Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.955 № 990, 2011, с.42–47

Задача Коши для экспоненциально-корректных псевдодифференциальных операторов

А.А. Макаров, Д.А. Левкин

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
mak-family@yandex.ru

В работе доказана корректность задачи Коши для псевдодифференциальных операторов, являющихся возмущениями экспоненциально-корректных дифференциальных операторов постоянной силы в пространствах Л. Шварца и в пространствах бесконечно дифференцируемых функций в бесконечном слое.

Макаров О.А., Левкін Д.А., **Задача Коші для експоненціально-коректних псевдодиференціальних операторів.** У роботі доведена коректність задачі Коші для псевдодиференціальних операторів, які є збуреннями експоненціально-коректних диференціальних операторів постійної сили в просторах Л. Шварца і в просторах нескінченно диференційовних функцій в нескінченному шарі.

A.A. Makarov, D.A. Levkin **The Cauchy problem for exponentially-correct pseudodifferential operators.** We prove the correctness of the Cauchy problem for pseudodifferential operators that are perturbations of the exponentially-correct differential operators of constant strength in the spaces of Schwartz and spaces of infinitely differentiable functions in an infinite layer.

2000 Mathematics Subject Classification 35S10.

Волевичем Л.Г. и Гиндикиным С.Г. в работе [1] были изучены экспоненциально-корректные дифференциальные операторы постоянной силы и доказана корректность задачи Коши в пространстве $S[a, b)$.

В данной работе рассматриваются псевдодифференциальные операторы, являющиеся возмущениями экспоненциально-корректных дифференциальных операторов постоянной силы и доказывается корректность задачи Коши в тех же пространствах.

Напомним определение экспоненциально-корректного полинома $P(\tau,\,\eta)$ (см. [1, с.169]). Полином $P(\tau,\,\eta)$ называется экспоненциально-корректным, если

$$\forall \nu > 0 \;\; \exists \rho(\nu): \;\; P(\tau,\,\eta + iw) \neq 0, \;\; Im\,\tau < \rho(\nu), \;\; |w_j| < \nu \quad (j = \overline{1, n-1}\,).$$

Это эквивалентно (см. [1, с.178]) условию: $\forall \alpha \quad P^{(\alpha)}(\tau,\,\eta)/P(\tau,\,\eta) \to 0$ при $Im\,\tau \to -\infty$ равномерно по $Re\,\tau$ и $\eta \in \mathbb{R}^{(n-1)}$.

Примерами экспоненциально-корректных полиномов являются параболические и гиперболические полиномы (см. [1, гл.3;5] [2, гл.3]), а также гипоэллиптические, являющиеся корректными по Петровскому (см. [4, с.75]).

Символ $P(x,\tau,\eta) = \sum\limits_j a_j(x)\,\tau^{j_0}\,\eta_1^{j_1}\,\ldots\,\eta_{n-1}^{j_{n-1}}$ удовлетворяет условию постоянства силы, если

$$\exists\, A > 0,\, \gamma_0: \quad |P(x',\,\tau,\,\eta)/P(x'',\,\tau,\,\eta)| < A \qquad \forall\, x',\, x'' \in \mathbb{R}^n, \;\; Im\,\tau < \gamma_0.$$

Так полином $P(x,\,\tau,\,\eta) = i\tau + a^2\eta^2 + b(x)$ является экспоненциально-корректным, удовлетворяющим условию постоянства силы при ограниченной функции $b(x)$.

Введем класс символов псевдодифференциальных операторов S_p^m, состоящий из бесконечно дифференцируемых функций $a(x,\,\xi)$ таких, что

$$\forall\, \alpha, \beta \quad |\partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta\, a(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta}(1+|x|)^p\,(1+|\xi|)^m$$
$$\forall\, x = (t,\varphi) \in \mathbb{R}^m; \;\; \forall\, \xi = (\tau,\,\eta) \in \mathbb{R}^m.$$

Этот класс символов является важным частным случаем символов, введенных в [1, с.255], и обобщает класс символов, рассмотренных Хермандером в [5, с.94].

Псевдодифференциальный оператор с символами $a(x,\,\xi) \in S_p^m$ определяется так:

$$a(x,\,D)\,\varphi(x) = F_\xi^{-1}\,(a(x,\,\xi)\,\widetilde{\varphi}(\xi)) \quad \forall\, \varphi(x) \in S\,,$$

где $\widetilde{\varphi}(\xi)$ – преобразование Фурье от $\varphi(x)$ из пространства Л. Шварца.

Определение. *Псевдодифференциальный оператор (ПДО) с символами* $P_1(x,\,\xi) \in S_{p_1}^{m_1}$ *называется* подчиненным *экспоненциально-корректному дифференциальному оператору постоянной силы* $P_0(x,\,D)$, *если выполнены условия:*

$$\forall\, \alpha, \beta \quad \partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta\, P_1(x,\,\xi)/P_0(x,\,\xi) \to 0 \quad \textit{при} \quad Im\,\tau \to -\infty$$

равномерно по переменным $x = (t,\,y)$, $Re\,\tau$ *и* $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Так оператор $P_1(t,y,D)\,u(t,y) = \sin y \cdot \dfrac{\partial^k\, u(y+h,t)}{\partial y^k}$ $(h \in \mathbb{R})$ при $k = 1$ является подчиненным дифференциальному оператору $P_0(t,y,D)\,u(t,y) = = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, а при $k = 2$ – не является подчиненным.

Это следует из того, что

$$\frac{P_1(t,y,\xi)}{P_0(t,y,\xi)} = \frac{\sin y \cdot i\eta e^{ih\eta}}{i\tau + \eta^2} \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad Im\,\tau \to -\infty$$

равномерно относительно $\eta, y \in \mathbb{R}$.

Аналогично

$$\frac{\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta P_1(t,y,\xi)}{P_0(t,y,\xi)} \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad Im\,\tau \to -\infty.$$

Покажем, что задача Коши для возмущенного псевдодифференциального уравнения вида

$$P_0(x,D)\,u(x) + P_1(x,D)\,u(x) = f(x) \tag{1}$$

будет корректной в пространстве $S[a;b)$, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций в слое $[a;b] \times \mathbb{R}^{n-1}$ с нулевым условием $u(a,y) = 0$.

Но сначала напомним определение некоторых пространств (см. [1, гл.1;2]). Пространство Л. Шварца: $S = \bigcap\limits_{s,\,l\,=\,0}^{\infty} H_l^s$, где H_l^s – пространство Соболева-Слободецкого.

Пусть $s,\, l \geq 0$. Обозначим через $H_{(l)[\gamma]}^{(s)}$ пространство $e^{\gamma\,t} H_{(l)}^{(s)}$ с индуцированной нормой, а через $H_{(l)[\gamma]}^{(s)}[a;\infty)$ – пространство $e^{\gamma\,t} H_{(l)}^{(s)}[a;\infty)$, где $H_{(l)}^{(s)}[a;\infty)$ – пространство функций из $H_{(l)}^{(s)}$, носители которых содержатся в полупространстве $[a;\,+\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Обозначим также через $H_{(l)}^{(s)}[a;b)$ фактор-пространство $H_{(l)[\gamma]}^{(s)}[a;\infty)/H_{(l)[\gamma]}^{(s)}[b;\infty)$. Согласно [1, с.104]) это пространство не зависит от γ.

Введем также пространство $S[a;b) = \bigcap\limits_{s,\,l\,=\,0}^{\infty} H_{(l)}^{(s)}[a;b) = S_{[\gamma]}[a;\,\infty)/S_{[\gamma]}[b;\,\infty)$. Здесь $S_\gamma[a;\,\infty) = \bigcap\limits_{s,\,l\,=\,0}^{\infty} H_{(l)[\gamma]}^{(s)}[a;\infty)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю при $t \leq\, a$.

В работе Л.Г.Волевича [1, с.264] было доказано следующее:

Утверждение. Если $a(x,\xi) \in S_0^{m_1}$, $\;b(x,\xi) \in S_0^{m_2}$, то

$$\|a(x,D)\,b(x,D) - (ab)(x,D)\varphi(x)\|_{(l)}^{(s)} \leq C_{s,\,l}\|\varphi\|_l^{(s+m_1+m_2)},$$

где $C_{s,\,l} \leq K \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=1} \left\{a^{(\alpha)}\right\}_{(q_1)}^{(p_1)} \left\{b_{(\beta)}\right\}_{(q_2)}^{(p_2)}$.

Здесь

$$\{a\}_q^p = \sup_{|\alpha|\leq p\,,\;|\beta|\leq q} (1+|\xi|)^{-m_1/2}\left|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\right|,$$
$$\{b\}_q^p = \sup_{|\alpha|\leq p\,,\;|\beta|\leq q} (1+|\xi|)^{-m_2/2}\left|b_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\right|,$$

числа $p_1,\ q_1$ зависят от m_1, а числа $p_2,\ q_2$ – от m_2.
С помощью этого утверждения докажем следующую лемму.
Лемма. *Пусть символ* $P_1(x,\tau,\eta)\in S_0^r$ *является голоморфным по* τ *при* $Im\,\tau\le\gamma_0$ *и удовлетворяет условиям*

$$\forall\,\alpha,\beta\qquad\left|\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\,P_1(x,\tau,\eta)\right|\le\varepsilon_{(\beta)}^{(\alpha)}(Im\,\tau)\,(1+|\tau|+|\eta|)^{\,r},$$

где $\varepsilon_{(\beta)}^{(\alpha)}(Im\,\tau)\to 0$ *при* $Im\,\tau\to-\infty$ *, а также подчинен экспоненциально-корректному полиному* $P_0(x,\xi)$.

Тогда $\left\|P_1(x,D)\widehat{P}_0(x_0,D)\right\|\to 0$ *при* $Im\,\gamma\to-\infty$.

Здесь норма понимается как операторная норма в пространстве $H_{(l)[\gamma]}^{(s)}$, а под оператором $\widehat{P}_0(x_0,D)$ понимается ПДО с символом $P_0^{-1}(x_0,\xi)$.

Доказательство. Согласно предыдущему утверждению

$$\left\|P_1(x,D)\,\widehat{P}_0(x_0,D)-\left(\frac{P_1(x,\xi)}{P_0(x_0,\xi)}\,\cdot\,(x,D)\right)\right\|_{(l)}^{(s)}\le C_{s,l}.$$

Так как $P_1(x,\xi)\in S_0^r$, а $\widehat{P}_0(x_0,\xi)=P_0^{-1}(x_0,\xi)\in S_0^{-m}$, где $r<m$, то $P_1(x,\xi)/P_0(x_0,\xi)\in S_0^0$. И тогда по теореме Кальдерона-Вайянкура ПДО с символом $P_1(x,\xi)/P_0(x_0,\xi)$ является непрерывным в пространстве $H_{(l)}^{(s)}$ (см. [1], [3, с.363]).

Так как $\dfrac{\partial}{\partial\xi_k}\left(\dfrac{P_1(x,\xi)}{P_0(x_0,\xi)}\right)=\dfrac{\partial P_1}{\partial\xi_k}/P_0(x,\xi)-P_1(x,\xi)\cdot\dfrac{\partial P_0}{\partial\xi_k}/P_0^2(x_0,\xi)$ стремится к нулю при $Im\,\tau\to-\infty$ согласно условиям леммы, то норма этого ПДО тоже стремится к нулю.

В силу равенства $e^{\gamma\,t}P(x,D_t,D_y)\left(e^{-\gamma\,t}\varphi(t,y)\right)=P(x,D_t-\gamma,\,D_y)\varphi$ норма $\left\|P_1(x,D)\widehat{P}_0(x_0,D)\right\|_{(l)[\gamma]}^{(s)}$ в пространстве $H_{(l)[\gamma]}^{(s)}$ совпадает с нормой ПДО с символом $P_1(x,\,\tau+i\gamma,\,\eta)\widehat{P}_0(x_0,\,\tau+i\gamma,\,\eta)$, а значит, в силу предыдущего, мала при $Im\,\tau<\gamma$.

Поскольку константа $C_{s,l}$ зависит от оценок символов $P_1(x,\xi)$ и $\widehat{P}_0(x_0,\xi)$, а оператор $P_0(x_0,\,D)$ является экспоненциально-корректным и, значит, удовлетворяет условию

$$\partial_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\,P_0(x_0,\xi)/P_0(x_0,\xi)\to 0\quad\text{при}\quad Im\,\tau\to-\infty.$$

Поэтому $C_{s,l}\to 0$ при $Im\,\tau\to-\infty$ и, значит, $\|P_1(x,D)\widehat{P}_0(x_0,D)\|$ в пространстве $H_{(l)[\gamma]}^{(s)}$ может быть сколь угодно малой при $\gamma<\gamma_0$.

Лемма доказана.

Теорема. *Псевдодифференциальный оператор* $P_0(x,D)+P_1(x,D)$ *с экспоненциально-корректным дифференциальным оператором постоянной силы* $P_0(x,D)$ *и подчиненным ПДО* $P_1(x,D)$*, удовлетворяющим условиям леммы,* *является* изоморфизмом *в пространствах* $S_{[\gamma]}$ *и* $S_{[\gamma]}[a;+\infty)$ при всех $\gamma < \gamma_0$, где $\gamma_0 < 0$.

Доказательство. Для доказательства используем метод параметрикса, т.е. находим решение уравнения (1) в виде $u(x) = \widehat{P}_0(x_0, D)g(x)$. Тогда функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Big(P_0(x,D)\,\widehat{P}_0(x_0,D) + P_1(x,D)\widehat{P}_0(x_0,D)\Big)\,g(x) = f(x). \tag{2}$$

В работе [1, с.244] доказано, что $\|P_0(x,D)\,\widehat{P}_0(x_0,D) - I\,\| < \varepsilon(Im\,\tau) \to 0$, т.е. может быть сделана меньше $1/2$ при $Im\,\tau < \gamma_0$ (здесь I – тождественный оператор).

Но, в силу леммы, норма оператора $P_1(x,D)\,\widehat{P}_0(x_0,D)$ тоже может быть сделана сколь угодно малой при $Im\,\tau \to \infty$. Итак, уравнение (2) можно представить в виде

$$g(x) + r(x,D)g(x) = f(x),$$

где норма оператора $r(x,D)$ меньше 1 в пространстве $H^{(s)}_{(l)[\gamma]}$. Поэтому функцию $g(x)$ можно найти в виде ряда Неймана

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-r(x,D))^j f(x) \in H^{(s)}_{(l)[\gamma]}.$$

Значит, $u(x) \in H^{(s-p)}_{(l)[\gamma]}$, т.е. ПДО $P_0(x,D) + P_1(x,D)$ является изоморфизмом в пространстве $S_{[\gamma]}$, а также в пространстве $S_{[\gamma]}[a;+\infty)$ при $\gamma < \gamma_0$.

Теорема доказана.

Следствие. *Псевдодифференциальный оператор* $P_0(x,D)+P_1(x,D)$, *удовлетворяющий условиям доказанной теоремы, является изоморфизмом в пространстве* $S[a;b)$ $\forall\, a < b$, *т.е. задача Коши с нулевым начальным условием для такого оператора является корректной.*
Доказательство следует из определения пространства $S[a;b)$.

В качестве примера можно привести задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \sin x \cdot \frac{\partial u(x+h,t)}{\partial x} = f(x,t) \qquad x \in R, \quad t \in [a;b),$$
$$u(x,a) = 0.$$

Как было показано в приведенном ранее примере псевдодифференциальный оператор $P_1(x,t,D)u = \sin x \cdot \dfrac{\partial u(x+h,t)}{\partial x}$ является подчиненным экспоненциально-корректному дифференциальному оператору теплопроводности

$$P_0(D)u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и, значит, применимо следствие из теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. Обобщенные функции и уравнения в свертках. М : Физматлит. ВО "Наука". — 1994. — 334с.

2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М. : Государственное издательство физико-математической литературы. — 1958. — 276с.

3. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. — М. : Мир. — 1985. — 472с.

4. Л. Хермандер. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — Т.2 — М. : Мир. — 1986. — 456с.

5. Л. Хермандер. Псевдодифференциальные операторы. — Т.3 — М. : Мир. — 1987. — 696с.

Статья получена: 19.09.2011; окончательный вариант: 22.12.2011; принята: 26.12.2011.