ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2009. *Ser. Mech. Math. 2009.*
Вип. 71. С. 5–12 *Is. 71. P. 5–12*

УДК 512.552.12

ЕЛЕМЕНТИ СТАБІЛЬНОГО ТА МАЙЖЕ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

Софія БІЛЯВСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: e-mail: zosia_ meliss@yahoo.co.uk

Запропоновано нове узагальнення кілець стабільного рангу 1, а саме введено поняття елемента стабільного рангу 1 та елемента майже стабільного рангу 1. Показано мультиплікативну замкненість множин елементів стабільного рангу 1, що дало змогу ввести ідеали максимально нестабільного рангу 1. Також введено поняття елемента майже стабільного рангу 1 і кільця майже стабільного рангу 1. Показано, що над кільцем майже стабільного рангу 1 довільний унімодулярний рядок є доповняльним. Також доведено, що довільне адекватне кільце є кільцем квазістабільного рангу 1. А довільний ненульовий елемент – елемент майже стабільного рангу 1. Крім того, показано односторонню елементарну редукцію квадратних матриць над комутативним кільцем Безу, в якому довільний елемент має майже стабільний ранг 1.

Ключові слова: ідеал стабільного рангу 1, ідеал максимально нестабільного рангу 1, елемент майже стабільного рангу 1, ідеал майже стабільного рангу 1, адекватне кільце, кільце квазістабільного рангу 1.

Кільце Безу стабільного рангу 1 є кільцем елементарних дільників [1]. Цей факт спонукав багатьох авторів до вивчення кілець Безу, які є узагальненням кільця стабільного рангу 1 [2]. Ми пропонуємо нове узагальнення кільця стабільного рангу 1, а саме: вводиться поняття елемента стабільного рангу 1, а також елемента майже стабільного рангу 1. Показано мультиплікативну замкненість множин елементів стабільного рангу 1, що дає змогу ввести ідеали максимально нестабільного рангу 1. Далі вводимо поняття елемента майже стабільного рангу 1 і кільця майже стабільного рангу 1. Показано, що над кільцем майже стабільного рангу 1, довільний унімодулярний рядок доповнюється до оборотної матриці. Також показано, що довільне адекватне кільце є кільцем квазістабільного рангу 1, а довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1. Крім того, показана одностороння елементарна редукція неособливих матриць над комутативним кільцем Безу, в якому довільний елемент має майже стабільний ранг 1.

Під кільцем R розуміємо комутативне кільце з $1 \neq 0$. Позначимо через $U(R)$ групу одиниць кільця R, а через $J(R)$ – радикал Джекобсона.

Нагадаємо, що рядок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називається унімодулярним, якщо виконується умова $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$.

Стабільним рангом кільця R назвемо найменше натуральне число n таке, що виконується така властивість: для довільного унімодулярного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ з елементів кільця R існують елементи $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ такі, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n)$ є унімодулярним [3]. Позначатимемо $ст.р.(R) = n$.

Скажемо, що елемент $a \in R$ називається елементом стабільного рангу 1, якщо для кожного елемента $b \in R$ такого, що $aR + bR = R$, існує $t \in R$ таке, що $a + bt$ – оборотний елемент R.

Твердження 1. *Нехай R – комутативне кільце. Тоді довільний ідемпотент e є елементом стабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай $e = e^2$, $eR + bR = R$, для деякого $b \in R$, тоді існують $u, v \in R$, що $eu + bv = 1$. Домноживши цю рівність на $(1 - e)$ одержуємо

$$eu(1-e) + bv(1-e) = 1 - e,$$
$$eu - e^2u + bv - bve + e = e + b(v - ve) = 1,$$

тобто e – елемент стабільного рангу 1. □

Нагадаємо, що комутативне кільце з 1, в якому кожний скінченно породжений ідеал є головним, називається кільцем Безу.

Твердження 2. *Нехай R – комутативне кільце Безу. Тоді множина елементів стабільного рангу 1 є мультиплікативно замкненою.*

Доведення. Нехай a, c – елементи стабільного рангу 1. Для довільного $b \in R$ такого, що $acR + bR = R$ існує t, що $ac + bt \in U(R)$. Оскільки $acR + bR = R$, то $aR + bR = R$ і $cR + bR = R$. Позаяк a, c – елементи стабільного рангу 1, то $a + bx = u_1$, $c + by = u_2$, де $x, y \in R$, $u_1, u_2 \in U(R)$. Тоді

$$u_1u_2 = (a + bx)(c + by) = ac + aby + bcx + b^2xy = u_1u_2 = ac + b(ay + cx + bxy).$$

Оскільки $u_1u_2 \in U(R)$, то ac також є елементом стабільного рангу 1. □

Означення 1. *Назвемо ідеал I кільця R ідеалом стабільного рангу 1, якщо I містить хоча б один елемент стабільного рангу 1. В протилежному випадку ідеал I назвемо ідеалом нестабільного рангу 1.*

Позначимо через H множину всіх ідеалів нестабільного рангу 1 і нехай $H \neq \varnothing$. Нехай $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ – довільний ланцюг ідеалів множини H. Розглянемо ідеал $I = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} I_\alpha$.

Якщо $I \notin H$, то в I існує елемент a стабільного рангу 1. Згідно з означенням існує $\beta \in \Omega$ таке, що $a \in I_\beta$. Тобто I_β – ідеал стабільного рангу 1, а це неможливо, бо $I_\beta \in H$.

Отже, множина H – індукована. За лемою Цорна в H існує хоча б один максимальний ідеал. Такі ідеали називають ідеалами максимально нестабільного рангу 1, тобто маємо означення.

Означення 2. *Ідеал N називається ідеалом максимально нестабільного рангу 1, якщо для довільного ідеалу I такого, що $N \subset I$ і $I \neq N$, існує елемент a стабільного рангу 1 такий, що $a \in I$.*

Твердження 3. *Довільний ідеал нестабільного рангу 1 міститься хоча б в одному максимально нестабільному ідеалі.*

Доведення. За вище доведеним бачимо, що множина ідеалів нестабільного рангу 1, яка містить цей ідеал індукована. Лема Цорна завершує доведення.

□

Теорема 1. *Довільний ідеал максимально нестабільного рангу 1 кільця R є простим ідеалом.*

Доведення. Нехай P – довільний ідеал максимально нестабільного рангу 1. Припустимо, що існують такі елементи $c, b \in R$, що $b, c \notin P$, але $cb \in P$. Розглянемо ідеал $P+cR$. Оскільки $c \notin P$ і ідеал P – максимально нестабільного рангу 1, то з включення $P \subset P + cR$ випливає існування елемента стабільного рангу 1, $a \in R$ такого, що $a \in P+cR$. Розглянемо ідеал $I = \{x \mid ax \in P\}$. Очевидно, що $P \subset I$, причому $I \neq P$, оскільки $b \in I$, але $b \notin P$. Отже, існує такий елемент d стабільного рангу 1 кільця R, що $d \in I$. Враховуючи означення ідеалу I, бачимо, що $ad \in P$. Тобто ідеал P містить добуток двох елементів стабільного рангу 1. Згідно з твердженням 2 добуток двох елементів стабільного рангу 1 є елементом стабільного рангу 1. Отже, ми довели, що ідеал P містить елемент стабільного рангу 1, а це суперечить припущенню, що ідеал максимально стабільного рангу 1 не містить елементів стабільного рангу 1. □

Означення 3. *Комутативне кільце R з $1 \neq 0$ є кільцем майже стабільного рангу 1, якщо для довільного ідеалу I такого, що $I \not\subseteq J(R)$, ст.р.$(R/I) = 1$.*

Теорема 2. *Нехай R є кільцем майже стабільного рангу 1, тоді довільний унімодулярний рядок над R доповнюється до оборотної матриці.*

Доведення. Нехай R – кільце майже стабільного рангу 1 і $a_1R + \ldots + a_nR = R$.

Теорема очевидна у випадку, коли $n = 1$.

Якщо $n = 2$, тоді існують такі u, v, що $a_1u + a_2v = 1$, і матриця $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -v & u \end{pmatrix}$ – оборотна.

Нехай $n \geqslant 3$ і припустимо, що наш результат правильний для всіх $k < n$.

`Випадок 1.` Якщо $a_1 \in J(R)$, то з рівності $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$ випливає $a_2R + \ldots + a_nR = R$. Згідно з припущенням індукції існує оборотна матриця V вигляду

$$V = \begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_n \\ & V' & \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & V & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

є шуканою оборотною матрицею.Тобто рядок $(a_1, a_2, \dots a_n)$ доповнюється до оборотної матриці. Аналогічно розглядаємо випадок, коли $a_i \in J(R)$, $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Випадок 2. Нехай $a_1, \dots a_{n-2} \notin J(R)$. Розглянемо ідеал $a_1R + \dots + a_{n-2}R = I$. Згідно з означенням кільця R кільце $\overline{R} = R/I$ є кільцем стабільного рангу 1. Якщо $I + a_{n-1}R + a_nR = R$, то $\overline{a_{n-1}}\overline{R} + \overline{a_n}\overline{R} = \overline{R}$. Оскільки $ст.р.(\overline{R}) = 1$, то існує таке $y \in R$, що $\overline{a_{n-1} + a_ny}\overline{R} = \overline{R}$. Покажемо, що тоді $I + a_{n-1}R + a_nR = R$. Якщо це не так, то існує максимальний ідеал M кільця R, такий що $I + a_{n-1}R + a_nR \subset M$. Оскільки $ст.р.(R/I) = ст.р.R/J(R)$, де

$$J(I) = \bigcap_{M \in mspecI} M,$$

то $\overline{a_{n-1} + a_ny} \in M/J(I)$ – протиріччя. Отже,

$$a_1R + \dots + a_{n-2}R + a_{n-1}R + a_nR = a_1R + \dots + a_{n-2}R + (a_{n-1} + a_ny)R =$$
$$= I_{n-2} + (a_{n-1} + a_ny)R = R.$$

Згідно з припущенням індукції рядок $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + a_ny)$ доповнюється до $(n-1) \times (n-1)$ оборотної матриці V'.

Нехай

$$U = I_{n-2} \bigoplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} & & & a_n \\ & V' & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді VU є $n \times n$ оборотною матрицею з першим рядком $(a_1, \dots,$ $\dots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. □

Означення 4. *Ідеал I кільця R має майже стабільний ранг 1, якщо $ст.р.(R/I) = 1$.*

Означення 5. *Елемент a назвемо елементом майже стабільного рангу 1, якщо $ст.р.(R/aR) = 1$.*

Твердження 4. *Нехай a – елемент майже стабільного рангу 1 комутативного кільця R. Якщо $aR + bR + cR = R$, то існує елемент $y \in R$ такий, що $aR + (b + cy)R = R$.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$. Для елемента $x \in R$, нехай $\overline{x} = x + aR$. Оскільки $\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$, то існує $y \in R$ такий, що $\overline{b + cy}\overline{R} = \overline{R}$. Покажемо, що

$$aR + (b + cy)R = R.$$

Справді, якщо це не так, то існує максимальний ідеал M кільця R, для якого $aR + (b + cy)R \in M$. Це не можливо, оскільки $M/J(aR)$ – максимальний ідеал $\overline{R}$, де $J(aR)$-радикал Джекобсона кільця R/aR, який містить $\overline{b + cy}$. Зауважимо, що $ст.р.(R/aR) = ст.р.(R/J(aR))$. Отже, $aR+(b+cy)R = R$. Твердження доведено. □

Твердження 5. *Нехай a-елемент комутативного кільця R такий, що для довільних $b, c \in R$, для яких $aR + bR + cR = R$, існує елемент $y \in R$ такий, що $aR + (b + cy)R = R$. Тоді a є елементом майже стабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/aR$ і $\overline{bR} + \overline{cR} = \overline{R}$. Очевидно, що $aR + bR + cR = R$. Враховуючи обмеження накладені на елемент a, існує елемент y такий, що

$$aR + (b + cy)R = R.$$

Звідси $(\overline{b + cy})\overline{R} = \overline{R}$, тобто $ст.р.(R/aR) = 1$, що й треба було показати. Твердження доведено. □

Теорема 3. *Нехай R-кільце, в якому довільний ненульовий і незворотний елемент є елементом майже стабільного рангу 1. Якщо $J(R) \neq 0$, то R є кільцем стабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай $b, c \in R$ такі, що $bR + cR = R$ і нехай $a \in J(R)$, $a \neq 0$. Тоді $aR + bR + cR = R$. Згідно з попереднім твердженням існує таке $t \in R$, що

$$aR + (b + ct)R = R.$$

Оскільки $a \in J(R)$, тоді $(b+ct)R = R$. Тобто R – кільце стабільного рангу 1. Теорему доведено. □

Той факт, що елемент a є дільником елемента b позначатимемо $a|b$.

Означення 6. [4] *Комутативне кільце R називається адекватним кільцем, якщо R-кільце Безу і для довільних $a, b \in R$, $a \neq 0$ існують r, s, такі, що виконуються такі умови:*

1) $a = rs$;

2) $rR + bR = R, (r, b) = 1$;

3) для будь-якого необоротного дільника s' елемента s, тобто $s'|s$ виконується $s'R + bR \neq R$.

Теорема 4. *В адекватному кільці довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай R-адекватне кільце і $a \in R\backslash\{0\}$. Тоді елемент a можна записати у вигляді $a = rs$, де $rR+bR = R$ і для довільного незворотного дільника s' елемента s, маємо $s'R+bR \neq R$. Нехай $aR+(b+cr)R = \delta R$, де δ-незворотний елемент R, тоді $\delta|rs$. Якщо $(\delta, r) = h$, де h – незворотний елемент R, тоді $h|b + cr$ і $h|r$. Звідси $h|b$, що не можливо, оскільки $rR + bR = R$ і $h|b$, $h|r$, причому h-незворотний елемент R. Тоді $\delta|s$, а згідно з означенням елемента s, $sR + cR = \alpha R$, де α-незворотний елемент R. Оскільки $\delta|b + cr$ і $\alpha|\delta$, то $\alpha|b$. Тобто $\alpha|a$, $\alpha|b$, $\alpha|c$, що не можливо, оскільки $aR + bR + cR = R$.

Отже, $aR+(b+cr)R = R$. Згідно з твердженням 5 елемент a є елементом майже стабільного рангу 1. □

Означення 7. *Назвемо комутативне кільце R кільцем квазістабільного рангу 1, якщо довільний незворотний елемент, який не належить радикалу Джекобсона є елементом майже стабільного рангу 1.*

Теорема 5. *Довільне адекватне кільце R є кільцем квазістабільного рангу 1.*

Доведення. Нехай $a \notin U(R)$, $a \notin J(R)$. Позначимо через $\overline{R} = R/aR$. Нехай

$$\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R},$$

де $\overline{b} = b + aR$, $\overline{c} = c + aR$. Звідси $aR + bR + cR = R$. Оскільки R-адекватне кільце і $a \neq 0$, то існує елемент $r \in R$ такий, що $aR + (b + cr)R = R$, а це означає не що інше, як $(\overline{b + cr})\overline{R} = \overline{R}$, тоді $ст.р.(R/aR) = 1$, що й потрібно було довести. □

Нагадаємо, що кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна квадратна матриця A над R порядку n володіє канонічною діагональною редукцією, тобто існують такі оборотні матриці $P \in GE_n(R)$ і $Q \in GL_n(R)$ відповідних розмірів над R, що матриця $PAQ = diag(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ і $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$, для довільного i [4].

Якщо над кільцем R довільна 1×2 і 2×1 матриця володіє канонічною діагональною редукцією, то таке кільце називають кільцем Ерміта [4].

Теорема 6. *Комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта, тоді і лише тоді, коли $ст.р.(R) = 2$ [5].*

Під $GL_n(R)$ розумітимемо групу оборотних матриць кільця R, а через $GE_n(R)$ позначимо підгрупу групи $GL_n(R)$ породжену елементарними матрицями.

Теорема 7. *Нехай R-комутативне кільце Безу, в якому кожний елемент має майже стабільний ранг 1. Тоді для кожної неособливої $n \times n$ матриці A над R, існують такі необоротні матриці $P \in GE_n(R)$, $Q \in GL_n(R)$, що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Доведення. Нехай R-комутативне кільце Безу, в якому довільний елемент має майже стабільний ранг 1. Згідно з твердженням 4 стабільний ранг R дорівнює 2, тобто R є комутативним кільцем Безу стабільного рангу 2. Згідно з теоремою 6 R є кільцем Ерміта. На підставі твердження 4 і [4] R є кільцем елементарних дільників. Отже, для доведення теореми достатньо розглянути випадок матриці 2-го порядку [6]. Можна вважати, що найбільший спільний дільник елементів матриці A дорівнює 1 [6]. Оскільки стабільний ранг R дорівнює 2, то згідно з теоремою 6 R є кільцем Ерміта. Тому існує матриця $Q_1 \in GL_n(R)$ така, що $AQ_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$.

Оскільки матриця A-неособлива, то $a \neq 0$, $c \neq 0$. Згідно з твердженням 5 існує елемент $x \in R$ такий, що $aR + (b + cx)R = R$.

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} A Q_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ b + cx & a \end{pmatrix},$$

де $P_1 \in GE_2(R), Q_1 \in GL_2(R)$. Оскільки $aR + (b + cx)R = R$, то існує така оборотна матриця $Q_2 \in GL_n(R)$, що

$$P_1 A Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -ac \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриця $P_1 A Q_1 Q_2$ зводиться елементарними перетвореннями до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix},$$

тобто до канонічного діагонального вигляду. Теорему доведено. □

---

1. *Rush D.E.* Bezout domains with stable range 1 / *Rush D.E.* // J. Pure and Appl. Algebra. – 2001. – Vol. 158. – P. 309-324.
2. *Mc Govern, W.* Bezout rings with almost stable range 1 are elementary divisor rings / *Mc Govern, W.* // J. Pure and Appl. Algebra. – 2007. – Vol. 212. – P. 340-348.
3. *Vaserstein L.N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces / *Vaserstein L.N.* // Functional Anal. Appl. – 1971. – Vol. 5. – P. 102-110.
4. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / *Kaplansky I.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
5. *Zabavsky B.V.* Reduction of matrices over Bezout rings of stable rank not higher than 2 / *Zabavsky B.V.* // Ukrain. Math. J. – 2003. – Vol. 55, №4. – P. 665-670.
6. *Zabavsky B.V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range / *Zabavsky B.V.* // Alg. Discr. Math. – 2005. – №1. – P. 134-148.

ELEMENTS OF STABLE AND ALMOST STABLE RANK 1

Sofia BILAVSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: zosia_meliss@yahoo.co.uk

In this paper, an attempt to generalize stable rank rings is proposed, and the notions of element stable rank 1 and element almost stable rank 1 is introduced. Besides multiplicativity closed set of stable rank 1 elements shown, which enables introduction of maximal unstable rank 1 ideals to be involved. The notion of the element of almost stable rank 1 and almost stable rank 1 ring is described. Moreover, any unimodular row over the almost stable rank 1 ring is complemented. Also, any adequate ring is a quazistable rank 1 ring is proved. The fact, that any nonzero element is an element of almost stable rank 1. Furthermore, oneside elemental reduction of square matrices over the commutative Bezout's ring in which every element has almost stable rank 1 is shown.

Key words: unimodular row, stable rank n, Bezout ring, adequate ring, Hermite ring, elementary divisors ring.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАБИЛЬНОГО И ПОЧТИ СТАБИЛЬНОГО РАНГА 1

София БЕЛЯВСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: zosia_ meliss@yahoo.co.uk

Предлагается новое обобщение колец стабильного ранга 1, а именно, дано понятие элемента стабильного ранга 1 и элемента почти стабильного ранга 1. Показывается мультипликативная замкнутость множеств элементов стабильного ранга 1, что даёт возможность ввести идеалы максимально нестабильного ранга 1. Кроме того, дано понятие элемента почти стабильного ранга 1 и кольца почти стабильного ранга 1. Также показано, что над кольцом почти стабильного ранга 1 произвольная унимодулярная строка является дополнительной. Доказано, что произвольное адекватное кольцо есть кольцом квазистабильного ранга 1. А произвольный ненулевой элемент есть элементом почти стабильного ранга 1. Кроме того, показана односторонняя элементарная редукция квадратных матриц над коммутативным кольцом Безу, в котором произвольный элемент имеет почти стабильный ранг 1.

Ключевые слова: идеал стабильного ранга 1, идеал максимально нестабильного ранга 1, элемент почти стабильного ранга 1, идеал почти стабильного ранга 1, адекватное кольцо, кольцо квазистабильного ранга 1.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2009

Прийнята до друку 16.12.2009