деформований стан тіла за дії локальних навантажень. Оскільки розв’язання задач теорії пружності у тривимірному формулюванні пов'язане зі значними математичними труднощами, то для розрахунку тонкостінних елементів конструкцій використовують різні методи зведення тривимірних задач до двовимірних. Використання однієї з найпопулярніших двовимірних теорій – класичної, що заснована на гіпотезах Кірхгофа-Лява або гіпотезах прямих нормалей, у ряді випадків може виявитися недостатнім. Ця теорія використовує залежність від товщини розглядуваної пластини (оболонки) і не враховує деформації поперечного обтиснення та зсуву. У даній роботі використовується узагальнена теорія $\{m,n\}$-апроксимації. Ця теорія заснована на методі І. Н. Векуа розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра [1], що дозволяє врахувати зсувну податливість, характерну для більшості композитних матеріалів.

Силові впливи належать до одного з основних видів навантажень, яким підлягають об'єкти й вироби сучасної промисловості. Ці впливи можуть носити зосереджений або локальний характер. Тому дослідження пружно-деформованого стану трансверсально-ізотропних пластин за дії локальних силових навантажень є актуальним і важливим науково-технічним завданням.

Дослідження задач динаміки пластин і оболонок, які перебувають за дії локальних навантажень, представлені в роботах [2, 3]. У публікації [2] розглянуто задачу про дію на тонку ортотропну пластину локального динамічного навантаження, розподіленого в довільній області. У статті [3] досліджено пружно-деформований стан оболонок додатної кривизни при локальних силових впливах. Виконано чисельні дослідження поведінки прогину оболонки при впливі на неї локального навантаження.

Результати досліджень із розрахунку замкнутої циліндричної оболонки за дії локальних і зосереджених навантажень подані у монографії [4]. Розв'язки дозволяють визначити переміщення, зусилля та моменти як у звичайній оболонці, так і в оболонці з пружним заповнювачем (модель Вінклера, модель Власова) за різних варіантів граничних умов.

У публікації [5] досліджується тривимірний пружно-деформований стан кругової циліндричної оболонки, що знаходиться за дії різного типу локальних навантажень. Для отримання двовимірних рівнянь і граничних умов застосовувався принцип можливих переміщень. Аналізується вплив різних типів граничних умов і локальних навантажень, довжин і товщини оболонки на компоненти пружно-деформованого стану.

У публікаціях [6, 7] розглянуті задачі на локальні теплові впливи, в яких джерела тепла розподілені рівномірно в локальній області.

2. Постановка задачі

Розглянемо трансверсально-ізотропну пластину товщини $2h$. Віднесемо пластину до ортогональної системи безрозмірних координат x_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$, визначених із точністю до напівтовщини пластини h. Пластина підлягає локальному силовому впливу в області, розмір якої набагато менше характерного розміру пластини. Зовнішні границі пластини знаходяться на значній відстані від місця прикладення силового навантаження. Це навантаження розподілене рівномірно й діє в нормальному до серединної площини пластини напрямку.

Одним із ефективних методів визначення локального пружно-деформованого стану тонкостінних конструкцій є метод фундаментальних розв'язків [8]. Він заснований на використанні формули згортки, яка стосовно задач локального навантаження записується таким чином

$$\mathrm{P}(\vec{r}) = \iint_{\Omega} \mathrm{E}(\vec{r}-\vec{t})W(\vec{t})d\Omega, \qquad (2.1)$$

де P – внутрішні силові фактори; E – силові компоненти фундаментального розв'язку для трансверсально-ізотропної пластини; Ω – область локального навантаження; $\vec{r}$ та $\vec{t}$ – вектори поточної точки й точки інтегрування відповідно.

3. Внутрішні силові фактори для трансверсально-ізотропної пластини

Фундаментальний розв'язок рівнянь статики для трансверсально-ізотропних пластин на базі уточненої теорії $\{1,2\}$-апроксимації побудовано в роботі [9]. Вважаємо, що сила діє на пластину тільки в перпендикулярному до серединної площини напрямку, тому у виразах для внутрішніх силових факторів, наведених у [9], слід покласти $q_1^* = m_1^* = q_2^* = m_2^* = 0$. У рамках $\{1,2\}$-апроксимації закон розподілу компоненти об'ємної сили F_z за товщиною пластини має вигляд [1]

$$F_z = \frac{q_4}{2}P_0 + \frac{3q_3}{2}P_1 + \frac{5q_5}{2}P_2,$$

де $q_i = q_i^*\delta(x_1, x_2)$ $\left(i=\overline{3,5}\right)$; $\delta(x_1, x_2)$ – двовимірна дельта-функція Дірака; P_i $\left(i=\overline{0,2}\right)$ – поліноми Лежандра; компонента вектору об'ємної сили F_z визначена з точністю до величини Eh. Наведемо вирази для внутрішніх силових факторів, що не дорівнюють нулю, у полярній системі координат (r,φ) для таких трьох випадків:

Випадок I. $q_3^* = 1$, $q_4^* = q_5^* = 0$, тоді

$$N_{r,\varphi} = -\frac{\lambda_0 B_0 \Omega_0'}{4\pi A \Lambda_0'}(\nu-1)\left[G_{0,0}(a_0 r) \mp G_{1,1}(a_0 r)\right],$$

$$Q_{r1} = -\frac{G_{0,1}(a_0 r)}{\pi r}, \qquad R_0 = \frac{B_0 \Omega_0'}{2\pi A \Lambda_0'} G_{0,0}(a_0 r); \qquad (3.1)$$

Випадок II. $q_4^* = 1$, $q_3^* = q_5^* = 0$, тоді

$$M_{r,\varphi} = \frac{1}{108\pi A_1 \Lambda_0}\left[-27A_1\Lambda_0(\nu+1)\ln\frac{\gamma r}{2} \pm 147 r^2 D_0 \Omega_0 (\nu-1) G_{2,0}(a_1 r) + \right.$$

$$+27D_0\Lambda_0\left\{(\nu+1)G_{0,0}(a_1 r) \mp (\nu-1)G_{1,1}(a_1 r)\right\} - 14\lambda_0 D_0 \Omega_0\left\{(\nu-1)G_{0,0}(a_1 r) \mp \right.$$

$$\left.\left. \mp (\nu-1)G_{1,1}(a_1 r)\right\} - 27A_1\Lambda_0(\nu+1)G_{0,0}(a_1 r) + 18\lambda_0^2\Lambda_0\Omega_0 G_{0,0}(a_1 r)\right],$$

$$Q_{r0} = \frac{49r^2 D_0 \Omega_0 G_{1,0}(a_1 r) - 9A_1 \Lambda_0 G_{0,1}(a_1 r)}{9\pi A_1 \Lambda_0 r},$$

$$Q_{r2} = -\frac{(9\lambda_0 \Lambda_0 + 14D_0) r \Omega_0}{36\pi A_1 \Lambda_0} G_{1,0}(a_1 r),$$

$$R_1 = \frac{(9\lambda_0 \Lambda_0 + 14D_0)\Omega_0}{54\pi A_1 \Lambda_0} G_{0,0}(a_1 r); \tag{3.2}$$

Випадок III. $q_5^* = 1$, $q_3^* = q_4^* = 0$, тоді

$$M_{r,\varphi} = -\frac{49\lambda_0 D_0 \Omega_0}{27\pi A_1 \Lambda_0} (\nu - 1)\left[G_{0,0}(a_1 r) \mp G_{1,1}(a_1 r)\right],$$

$$Q_{r2} = -\frac{G_{0,1}(a_1 r)}{\pi r}, \qquad R_1 = \frac{98 D_0 \Omega_0}{27\pi A_1 \Lambda_0} G_{0,0}(a_1 r). \tag{3.3}$$

У формулах (3.1) – (3.3) використані позначення:

$$\lambda_0 = \frac{\nu'}{1-\nu} E^*, \quad E^* = \frac{E}{E'}, \quad B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2},$$

$$\Omega_0' = \frac{25}{21}\Omega_0 = \frac{5}{3} \frac{(1-\nu)/E^*}{1-\nu-2(\nu')^2 E^*},$$

$$A = B_0 + \lambda_0^2 \Omega_0', \quad A_1 = D_0 + \frac{1}{3}\lambda_0^2 \Omega_0, \quad \Lambda_0' = \frac{3}{4}\Lambda_0 = \frac{7}{5}\frac{1}{E/G'},$$

$$a_0^2 = \frac{B_0 \Omega_0'}{A \Lambda_0'}, \quad a_1^2 = \frac{196 D_0 \Omega_0}{9 A_1 \Lambda_0}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

де E, E' – модулі Юнга для розтягання-стиснення за напрямками в площині ізотропії та перпендикулярно до цієї площини; ν, ν', G, G' – відповідні цим напрямкам та площинам коефіцієнти Пуассона та модулі зсуву; $C = \ln\gamma = 0{,}5772..$ – константа Ейлера; $G_{n,m}(z)$ – спеціальна G-функція [10].

4. Аналіз отриманих результатів

Застосуємо формулу згортки (2.1) до таких областей:

1) область Ω_1 – коло радіуса r_0 із центром на початку координат:

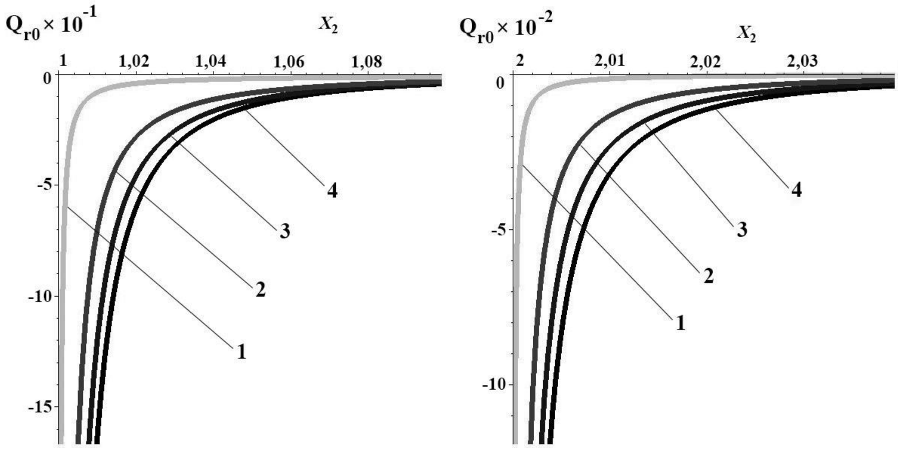
$$\mathrm{P}(x_1, x_2) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} \rho \mathrm{E}(x_1 - \rho\cos\theta, x_2 - \rho\sin\theta) W(\rho, \theta) d\rho;$$

2) область Ω_2 – еліпс із напівосями a та b із центром на початку координат:

$$\mathrm{P}(x_1, x_2) = ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1} \rho \mathrm{E}(x_1 - \rho\cos\theta, x_2 - \rho\sin\theta) W(\rho, \theta) d\rho.$$

Як приклад розглянемо дію сили, що рівномірно розподілена $(W \equiv 1)$ в областях Ω_1 $(r_0 = 1)$ та Ω_2 $(a = 1, b = 2)$. Для даних областей розраховані значення внутрішніх силових факторів уздовж осі ординат.

Чисельні дослідження проведені для трансверсально-ізотропної пластини при таких значеннях параметрів: $E^* = 5$; $\nu = 0{,}3$; $\nu' = 0{,}07$. Також розглянута пластина з ізотропного матеріалу, для якого $E^* = 1$; $E / G' = 2{,}6$; $\nu = \nu' = 0{,}3$. На рис. 1–5 надані графіки зміни внутрішніх силових факторів R_1, Q_{ri} $(i = 0, 2)$ у залежності від параметра зсувної піддатливості E / G'. При цьому рис. 1–3 відповідають випадку II ($q_4^* = 1$, $q_3^* = q_5^* = 0$), а рис. 4, 5 – випадку III ($q_5^* = 1$, $q_3^* = q_4^* = 0$). На всіх рисунках криві під номером 1 відповідають ізотропному матеріалу, а криві під номерами 2, 3 і 4 демонструють поведінку внутрішніх силових факторів трансверсально-ізотропної пластини для таких значень параметра зсувної піддатливості E / G': 40; 80; 120.



а) б)

Рис.1. Внутрішній силовий фактор Q_{r0}: а) область Ω_1, б) область Ω_2

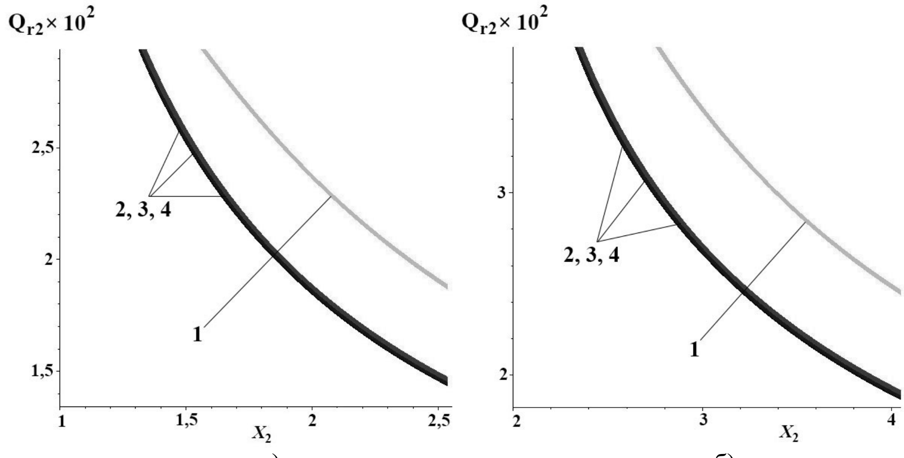


Рис.2. Внутрішній силовий фактор Q_{r2} *: а) область* Ω_1*, б) область* Ω_2

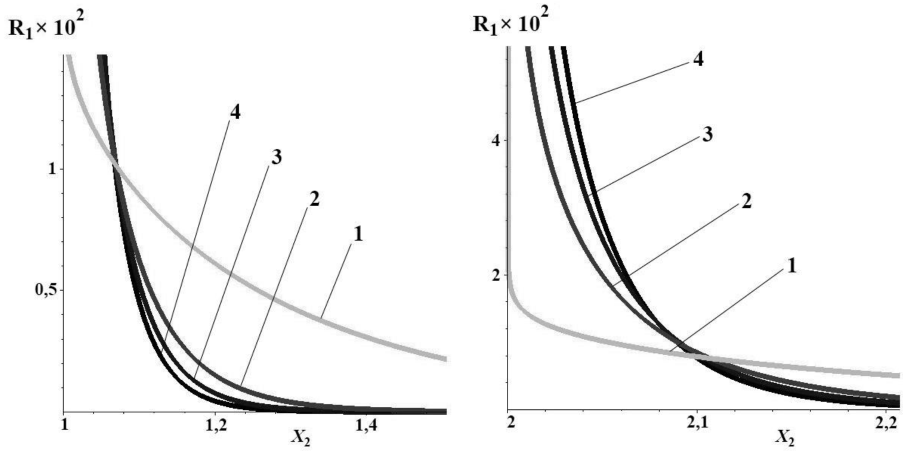
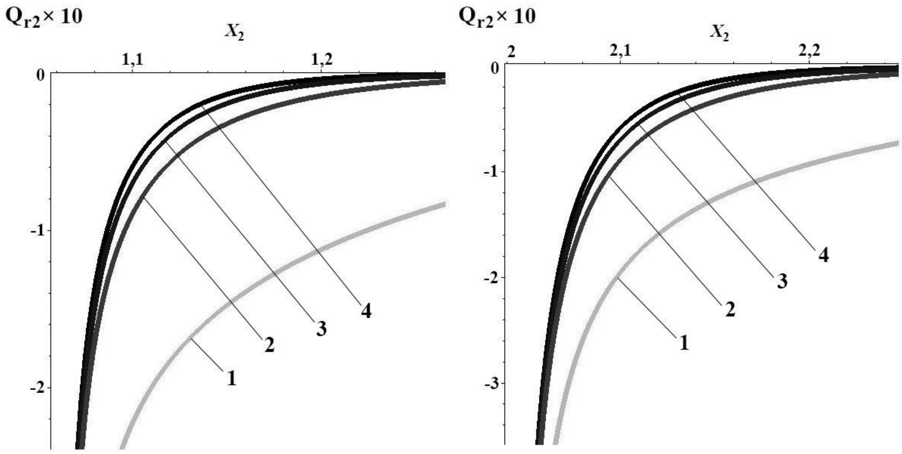


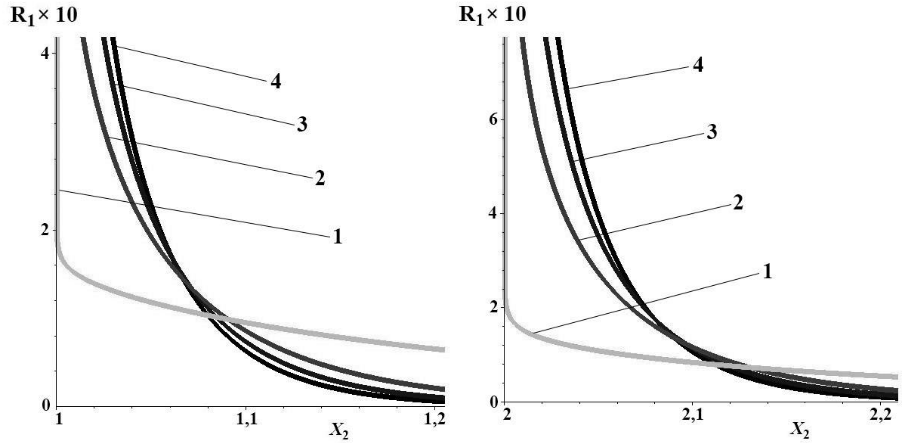
Рис.3. Внутрішній силовий фактор R_1*: а) область* Ω_1*, б) область* Ω_2

Дані, представлені на рис. 1–3, свідчать про те, що узагальнені зусилля Q_0 та R_1 у випадку II при збільшенні значення параметра зсувної піддатливості E/G' зростають за абсолютною величиною, а Q_{r2} – спадає. Причому зазначена закономірність для R_1 справедлива лише в безпосередньому околі локального силового впливу.



а) б)

Рис.4. Внутрішній силовий фактор Q_{r2} : а) область Ω_1, б) область Ω_2



а) б)

Рис.5. Внутрішній силовий фактор R_1 : а) область Ω_1, б) область Ω_2

У випадку III, як випливає з рис. 4, 5 при збільшенні значення E/G' внутрішній силовий фактор R_1 збільшується біля області локального силового навантаження, а Q_{r2} – зменшується за модулем.

5. Висновки

Розглянуто задачу про дію на трансверсально-ізотропну пластину локального силового навантаження. Для розв’язання даної задачі використано метод фундаментальних розв’язків і формулу згортки. Проаналізовано вплив пружних сталих трансверсально-ізотропного матеріалу й геометрії області локального навантаження на внутрішні силові фактори. Проведені чисельні дослідження довили, що при розрахунку локального пружно-деформованого стану тонкостінних пластин важливим є врахування пружних властивостей трансверсально-ізотропних матеріалів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
2. Шевченко В. П. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок / В. П. Шевченко, О. С. Ветров // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – ISSN 1683-4720. – С. 207–215.
3. Шевченко В. П. Исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при локальных нагрузках по уточненным теориям / В. П. Шевченко, А. Ю. Удовиченко // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. – 2014. – №. 1. – С. 94–98.
4. Шагивалеев К. Ф. Расчет замкнутой цилиндрической оболочки на локальные и сосредоточенные нагрузки / К. Ф. Шагивалеев. – Саратов : СГТУ. – 2011. – 316 с.
5. Фирсанов В. В. Замкнутая цилиндрическая оболочка под действием локальной нагрузки / В. В. Фирсанов, Н. Д. Чан // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 91–106.
6. Гольцев А. С. Задачи термоупругости для ортотропных цилиндрических оболочек при локальном температурном воздействии / А. С. Гольцев // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 139–144.
7. Гольцев А. С. Исследование влияния условий теплообмена для локально нагретых ортотропных сферических оболочек / А. С. Гольцев // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 76–82.
8. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Концентрация напряжений (Механика композитов: В 12 т. Т. 7) / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – К.: А. С. К., 1998. – С. 159–196.
9. Bokov I. Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates / I. Bokov, N. Bondarenko, E. Strelnikova // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – 2/7 (86). – P. 4–12.
10. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек : учебн. пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк : ДонГУ, 1980. – 128 с.

Надійшла – 04.10.2017.