ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 164-174
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 164-174

УДК 539.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ПРУЖНОЮ КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ У ШАЙБІ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Іван ЗВІЗЛО, Микола СЛОБОДЯН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розв'язано задачу про двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з коловою межею поділу матеріалів і наскрізною радіальною прямолінійною тріщиною, береги якої гладко контактують по всій її довжині на одній із основ пластини. Через контакт берегів тріщини розв'язок задачі шукали у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини (класична теорія). Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів повороту та горизонтальних переміщень на тріщині, яку розв'язували за допомогою числового методу механічних квадратур. Побудовано графічні залежності контактного зусилля між берегами тріщини, коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль при різних геометричних і механічних параметрах задачі.

Ключові слова: згин, кусково-однорідна пластина, колова межа, плоска задача, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

Вступ. Конструктивні пластинчасті елементи широко застосовують у машинобудуванні та інших галузях техніки. З технологічних міркувань вони можуть містити кругові включення, де під час виготовлення чи в процесі експлуатації у них можуть виникнути тріщиноподібні дефекти. Під дією зовнішнього згинального навантаження поблизу тріщиноподібних дефектів виникає висока концентрація напружень, що зменшує їхню міцність.

Задачі згину пластин, які містять тріщини, досліджувало багато науковців з використанням класичної та уточнених теорій згину пластин. Узагальнення цих результатів і методи їхнього розв'язування подано в монографіях Л.Т. Бережницького, М.В. Делявського, В.В. Панасюка [1], С.А. Калоєрова [2], А.С. Космодаміанского, Г.М. Іванова [3], Л.П. Мазурака, Л.Т. Бережницького [4], І.А. Прусова [5, 6], М.П. Саврука [7], Ю. Муракамі [8], В.К. Хижняка, В.П. Шевченка [9] та ін.

При згині пластини зрозуміло, що береги наскрізної тріщини будуть контактувати на одній із основ пластини. Контакт берегів тріщини за згину пластини у тривимірному формулюванні досліджували R.S. Alwar, K.N. Ramachander Nambissan [10]. І.П. Шацький [11], а дещо пізніше M.J. Young, C.T. Sun [12], аналітично розв'язали задачу про згин нескінченної ізотропної пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням контакту її берегів. В.К. Опанасович, Р.Г. Селіверстов [13], F.S. Heming [14], P.F. Joseph, F. Erdogan [15], Y.W. Kwon [16], Murthy M., Raju K., Viswanath S. [17] досліджували контакт берегів

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

тріщини по лінії на одній із основ пластини з врахуванням уточнених теорій згину пластин. І. Шацький В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій, Н. Маковійчук [18-22] розглядали задачі про згин безмежної пластини, півплощини, які містять одну, дві або систему тріщин, береги яких контактують, і контакт берегів тріщин в оболонках. У працях В.К. Опанасовича, М.С. Слободяна [23-25] досліджено згин безмежної пластини з круговим отвором або жорсткою круговою шайбою з однією або двома наскрізними прямолінійними тріщинами, береги яких контактують. В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук [26] опрацьовували задачу про згин пластини з тріщиною, розміщеною вздовж дуги кола, враховуючи контакт берегів тріщини на одній із основ пластини. J.P. Dempsey, I.I. Shektman, L.I. Sleplyan [27, 28], В.К. Опанасович [29] досліджували задачу про згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною, вважаючи, що її береги можуть контактувати по висоті пластини. У працях В. Опанасовича, І. Яцика [30] розв'язано задачу про згин безмежної пластини з тріщинами, береги яких контактують по висоті пластини, з використанням теорії Рейсснера для згину пластин. В.К. Опанасович, І.С. Звізло [31-33] досліджували задачі про двосторонній згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною або коловою межею поділу матеріалів та однією або двома тріщинами, береги яких гладко контактують по лінії на одній із основ пластини.

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну кусково-однорідну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка складається з пластини з круговим отвором радіуса R, в який впаяна шайба того самого радіуса. Вважаємо, що пластина перебуває під дією розподілених згинальних моментів на нескінченності. Крім того, в шайбі наявна одна радіальна наскрізна прямолінійна тріщина, береги якої під дією зовнішнього навантаження приходять у гладкий контакт по лінії на одній з основ пластини, причому береги тріщин були вільні від зовнішнього навантаження. Потрібно визначити напружено-деформований стан пластини.

У середній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxyz$ з початком координат у центрі кругової шайби, спрямувавши вісь Oz перпендикулярно до серединної площини. З тріщиною завдовжки $2l$ зв'язуємо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком координат у центрі тріщини, спрямувавши вісь O_1x_1 по ній. Область у середині шайби позначимо через $S_1(S^+)$, зовні – $S_2(S^-)$. Будемо користуватись полярною системою координат r, θ з полюсом у точці O і полярною віссю Ox. Відрізок дійсної осі $O_1x_1y_1$, для якого $|x_1| < l$, позначимо L_1, x_{01} – координата центру тріщини у глобальній системі координат Oxy. Граничним значенням відповідних величин при $y_1 \to \pm 0$ або $r \to R \pm 0$ будемо приписувати значки "+" і "–", відповідно. Параметрам, пов'язаним із шайбою, будемо приписувати індекс "1", а для матриці – індекс "2". Надалі індекс j набуває значень 1 і 2.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

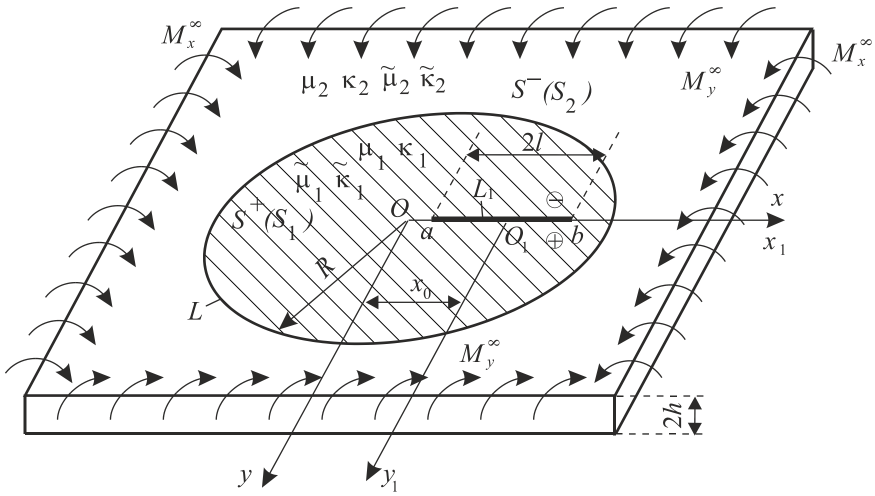

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Під дією згинальних моментів M_x^∞ і M_y^∞ береги тріщин контактуватимуть, тоді розв’язок задачі розбиваємо на дві задачі: плоску задачу та задачу згину, де користуємось класичною теорію згину пластин.

Згідно з формулюванням задачі отримали такі крайові умови:

$$\sigma_{y_1y_1}^{(1)\pm} = -N/(2h),\ \sigma_{x_1y_1}^{(1)\pm} = 0,\ x_1 \in L_1, \tag{1}$$

$$P_{y_1}^{(1)\pm} = 0,\ M_{y_1}^{(1)\pm} = hN,\ \left[\partial_{x_1} v_P^{(1)}\right] + h\left[\partial_{x_1y_1}^2 w^{(1)}\right] = 0,\ x_1 \in L_1, \tag{2}$$

$$P_r^{(1)} = P_r^{(2)},\ M_r^{(1)} = M_r^{(2)},\ w^{(1)} = w^{(2)},\ \partial_r w^{(2)} = \partial_r w^{(2)},\ \text{на } L, \tag{3}$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)},\ \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)},\ u_{rP}^{(1)} = u_{rP}^{(2)},\ u_{\theta P}^{(1)} = u_{\theta P}^{(2)},\ \text{на } L, \tag{4}$$

де N - контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{y_1y_1}^{(j)}, \sigma_{x_1y_1}^{(j)}$ і $\sigma_{rr}^{(j)}, \sigma_{r\theta}^{(j)}$ – компоненти тензора напружень; а $u_P^{(j)}, v_P^{(j)}$ і $u_{rP}^{(j)}, u_{\theta P}^{(j)}$ – компоненти вектора переміщення точки у плоскій задачі; $P_{y_1}^{(j)}$ і $P_r^{(j)}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; $M_{y_1}^{(j)}$ і $M_r^{(j)}$ – згинальний момент ; $w^{(j)}$ – прогин пластини. Квадратні дужки у формулі (2) означають стрибок відповідної величини на берегах тріщини.

Розв’язок задачі. Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [34] і класичної теорії згину пластин [6], аналогічно зроблено у [33], розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано системи сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

повороту нормалі до серединної площини у задачі згину $\Psi(\eta)$ та стрибків переміщень на берегах тріщин у плоскій задачі $\Gamma(\eta)$

$$\int_{-1}^{1}\{K(\eta,\varepsilon)+L(\eta,\varepsilon)\}\Psi_1(\eta)d\eta = c',\quad \int_{-1}^{1}\{R(\eta,\varepsilon)-S(\eta,\varepsilon)\}\Gamma_2(\eta)d\eta = 0, \quad (5)$$

$$\int_{-1}^{1}\{(L(\eta,\varepsilon)-K(\eta,\varepsilon))\Psi_2(\eta)+2(R(\eta,\varepsilon)+S(\eta,\varepsilon))\Gamma_1(\eta)\}d\eta = P(\varepsilon), \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned}
K(\eta,\varepsilon) = {} & -\frac{1}{2\pi\tilde{\mu}_1}\Biggl\{\frac{\eta}{2\lambda^2}\Bigl(\tilde{D}_{21}(1-\tilde{k}_1)+\tilde{D}_{61}\frac{\lambda^2}{\Xi^2}\Bigr)-\tilde{k}_1\Bigl(\frac{1}{\Theta-\Xi}+\frac{\tilde{A}_4\tilde{k}_1\Theta}{\Theta_1}\Bigr)- \\
& -\tilde{A}_4\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Theta_1^2}\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Theta}-\Theta\Bigr)-\frac{1}{\Theta}\Bigr)+\frac{2\lambda^2\tilde{A}_4\Theta\Xi}{\Theta_1^3}\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Theta}-\Theta\Bigr)+ \\
& +\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Xi^2}\Bigl(\frac{\tilde{A}_3\Xi}{\Theta_1}-\tilde{A}_4\Bigl(-\frac{1}{\Theta}+\frac{\lambda^2(3\Theta\Xi-\lambda^2)}{\Theta_1^3}\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Theta}-\Theta\Bigr)\Bigr)\Bigr)\Bigr)-\frac{\tilde{k}_1}{\Theta-\Xi}\Biggr\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\eta,\varepsilon) = {} & \frac{1}{2\pi\tilde{\mu}_1}\Biggl\{\frac{\lambda^2\tilde{A}_4\tilde{k}_1}{\Theta_1^2}\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Theta}-\Theta\Bigr)-\frac{\tilde{A}_4\tilde{k}_1}{\Theta}+(\Theta-\Xi)+ \\
& +\frac{\tilde{A}_4\tilde{k}_1\Theta}{\Theta_1}+\Xi\Bigl(\frac{1}{(\Theta-\Xi)^2}-\frac{\tilde{A}_4\tilde{k}_1\Theta^2}{\Theta_1^2}\Bigr)-\frac{\Theta}{(\Theta-\Xi)^2}+ \\
& +\frac{\tilde{A}_4\tilde{k}_1\lambda^2\Theta}{\Xi^2}\Bigl(\frac{1}{\Theta_1}+\frac{\Theta\Xi}{\Theta_1^2}\Bigr)+0.5\eta\lambda^2\Bigl(\tilde{D}_{31}(1-\tilde{k}_1)+\frac{\tilde{D}_{61}\lambda^2}{\Xi^2}\Bigr)\Biggr\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\eta,\varepsilon) = {} & \frac{1}{2\pi}\Biggl\{\frac{A_4\eta}{\lambda^2(1-A_4)}\Bigl(2A_4+(A_4-1)\frac{\lambda^2}{\Xi^2}\Bigr)+\frac{A_4}{\Theta}\Bigl(1+\frac{\lambda^2}{\Xi^2}\Bigr)+ \\
& +\frac{2}{\Theta-\Xi}+\frac{A_3\lambda^2}{\Xi\,\Theta_1}-A_4\Bigl(\frac{\Theta}{\Theta_1}+ \\
& +\frac{\lambda^2}{\Theta_1^2}\Bigl(1+\frac{\lambda^2}{\Xi^2}\Bigl[\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Theta}-\Theta\Bigr)\Bigr]-2\lambda^2\Theta\Bigl(\Xi-\frac{\lambda^2}{\Xi}\Bigl[\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Theta}-\Theta\Bigr)\Bigr]\frac{1}{\Theta_1^3}\Bigr]\Biggr\},
\end{aligned}$$

$$S(\eta,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\Biggl\{\frac{A_4}{\Theta}+\frac{1}{\Theta-\Xi}-1-A_4\Bigl(\frac{\lambda^2}{\Theta_1^2}(\lambda^2\Theta^{-1}-\Theta)+$$

$$+\left(1+\frac{l^2}{X^2}\right)\frac{T}{T_1}-\frac{T^2}{T_1^2}\left(X-\frac{l^2}{X}\right)\Bigg]+A_4hl^2\left(1-A_4\right)^{-1}\left[2A_4+\frac{l^2}{X^2}\left(A_4-1\right)\right]\Bigg\},$$

$$P\left(e\right)=-\frac{G_2}{\tilde{m}_1}\left\{\frac{1-\tilde{g}^{-1}\tilde{A}_3}{1-\tilde{A}_4}\left(1-\tilde{k}_1\right)+\left(1+\tilde{g}\tilde{A}_4\right)\right\},$$

$$T=X_0+h,\ X=X_0+h,\ X_0=x_0/l,\ h=x_1/l,\ e=x_1/l,$$

$$r=\frac{M_x^{\Gamma}}{M_y^{\Gamma}},\ \tilde{n}=\frac{E_2}{E_1},\ l=\frac{R}{l},\ T_1=\bar{X}T-l^2,\ m_1=\frac{1}{2\left(1+u_1\right)},\ m_2=\frac{\tilde{n}}{2\left(1+u_2\right)},$$

$$k_j=\frac{3-u_j}{1+u_j},\ \tilde{k}_j=\frac{3+u_j}{1-u_j},\ \tilde{m}_j=\frac{1}{2D_j\left(1-u_j\right)},\ D_1=\frac{2}{3\left(1-u_1^2\right)},D_2=\frac{2\tilde{n}}{3\left(1-u_2^2\right)},$$

$$A_1=m_1+m_2k_1,\ A_2=m_2+m_1k_2,\ \tilde{A}_1=\tilde{m}_1+\tilde{m}_2\tilde{k}_1,\ \tilde{A}_2=\tilde{m}_2+\tilde{m}_1\tilde{k}_2,$$

$$g=-A_1/A_2,\ \tilde{g}=-\tilde{A}_1/\tilde{A}_2,\ A_4=\left(m_2-m_1\right)A_1^{-1},\ \tilde{A}_4=\left(\tilde{m}_2-\tilde{m}_1\right)\tilde{A}_1^{-1},$$

$$A_3=A_2^{-1}\left(m_1k_2-m_2k_1\right),\ \tilde{A}_3=\tilde{A}_2^{-1}\left(\tilde{m}_1\tilde{k}_2-\tilde{m}_2\tilde{k}_1\right),\ A_5=m_2A_1^{-1}\left(1+k_1\right),$$

$$G_2=-\frac{1+r}{4D_2\left(1+u_2\right)},\ D_3=\frac{1-A_3g^{-1}}{1-A_4^2},\ \tilde{D}_{31}=\frac{\tilde{A}_4^{e}\left(1-\tilde{k}_1\right)}{1-\tilde{A}_4},\ \tilde{D}_{61}=\tilde{A}_4\left(\tilde{k}_1-1\right),$$

$$y\left(x\right)E_1h^3/M_y^{\Gamma}=Y\left(x\right)=Y_1\left(x\right)+iY_2\left(x\right),$$

$$y\left(x\right)=\left(1+\tilde{k}_1\right)^{-1}\left[\partial_x w^{(1)}+i\partial_y w^{(1)}\right],$$

$$\frac{h^2g'\left(x\right)}{M_y^{\Gamma}}=G\left(x\right)=G_1\left(x\right)+iG_2\left(x\right),\ g'\left(x_1\right)=\frac{2m_1}{i\left(1+k_1\right)}\left[\partial_{x_1}\left(u_P+iv_P\right)\right].$$

З крайової умови (2) отримаємо

$$G_1\left(h\right)+\frac{1+\tilde{k}_1}{\left(1+\tilde{k}_1\right)\left(1+u_1\right)}Y_2\left(h\right)=0. \tag{7}$$

Систему рівнянь (5)-(7) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^{1}Y\left(h\right)dh=0,\ \int_{-1}^{1}G\left(h\right)dh=0,\ \int_{-1}^{1}hY_2\left(h\right)dh=0, \tag{8}$$

де перші дві умови виражають однозначність кутів повороту у задачі згину та однозначність переміщень у плоскій задачі, а остання - однозначність прогину при обході контура тріщини. Умови ідеального механічного контакту на коловій межі поділу матеріалів (3)-(4) вдалося задовольнити аналітично.

Зведене контактне зусилля між берегами тріщини обчислимо за формулою

$$N^* = \frac{hN}{M_y^{\Gamma}} = 2\int_{-1}^{1}\left\{R(\eta,\varepsilon) + S(\eta,\varepsilon)\right\}G_1(\eta)d\eta .$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів (КІМ) $K = K_1 - iK_2$ та зусиль (КІЗ) $k = k_1 - ik_2$ можна обчислити за формулами [7]

$$k = \mp h \lim_{x \to \pm l}\left(f(x)\gamma\psi'(x)\right),\ f(x) = \sqrt{\left(l^2 - x^2\right)/l}\ ,$$

$$K = \mp 4E_1h^3\left(3+\nu_1\right)\left(3\left(1-\nu_1^2\right)\right)^{-1}\lim_{x \to \pm l}\left(f(x)\psi(x)\right).$$

Числовий аналіз задачі та висновки. Система сингулярних інтегральних рівнянь (5)-(8) розв'язана чисельно з використанням методу механічних квадратур [35, 36] при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

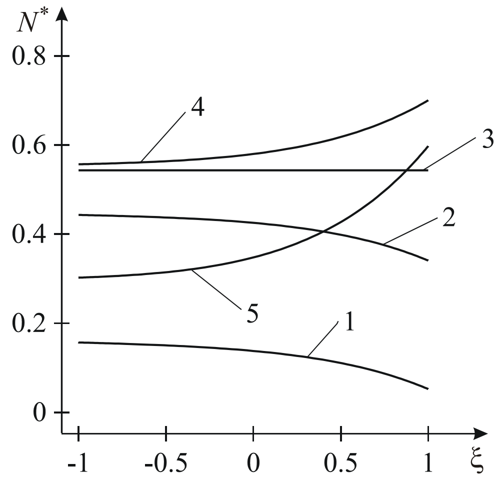

Рис. 2. Графічна залежність контактного зусилля N^* між берегами тріщини при різних $b = \lg\left(E_1/E_2\right)$

На рис. 2 зображено графічну залежність приведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^{\Gamma}$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при $r = 1$, $l = 5$, $X_0 = 3$. Крива 1 побудована при $b = -1$, крива 2 – при $b = -0.3$, крива 3 – при $b = 0$, крива 4 – при $b = 0.3$, крива 5 – при $b = 1$. При $b < 0$ величина контактного зусилля є максимальною у вершині a $(\xi = -1)$, а при $b > 0$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

– максимальна у вершині $b(x = 1)$, поблизу колової межі поділу матеріалів. При $b = 0$ отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини у пластині.

На рис. 3 побудовано графічну залежність КІМ $K_1^* = K_1 \big/ \left(M_y^{\text{г}} \sqrt{l}\right)$ від $b = \lg \dfrac{E_1}{E_2}$ при $l = 4$, $r = 1$. Криві 1 побудовані при $X_0 = 0$, криві 2 – при $X_0 = 0.3$, криві 3 – при $X_0 = 1.3$, криві 4 – при $X_0 = 2$. При $b < 0$ КІМ у вершинах тріщини *a* та *b* зростають із збільшенням b. При $b > 0$ величина КІМ у вершині тріщини *b* є більшою, ніж у вершині *a*. Крім того, при наближенні вершини тріщини *b* до колової межі поділу матеріалів при $b > 0$ КІМ у ній збільшуються.

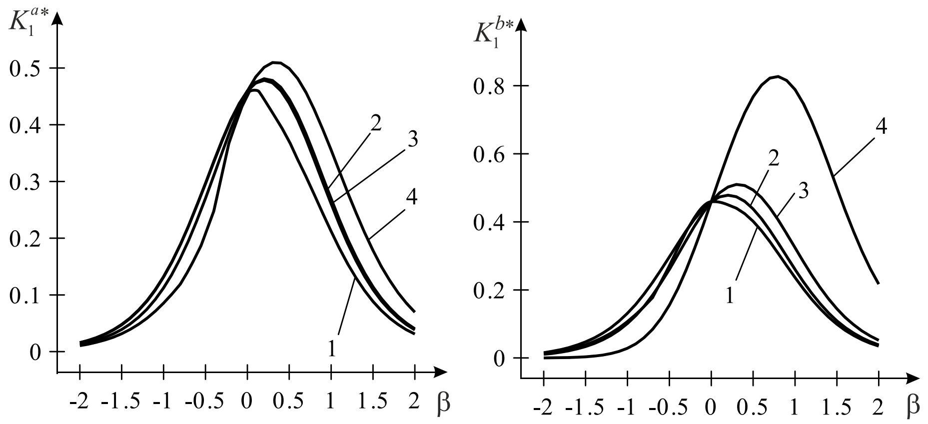

Рис. 3. Графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів від b при різних значеннях $X_0 = x_0 / l$

Зауважимо, що зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль $k_1^* = h k_1 \big/ \left(M_y^{\text{г}} \sqrt{l}\right)$ і моментів K_1^* пов'язані між собою залежністю $k_1^* / K_1^* = 3(1 + u_1)/(3 + u_1)$, тому графічні залежності для k_1^* не подаємо, а $k_2^* = 0$ і $K_2^* = 0$.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Список використаної літератури

1. *Бережницкий Л.Т.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. / Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка. – 1979.
2. *Калоеров С.А.* Изгиб многосвязных анизотропных плит с трещинами / С.А. Калоеров // Теорет. и прикл. механика. – 1984. – № 15. – С. 22-29.
3. *Космодамианский А.С.* Изгиб тонких многосвязных плит./ А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк: ДонГУ, 1973.
4. *Мазурак Л. П.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин./ Л.П. Мазурак, Л.Т. Бережницкий. – К.: Наук. думка, 1990.
5. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. / И.А. Прусов - Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1962.
6. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит. / И.А. Прусов – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975.
7. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. / М.П. Саврук – К.: Наук. думка, 1988.
8. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир. – 1990, Т. 1, 2.
9. *Хижняк В.К.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко– Донецк: Изд-во Донец. ун-та. – 1980.
10. *Alwar R.S.* Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R.S. Alwar, K.N. Ramachandran Nambissan // Engineering Fracture Mechanics. – 1983. – Vol. 17. – No. 4. – P. 323-333.
11. *Шацький І.П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – № 7. – С. 49-51.
12. *Young M.* Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.
13. *Опанасович В.* Вплив контакту берегів двох співвісних тріщин на напружений стан трансверсально-ізотропної пластини в умовах чистого згину / В. Опанасович, Р. Селіверсов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 152-157.
14. *Heming F. S.* Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate / F.S. Jr. Heming // International Journal of Fracture. – 1980. – Vol. 16. – No. 4. – P. 289-304.
15. *Joseph P.F.* Bending of thin Reissner plate with a through crack / P.F. Joseph, F. Erdogan // Journal of Applied Mechanics. – 1991. – Vol. 58. – P. 842-846.

16. *Kwon Y.W.* Finite element analysis of crack closure in plate bending / Y.W. Kwon// Computers and Structures. – 1989. – Vol. 32. – No. 6. – P. 1439-1445.

17. *Murthy M.* On the bending stress distribution at the tip of a stationary crack from Reissner's theory / M. Murthy, K. Raju, S. Viswanath // International Journal of Fracture. –1981. – Vol. 17. – P. 537-552.

18. *Шацкий И.П.* Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И.П. Шацкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2000. – № 31. – С. 91-97.

19. *Шацький І.* Взаємовплив паралельних тріщин з берегами, які контактують, при згині пластин / І. Шацький, Т. Даляк // Машинознавство. – 2000. – № 1. – С. 27-30.

20. *Шацький І.*. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. Львів: Каменяр, 2000. – Т. 2. – С. 51-54.

21. *Шацький І.П.* Граничний стан напівнескінченної пластини з крайовою тріщиною за згину з розтягом / І.П. Шацький, В.В. Перепічка // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40. – № 2. – С. 73-77.

22. *Шацкий И.П.* Равновесие пологой сферической оболочки с учетом контакта берегов трещины при изгибе / И.П. Шацкий, Н.В. Маковийчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 146-150.

23. *Опанасович В. К.* Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2005. – Вип. 1. – С. 85-89.

24. *Опанасович В.К.* Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106-119.

25. *Опанасович В.* Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують/ В. Опанасович, М. Слободян // Вісник Львівського державного аграрного університету. – 2007. – № 8. – с. 75-87.

26. *Божидарнік В.В.* Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів: Проблемы прочности / В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Гера-симчук. – 2006, № 5 (383). – С. 135-141.

27. *Dempsey J.P.* Closure of a through crack in a plate under bending. / J.P. Dempsey, I.I. Shektman, L.L. Slepyan // International Journal or Solids and Structures. – 1998. – Vol.35. – P. 4077-4089.

28. *Slepyan L.I.* Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.I. Slepyan, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1727-1749.

29. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.

30. *Опанасович В.* Визначення критичного навантаження за згину пластини Рейснера з наскрізними тріщинами та з урахуванням контакту їхніх берегів / В. Опанасович, І. Яцик // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: наук. зб.; за заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 155–160.

31. *Опанасович В.* Изгиб кусочно-однородной изотропной пластины с прямолинейной трещиной, паралельной линии спая, с учетом контакта ее берегов / В.К. Опанасович, И.С. Звизло //Теоретическая и прикладная механика. Научно-техн. сборник. – 2001. – С. 88-94.

32. *Опанасович В.* Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів із двома перпендикулярними тріщинами з урахуванням контакту їх берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, І.М. Яцик // Вісн. Дніпропетровського ун-ту, 2007. Механіка. Вип. 11, том 2. № 2/2. С.141-148.

33. *Опанасович В.* Двосторонній згин ізотропної кусково-однорідної пластини з коловою межею поділу матеріалів та радіальною тріщиною з урахуванням контакту берегів / Віктор Опанасович, Іван Звізло // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. Львів: Каменяр. – 2009. – Вип. 8. – С. 63-78.

34. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили – М.: Наука, 1966.

35. *Панасюк В. В.* Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976.

36. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів, 2007.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

ДВУОСНЫЙ ИЗГИБ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ШАЙБОЙ И РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ВНУТРИ ЭТОЙ ШАЙБЫ С УЧЕТОМ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Виктор ОПАНАСОВИЧ, Иван ЗВИЗЛО, Николай СЛОБОДЯН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

Исследовано задачу об изгибе кусочно-однородной изотропной пластины с круговой шайбой и радиальной трещиной внутри шайбы с учетом гладкого контакта берегов трещины. Используя метод теории функций комплексного переменного, решение задачи приведено к системе сингулярных интегральных уравнений на трещине, которая решена численно. Проведен численный анализ задачи.

Ключевые слова: трещина, изгиб, плоская задача, шайба, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности усилий и моментов.

BILATERAL BENDING OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH A CIRCULAR PLATE AND RADIAL CRACK INSIDE THE WASHER WITH TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ITS SHORES

Viktor OPANASOVYCH, Ivan ZVIZLO, Mykola SLOBODYAN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

The problem of bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and radial crack inside the washer with a taking into account the contact crack is investigated. Using the method of complex variable theory, the solution was reduced to the construction of solutions of singular integral equations on the crack, which is solved numerically. The conditions of ideal mechanical contact on a circular boundary materials could satisfy analytically.

Keywords: crack, bending, plane problem, washer, complex potentials, the contact force intensity factors of forces and moments.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.2011
Прийнята до друку 31.05.2012