

## **ЗМІНА РОЗДІЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ У ВИПАДКУ ДВОХ ВХІДНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЗАСОБОМ ПСЕВДООБЕРТАННЯ ВИРОДЖЕНОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ДИВЕРГЕНЦІЙ**

© Рашкевич Ю., Пелешко Д., Ізонін І., Пелешко М., Батюк Д., 2016

Розроблено новий метод передискретизації у випадку двох вхідних зображень на основі псевдообертання виродженого матричного оператора дивергенцій. Експериментальні дослідження показують високу стійкість методу до обробки зображень із флуктуаційною функцією інтенсивності. Порівняння результатів роботи розробленого методу з результатами за існуючими на основі співвідношення пікового сигналу до шуму показало підвищення якості передискретизованих зображень. Це зумовлює можливість його ефективного застосування для обробки зображень з різкими краями.

**Ключові слова:** зображення, передискретизація, матриця Мура–Пенроуза, псевдообертання.

The method of changing the resolution in the case of two input images based on pseudorotation degenerate operator's matrix of divergences is developed. Experimental studies show high resistance to image processing method with sharply fluctuating function of intensity. Comparing the results of the proposed method with the results of the existing based PSNR, showed improvement of quality of output images. This leads to the possibility of its application in image processing with sharp edges.

**Key words:** images, oversampling, Moore–Penrose matrix, pseudorotation.

### **Вступ**

Розроблення методів та засобів, які дають змогу здійснювати процес ефективної передискретизації зображень, є актуальною науковою задачею сьогодення. Це пов'язано перш за все з широким застосуванням автоматизованих систем покращення якості зображень у різних сферах народного господарства. Сьогодні існує багато методів передискретизації у випадку обробки одного зображення. Проте існування набору зображень однієї сцени, які “зсунуті” один відносно одного на неціле значення пікселя, виводять задачу передискретизації на новий рівень. Тут цей процес повинен охопити усі зображення з набору, що дозволить використати додаткову інформативність з кожного такого зображення для ефективного розв'язання поставленої задачі. Методів, які працюють за цією схемою, є теж чимало, проте поставлена задача ускладнюється при флуктуаціях функції інтенсивності зображень. Саме цей випадок може негативно впливати на результати застосування процедур передискретизації зображень особливо при великих коефіцієнтах збільшення чи зменшення. З цієї причини задача зміни роздільної здатності зображень є недостатньо опрацьованою.

## Аналіз існуючих методів

У [1] методи зміни роздільної здатності (РЗ) зображень поділяються на дві групи: методи, що працюють у частотній та просторовій областях. Аналіз останніх досліджень у цій області дав змогу виділити класи методів з обох груп, які подано на рис. 1.

Робота методів зміни РЗ у частотній області передбачає виконання таких кроків: а) перетворення зображення (зображень) низької РЗ у частотній області; б) застосування обраного алгоритму передискретизації для синтезу зображення підвищеної РЗ; в) відновлення отриманого зображення в просторовій області. Аналіз методів зміни РЗ, що працюють у частотній області за останні роки [3–7] дає можливість виділити їх дві основні підгрупи: методи, що використовують: 1) перетворення Фур'є; 2) вейвлет-перетворення.

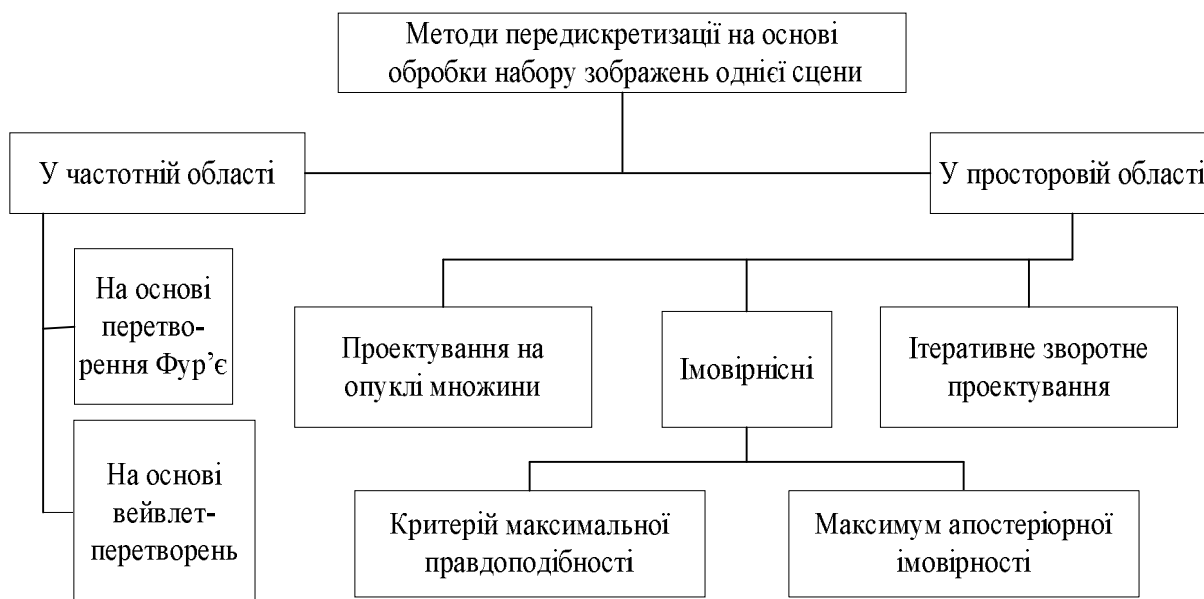


Рис. 1. Загальна класифікація методів зміни роздільної здатності на основі обробки набору зображень однієї сцени

У [3, 4] описано ітераційні методи зміни РЗ для одновимірного випадку на основі перетворення Фур'є, що спираються на теорему Парсеваля та деякі властивості аналітичних функцій [3]. Узагальненням їх став неітераційний метод [5] для одно- та двовимірного випадків на основі сингулярного розкладу. Результати роботи методу на спотворених шумом даних є дещо кращі, а швидкість його роботи значно вищою порівняно з [3, 4].

У [6] описано метод передискретизації цієї підгрупи, що базується на обробці декількох зображень низької РЗ однієї сцени, для яких характерна наявність субпіксельного зсуву. Метою методу є визначення неперервного перетворення Фур'є зображення високої РЗ, для якого в переважній більшості випадків застосовують метод найменших квадратів. Цей підхід ґрунтується на гіпотезі про те, що набір зображень низької РЗ не містить шумів, змазів та інших артефактів, спричинених різноманітними факторами. Враховуючи цей недолік, у [7] розроблено метод, що включає змази та адитивний шум. Існує ще ряд розширень описаного методу, проте загальний підхід до розв'язання поставленої задачі залишається однаковим.

Як альтернатива перетворенню Фур'є в методах передискретизації частотної області використовують вейвлет-перетворення [8–14]. Ідеєю методів цієї групи є розкладання зображення на структурно корельовані підзображення. Це дозволяє використовувати самосхожість локальних сусідніх регіонів у алгоритмі зміни РЗ.

У [8, 9] розроблено найбільш вдалу загальну схему роботи подібних методів. Першим кроком процедури є розбиття вхідного зразка на підзображення різних просторових та частотних областей на основі дискретного вейвлет-перетворення (ДВП). Розмірність трьох високочастотних підзображень, отриманих таким способом, удвічі менша за розмірність вхідного зображення. Враховуючи це, наступним кроком методу є застосування бікубічної інтерполяції з коефіцієнтом збільшення – 2 до трьох новоутворених високочастотних підзображень (низько-низька складова не розглядається). Однією з особливостей ДВП [10] є відсутність інваріанта зміщення, що може спричинити виникнення контурного шуму на відновленому зображенні. Саме для уникнення появи ефекту Гібса на результуючому зображенні, згідно з методом до вхідного зразка застосовують стаціонарне вейвлет перетворення (СВП). Розмірність кожного з трьох високочастотних підзображень, отриманих таким чином, дорівнює розмірності вхідного зображення. Модифікація відповідних високочастотних підзображень отриманих ДВП та СВП шляхом їх усереднення є наступним кроком методів цієї підгрупи. Інтерполюючи нові високочастотні підзображення і власне вхідний зразок (який розглядається як низькочастотне підзображення) з коефіцієнтом збільшення  $n$ , застосувавши зворотне ДВП, отримуємо зображення підвищеної у  $n$  разів РЗ.

У [11–13] запропоновано спрощену схему вищеприданого підходу – без використання СВП. Проте необхідність усунення ефекту Гібса зумовлює застосування *post*-обробки отриманого зображення. У [12] з цією метою запропоновано застосування фільтру, що значно збільшує час роботи методу. У [11] для розкладу зображення за ДВП використовується вейвлет Хаара як альтернатива вейвлету Добеші [10], який призначений для зменшення обчислювальної складності методу.

У [14] розширено загальну схему цього підходу для підвищення контрасту вихідного зображення. Автори методу пропонують сумісне використання ДВП та сингулярного розкладу після виконання основної процедури. Отримане зображення підвищеної РЗ згідно з методом вирівнюється гістограмним методом і знову розбивається на 4 підзображення з використанням ДВП. Обробці на основі сингулярного розкладу підлягає лише низькочастотне підзображення, після чого виконується зворотне ДВП. Перевагою цього методу є те, що зміна сингулярних значень безпосередньо впливатиме на контраст зображення. Отож, інша інформація зображення не буде змінена. З іншого боку, посилення контрасту в низькочастотному підзображенні зберігатиме інформацію про контури у високочастотних підзображеннях.

Основними перевагами методів частотної області є їх інтуїтивна зрозумілість, теоретична простота, низька обчислювальна складність та можливість паралельної реалізації. Однак, ці методи застосовуються лише при глобальному русі на зображенні. Основним недоліком методів цього класу є те, що побудова системи рівнянь вимагає знання точного субпіксельного руху між кадрами. Кожне зображення тут повинно описуватися рівнянням, що встановлює обмеження на міжкадровий рух. Проте через відсутність кореляції даних у частотній області важко застосовувати апріорні знання, які можуть бути використані при формуванні обмежень чи регуляризації некоректної задачі, зокрема надвисокої РЗ у частотній області.

У класі методів просторової області спочатку формується модель спостереження, а потім відбувається процес реконструкції зображення. Перевагами цих методів реконструкції є те, що лінійна модель спостереження у просторовій області може містити неідеальні зразки, оптичний шум, артефакти стиснення та багато іншого. Просторова реконструкція дозволяє включення апріорних обмежень просторової області, які призводять до екстраполяційних обмежень при вирішенні завдання реконструкції. Це є важливою умовою, оскільки більшість алгоритмів надвисокої РЗ (збільшення у 16 і більше разів) подаються у формі обернених задач, які, як відомо, є некоректними і слабо формалізованими. Саме апріорні обмеження використовують для формулювання умов щодо перетворення некоректної задачі на коректну.

Ідея методів групи ітеративного зворотного проектування – ітеративне коректування похибки реконструкції зображення. Застосування подібних методів може супроводжуватися появою ефектів дзвону та ступінчастості (сходинковий ефект). Це пояснюється використанням ізотропного ядра

розмиття, оскільки інформація про краї об'єктів на зображенні ігнорується протягом усієї процедури. Тут існує проблема однозначності розв'язку.

Методи [15] на основі теорії проєкцій на опуклі множини характеризуються складністю процедури визначення проєкцій та не забезпечують єдиності розв'язку. Імовірнісні методи [16] розглядають задачу збільшення РЗ зображення як обернену (методи, що ґрунтуються на принципі максимуму апостеріорної інформації та на основі критерію максимальної правдоподібності). У таких випадках на вихідному зображенні високої РЗ можуть проявлятися такі артефакти, як аліасінг, ефект Гібса, зашумлення тощо, що негативно впливає на візуальну інформативність зображень. Окрім цього вони також не забезпечують єдиності розв'язку поставленої задачі.

### Постановка задачі

У [18] нами розроблено метод зміни роздільної здатності у випадку одного вхідного зображення на основі алгебраїчних характеристик. Головним завданням, яке розглядається у цій роботі, є розроблення методу збільшення роздільної здатності для випадку двох вхідних зображень із флуктуаціями функції шляхом сумісного використання матричного оператора дивергенцій та операції кросингвера. Метод повинен забезпечувати уникнення деяких інтерполяційних артефактів та розмитості контурів, що характерні для інтерполяційних підходів.

### Метод збільшення роздільної здатності у випадку двох вхідних зображень

#### 1. Попередня обробка вхідних зображень

Вхідними даними розробленого методу є два зображення однакової роздільної здатності:

$$I_1 = [c_{1i,j}]_{i=1..h}^{j=1..l} \text{ та } I_2 = [c_{2i,j}]_{i=1..h}^{j=1..l}, \quad (1)$$

де  $c_{i,j}$  – значення функції інтенсивності пікселя з координатами  $(i, j)$ .

Запропонований метод потребує попередньої обробки пари вхідних зображень, яка визначається виконанням такими кроками:

1. Нормалізація вхідних зображень  $I_1$  та  $I_2$  згідно з такими виразами:

$$c_{i,j} = c_{i,j} + \frac{1}{2} \left( \max_{\substack{i \in [1;h]; \\ j \in [1;l]}} c_{i,j} + \min_{\substack{i \in [1;h]; \\ j \in [1;l]}} c_{i,j} \right), \quad (2)$$

$$c_{i,j} = Kc_{i,j}, \quad (3)$$

де  $K = \left( \max_{\substack{i \in [1;h]; \\ j \in [1;l]}} c_{i,j} \right)^{-1}$ . У результаті цього отримаємо:  $\forall i \in [1;h], j \in [1;l]: c_{i,j} > 0$ .

2. Побудова нового вектора  $\%_i$  з відповідних рядків (стовпців) нормалізованих вхідних зображень із застосуванням операції кросингверу:

$$\%_i = kc_{1i} + (1-k)c_{2i}, \quad (4)$$

де  $k$  – коефіцієнт операції кросингверу;  $c_{1i}$ ,  $c_{2i}$  – вектори розмірності  $l$ , елементи яких є рядками матриць  $I_1$  та  $I_2$  відповідно.

У результаті цього отримуємо нову матрицю:

$$\% = [\%_i]_{i=1..h} = [\%_{i,j}]_{i=1..h}^{j=1..l}, \quad (5)$$

У випадку збільшення в горизонтальному напрямку матриця  $\%$  матиме вигляд:

$$\% = [\%_j]_{j=1..l}; \quad (6)$$

де  $\%_j$  вектори побудовані згідно з (5) для відповідних стовпців вхідних нормалізованих зображень  $I_1$  та  $I_2$  відповідно.

## 2. Побудова матричного оператора дивергенцій

Матричний оператор дивергенцій  $\nabla_i$ , що покладено в основу роботи методу зміни роздільної здатності у випадку двох вхідних зображень, будується так:

$$\forall i \in [1; h]: \nabla_i = A_i - \begin{bmatrix} \%_{i,1} & & \%_{i,l} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ & & & & \end{bmatrix}^T, \quad (7)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \%_{i,1} & \dots & \%_{i,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \%_{i,l} & \dots & \%_{i,l} \end{pmatrix}; \quad \%_{i,j} = \frac{1}{l-1} \left( \sum_{x=1}^l (\%_{i,x} - \%_{i,j}) \right), \quad (8)$$

або у вигляді:

$$\forall i \in [1; h]: \nabla_i = [\delta_{m,n}]_{m,n=1,\bar{l}}, \quad (9)$$

де  $\delta_{m,n} = \%_{i,m} - \%_{i,n}$ ,  $m, n \in [1; l]$ .  $\dim A_i = l \times l$ .

При застосуванні процедури зміни роздільної здатності щодо рядків матриці зображення  $\%$  оператор дивергенцій, визначений за (7)–(9), матиме вигляд:

$$\forall j \in [1; l]: \nabla_j = \begin{bmatrix} \%_{j,1} & & \%_{j,h} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ & & & & \end{bmatrix}^T - A_j, \quad (10)$$

$$A_j = \begin{pmatrix} \%_{j,1} & \dots & \%_{j,h} \\ \dots & \dots & \dots \\ \%_{j,h} & \dots & \%_{j,h} \end{pmatrix}; \quad \%_{j,i} = \frac{1}{h-1} \left( \sum_{x=1}^h (\%_{x,j} - \%_{i,j}) \right); \quad \dim A_j = h \times h; \quad (11)$$

$$\forall j \in [1; l]: \nabla_j = [\delta_{m,n}]_{m,n=1,\bar{h}} | \delta_{m,n} = \%_{j,m} - \%_{j,n} ]_{m,n=1,\bar{h}}. \quad (12)$$

## 3. Визначення векторів-ознак на основі псевдообертання Мура–Пенроуза матриці дивергенцій

Наступним кроком розробленого методу є пошук векторів-ознак, що будуть характеристиками кожного рядка (стовпця) зображення  $I$ . Для цього, як і у попередній нашій роботі [18], використовуємо такі міркування.

Розглянемо побудову характеристичних векторів (векторів-ознак) у напрямку  $i$ . Для вирішення завдання побудови векторів ознак  $y_i$  розглянемо рівняння [18]:

$$\nabla_i y_i = c_i, \quad (13)$$

де  $y_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,l})$  –  $l$ -вимірний вектор характеристичних значень зображення  $I$  для  $i$ -го рядка. Це означає, що вектор ознак  $y_i$  будується для кожного рядка  $i$ . При передискретизації у напрямку  $j$  для кожного  $j$ -го стовпця буде будуватись вектор  $y_j$ .

Рівняння (13) утворює лінійну алгебраїчну систему з  $l$  рівнянь, і формальне знаходження вектора  $y_i$  є таким:  $y_i = \nabla_i^{-1} c_i$ , де  $\nabla_i^{-1}$  – квадратна  $l \times l$  матриця, яка є оберненою до матриці  $\nabla_i$ . Оскільки матриця  $\nabla_i$  є виродженою ( $\det(\nabla_i) = 0$ ), то оберненої матриці  $\nabla_i^{-1}$  не існує і формально розв'язок  $y_i$  може бути знайдений лише у наближеній формі.

Одним із найпростіших і ефективних способів знаходження вектора ознак  $y_i$   $i$ -го рядка є його наближення нев'язкою  $\|c_i - \nabla_i y_i\|^2$  у схемі розв'язку лінійної системи Мура–Пенроуза [17]. За цією схемою вектор ознак  $y_i$  визначають як суму наближеного (часткового) розв'язку невиродженої системи і розв'язку однорідної системи  $\nabla_i y_i = 0$ :

$$y_i = \nabla_i^+ c_i + (1 - \nabla_i^+ \nabla_i) \|c_i - \nabla_i y_i^j\|_l^2, \quad (14)$$

де  $\nabla_i^+$  – псевдообернена за [17] до  $\nabla_i$  матриця Мура–Пенроуза [121];  $(1 - \nabla_i^+ \nabla_i)$  – ядерний проективний оператор; нев'язка  $\|c_i - \nabla_i y_i\|^2$  є вектором розмірності  $l$ , який визначає наближення розв'язку  $y_i$ ;  $\|\cdot\|_l$  –  $l$ -норма.

Згідно з [47] матриця  $\nabla_i^+ \nabla_i$  є невідродженою, що забезпечує існування та єдиність розв'язку лінійної системи  $\nabla_i y_i = 0$ . Згідно з [17, 18], використовуючи сингулярний розклад (SVD) матричного оператора  $\nabla_i$ , псевдообернена матриця  $\nabla_i^+$  визначається як:  $\nabla_i^+ = V_i \Sigma_i^+ U_i^T$ . Тут  $U_i, V_i$  – квадратні  $l \times l$  матриці SVD-розкладу оператора  $\nabla_i$ ;  $\Sigma_i^+$  – квадратна  $l \times l$  матриця, яка є псевдооберненою до діагональної матриці  $\Sigma_i$  SVD-розкладу матриці  $\nabla_i$  і отримується за [18] так:

$$\Sigma_i^+ = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sigma_{i,1}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{i,l}} \right\}, \quad (15)$$

де  $\sigma_{i,q}$  ( $\sigma_{i,1} \geq \sigma_{i,2} \geq \dots \geq \sigma_{i,l} \geq 0$ ) – сингулярні ненульові числа матриці  $\Sigma_i$ .

Знаходження розв'язку за (15) є ітеративним процесом розв'язання задачі мінімізації нев'язки:

$$\min_j (\|c_i - \nabla_i y_i^j\|_l^2), \quad (16)$$

де  $j$  – індекс, який визначає крок ітеративного процесу розв'язування задачі (14).

На однорідних областях оператор (9) є виродженими. Тому розв'язок задачі (14) шукаємо за (15).

#### 4. Алгоритмічна реалізація методу передискретизації зображень

Розв'язок задачі (14) з оператором задачі (9) або (12) використовується для вирішення завдання підвищення роздільної здатності зображення у випадку використання операції кросингверу. Оскільки вхідними у цьому випадку є два зображення  $I_1$  та  $I_2$ , то існує принаймні три розв'язки задачі передискретизації. Перші два з них подібно до [18] полягають у побудові розширених зображень додаванням до початкової матриці  $I_1$  або  $I_2$  вектора  $c_i + y_i$  у позицію рядка (чи стовпця). Тут  $c_i$  – значення функції інтенсивності вхідного зображення (тобто оригінальні, а не нормалізовані за (2) і (3) значення). Третій розв'язок полягає у синтезі рядків і стовпців розширеної матриці, яка для випадку збільшення удвічі, матиме вигляд:

$$I^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{c_{1,1,1} + c_{2,1,1}}{2} & \frac{c_{1,1,1} + c_{2,1,1}}{2} + y'_{1,1} & \dots & \frac{c_{1,1,l} + c_{2,1,l}}{2} + y'_{1,1} \\ \frac{c_{1,1,1} + c_{2,1,1}}{2} + y_{1,1} & \frac{c_{1,1,1} + c_{2,1,1}}{2} + y_{1,1} + y'_{1,2} & \dots & \frac{c_{1,1,l} + c_{2,1,l}}{2} + y_{2,l} + y'_{1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{c_{1,h,1} + c_{2,h,1}}{2} & \frac{c_{1,h,1} + c_{2,h,1}}{2} + y'_{1,2h-1} & \dots & \frac{c_{1,h,l} + c_{2,h,l}}{2} + y'_{1,2h-1} \\ \frac{c_{1,h,1} + c_{2,h,1}}{2} + y_{h,1} & \frac{c_{1,h,1} + c_{2,h,1}}{2} + y_{h,1} + y'_{1,2h} & \dots & \frac{c_{1,h,l} + c_{2,h,l}}{2} + y_{h,l} + y'_{1,2h} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

Процедура збільшення РЗ, подібно до процедури описаної у [18], складається із двох послідовних частин, за якими передискретизація зображення здійснюється у вертикальному та горизонтальному напрямках відповідно. Впорядкованість виконання дії кожної частини алгоритму може бути довільною.

**Алгоритм розв'язання задачі збільшення роздільної здатності зображень** передбачає виконання таких кроків:

- 1) побудова мутованого вхідного вектора з відповідних векторів двох вхідних зображень на основі (4);
- 2) побудова матричного оператора дивергенцій (9) або (12);
- 3) обчислення характеристичних векторів  $y_i$  квадратних матриць, побудованих за співвідношеннями (9) або (12), за ітераційною процедурою (14);
- 4) побудова розширеного зображення додаванням до початкової матриці  $I_1$  чи  $I_2$  характеристичних векторів подібно до [18] або синтез збільшеного зображення за (17).

Зазначені перші три частини послідовно застосовують до усіх рядків матриці  $I$  для збільшення розмірів заданого зображення за висотою. Лише тоді матриці збільшених зображень  $I_1^{(m)}$ ,  $I_2^{(m)}$  чи  $I^{(m)}$  будуються за (17) чи подібно до [18].

Надалі процедура збільшення виконується над збільшеними зображеннями  $I_1^{(2)}$ ,  $I_2^{(2)}$  чи  $I^{(2)}$  доти, доки змінна  $m$  не досягне цілового значення коефіцієнта збільшення.

**Алгоритм розв'язання задачі зменшення роздільної здатності зображень** передбачає виконання таких кроків:

- 1) побудова мутованого вхідного вектора з відповідних векторів двох вхідних зображень на основі (4);
- 2) побудова матричного оператора дивергенцій (9) або (12);
- 3) обчислення характеристичних векторів  $y_i$  квадратних матриць, побудованих за співвідношеннями (9 чи 12), за ітераційною процедурою (14);
- 4) синтез зображення зменшеної РЗ.

Зазначені перші три частини послідовно застосовують до усіх рядків матриць  $I_1$  та  $I_2$  для зменшення розмірів заданого зображення по висоті. Тоді при вхідних матрицях  $I_1$  та  $I_2$  синтезуємо матрицю зменшеного удвічі зображення заміною двох послідовних рядків  $c_i$  і  $c_{i+1}$  матриці  $I_1$  або  $I_2$  вектором  $c_i + 0.5(y_i + y_{i+1})$ . Третій розв'язок синтезу зменшеного удвічі за напрямом  $i$  зображення ілюструє вираз:

$$I^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 (c_{j,1,1} + y_{j,1,1}) & \dots & \sum_{j=1}^2 (c_{j,1,l} + y_{j,1,l}) \\ \sum_{j=1}^2 (c_{j,3,1} + y_{j,3,1}) & \dots & \sum_{j=1}^2 (c_{j,3,l} + y_{j,3,l}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^2 (c_{j,h,1} + y_{j,h,1}) & \dots & \sum_{j=1}^2 (c_{j,h,l} + y_{j,h,l}) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Розмірність матриці  $I^{(\frac{1}{2})}$  буде такою:  $\dim I^{(\frac{1}{2})} = (h\%2) \times l$ .

Надалі процедуру зменшення виконують над зменшеними зображеннями  $I_1^{(0.5)}$ ,  $I_2^{(0.5)}$  чи  $I^{(0.5)}$  доти, доки змінна  $m$  не досягне необхідного коефіцієнта зменшення.

### Аналіз результатів практичних експериментів

Описаний метод програмно реалізовано в середовищі Matlab. Використовуючи цю реалізацію, проведено ряд практичних експериментів щодо ефективності розробленого методу збільшення роздільної здатності зображень з використанням матричного оператора дивергенцій.

Для проведення експериментів використовували два вхідні зображення різної якості, які наведено на рис. 2. Слід зазначити, що друге зображення (рис. 2, б) сильно зашумлене. Це практично найгірший випадок вхідних даних у задачі передискретизації на основі двох зображень.



Рис. 2. Фрагменти вхідних зображень: а – фрагмент  $I_1$ ; б – фрагмент  $I_2$

Обидва вхідні зображення мають однакові характеристики: тип – 2-байтовий, напівтоновий (grayscale), розмірність – 231×199 пікселів. Значення коефіцієнта кросинговеру, яке використовували для роботи методу, визначали емпірично лише на одному кроці ітераційної процедури збільшення ( $k = 0.7$ ) і використовували в усіх наступних аж до досягнення цільового коефіцієнта збільшення. На рис. 3 наведено фрагменти збільшених у 16 разів зображень.

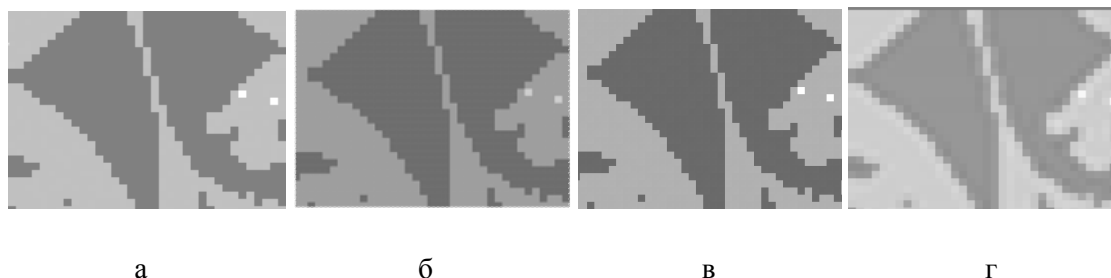


Рис. 3. Фрагменти збільшених в 16 разів зображень:

*а* – фрагмент збільшеного еталонного зображення; *б* – фрагмент збільшеного зображення  $I_1^{(m)}$ ; *в* – фрагмент збільшеного зображення  $I^{(m)}$  за методом синтезу (17); *г* – фрагмент збільшеного зображення  $I_2^{(m)}$

Вже візуальне порівняння цих фрагментів дає змогу стверджувати, що синтез передискретизованих зображень за формулою (17) демонструє якнайкращі результати збільшення. Проте варто зазначити незначне падіння контрасту на збільшеному зображенні  $I^{(m)}$  (рис. 3, в). Цей недолік зумовлений накопиченням похибки матрицею дивергенцій у процесі передискретизації. Проте він не дуже суттєвий, оскільки таке падіння контрасту нівелюється найпростішими фільтрами.

На збільшеному зображенні  $I_1^{(m)}$  в процедурі передискретизації при коефіцієнті  $m = 16$  вже починають проявлятися ефекти пікселізації, а рівень зашумленості вхідного зображення  $I_2$  суттєво зріс на збільшеному зображенні  $I_2^{(m)}$ . На рис. 4 та 5 наведено залежності PSNR та  $|\text{grad}(\text{PSNR})|$  для різних зображень  $I_1^{(m)}$ ,  $I_2^{(m)}$  та  $I^{(m)}$ .

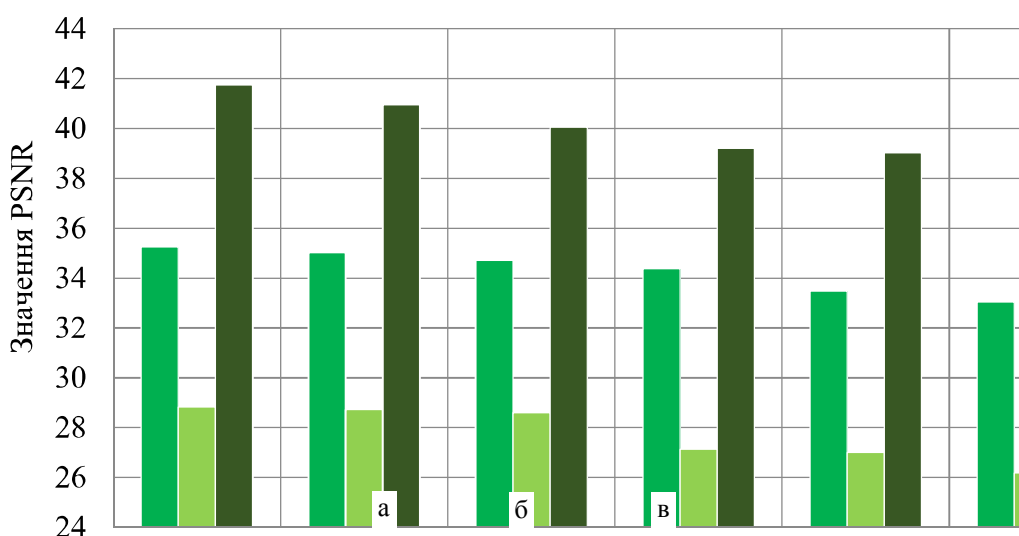


Рис. 4. Залежності значень PSNR від коефіцієнта збільшення для отриманих зображень підвищеної роздільної здатності: а)  $I_1^{(m)}$ , б)  $I_2^{(m)}$  та в)  $I^{(m)}$



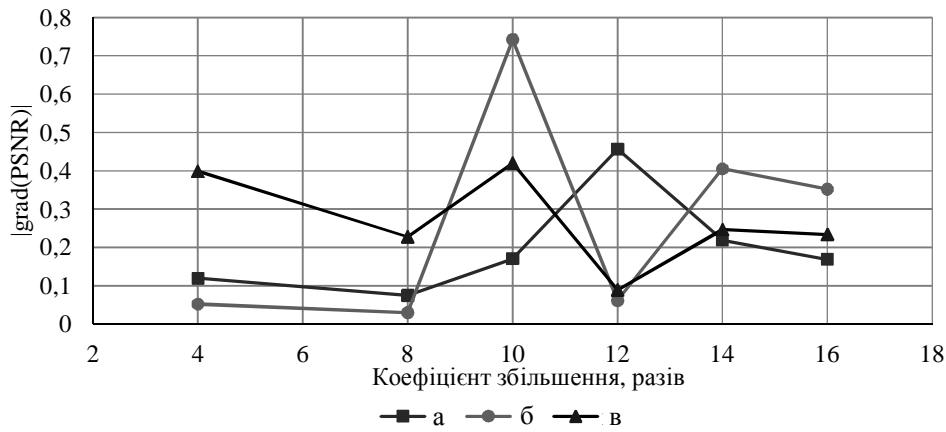


Рис. 5. Залежності значень модуля градієнта PSNR від коефіцієнта збільшення для зображень підвищеної роздільної здатності: а –  $I_1^{(m)}$ , б –  $I_2^{(m)}$  та в –  $I^{(m)}$

Наведені залежності підтверджують ефект існування трьох проміжків на інтервалі збільшення. Характеристики цих інтервалів дозволяють стверджувати таке:

- 1) границі інтервалів не збігаються, що підтверджує загальний, а не кількісний характер існування цих інтервалів;
- 2) найбільші стрибки градієнта PSNR спостерігається на зашумлених вхідних зображеннях;
- 3) найбільш гладким градієнт PSNR є у випадку синтезу зображень за формулою (17);
- 4) у випадку синтезу зображення за (17) значення PSNR є також найбільшими, що підтверджує найвищу якість отриманого зображення та ефективність методу. Найнижчою є якість передискретизації зі зростанням коефіцієнта збільшення у випадку зашумленого вхідного зображення ( $I_2$ ).

Порівняння результатів (рис. 6) роботи розробленого методу здійснювалося із результатами за існуючим методом збільшення роздільної здатності [18] – передискретизації у випадку одного зображення засобом псевдообертання відносних симетричних мір конвергенції.

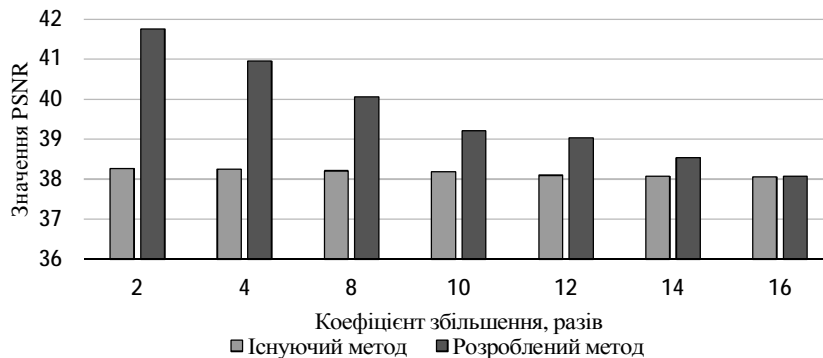


Рис. 6. Порівняння результатів передискретизації зображень при зміні коефіцієнта збільшення за розробленим методом з результатами за існуючим

Зазначимо, що за значенням PSNR передискретизація за розробленим методом демонструє значно вищі результати ніж передискретизація за описаним у [18].

### Висновок

У роботі описано розроблений метод передискретизації у випадку двох вхідних зображень на основі псевдообертання виродженого матричного оператора дивергенцій. Процедура передбачає побудову виродженого квадратного матричного оператора дивергенцій, пошук векторів-ознак на основі псевдообертання Мура–Пенроуза і синтез нового передискретизованого зображення. Сам

синтез може відбуватися декількома способами. Основні два з них – це додавання синтезованого вектора значень функції інтенсивності в одне із вхідних зображень або синтез нового зображення з використанням отриманих векторів-ознак та відповідних рядків/стовпців із вхідних зображень. Експериментально встановлено, що другий спосіб показує найкращі результати. Порівняння результатів роботи з існуючим методом показує, що розроблений метод забезпечує вищу якість передискретизації за критерієм на основі PSNR і зменшує такі артефакти передискретизації, як “сходінковий ефект” та зашумлення вихідного зображення.

1. Пелешко Д. Д. Аналіз основних методів збільшення роздільної здатності зображень на основі технології *super resolution* / Д. Д. Пелешко, І. В. Ізонін, Ю. М. Пелех // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова / Нац. акад. наук України, Ін-т пробл. моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова. – Київ: [б. в.], 2013. – Вип. 67. – С. 162–169.
2. Demirel H. Image resolution enhancement by using discrete and stationary wavelet decomposition / H. Demirel, G. Anbarjafari // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2011. – Vol. 20, № 5. – P. 1458–1460.
3. Gerchberg R. W. Super-resolution through error energy reduction / R. W. Gerchberg // *Journal of Modern Optics*. – 1974. – Vol. 21, № 9. – P. 709–720.
4. Santis P. D. On an iterative method for super-resolution / P. D. Santis, F. Gori // *Journal of Modern Optics*. – 1975. – Vol. 22, № 8. – P. 691–695.
5. Walsh D. O. Direct method for superresolution / D. O. Walsh, P. A. Nielsen–Delaney // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1994. – Vol. 11, № 2. – P. 572–579.
6. Tsai R. Multiframe image restoration and registration / R. Y. Tsai, T. S. Huang // *Advances in Computer Vision and Image Processing*. – 1984. – Vol. 1, № 2. – P. 317–339.
7. Kim S. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy under-sampled multiframe / S. Kim, N. Bose, and H. M. Valenzuela // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*. – 1990. – Vol. 38, № 6. – P. 1013–1027.
8. Demirel H. Image resolution enhancement by using discrete and stationary wavelet decomposition / H. Demirel, G. Anbarjafari // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2011. – Vol. 20, № 5. – P. 1458–1460.
9. Santis P. D. On an iterative method for super-resolution / P. D. Santis, F. Gori // *Journal of Modern Optics*. – 1975. – Vol. 22, № 8. – P. 691–695.
10. Глушков О. В. Застосування вейвлет-розкладання для аналізу запасів вихрової кінетичної енергії, процесів тепло- масо- енерго-переносу в атмосфері / О. В. Глушков, В. М. Хохлов, І. А. Цененко // *Фізика аеродисперсних систем*. – 2013. – Вип. 40. – С. 215–225.
11. Garg Akanksha Wavelet Based Resolution Enhancement for Low Resolution Satellite Images / Akanksha Garg, Sashi Vardhan Naidu, Hussein Yahia, Darmendra Singh // *Industrial and Information Systems: proc. of 9-th intern. conf., Gwalior, 15–17 Dec. 2014*. – 2014. – P. 76 – 81.
12. Han Young Su. Wavelet Transform based Image Interpolation for Remote Sensing Image / Su Young Han, Nam Hun Park, Kil Hong Joo // *International Journal of Software Engineering and Its Applications*. – 2015. – Vol. 9, № 2. – P. 59–66.
13. Karunakar P. Discrete Wavelet Transform–Based Satellite Image Resolution Enhancement / P. Karunakar, V. Praveen, O. Ravi Kumar // *Advance in Electronic and Electric Engineering*. – 2013. – Vol. 3, № 4. – P. 405–412.
14. Khairnar P. Prajakta. Image resolution and contrast enhancement of satellite geographical images with removal of noise using wavelet transforms / Prajakta P. Khairnar, C. A. Manjare // *International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT)*. – 2014. – Vol. 10, № 12. – P. 1–5.
15. Гурии Л. Г. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств / Л. Г. Гурии, Б. Г. Поляк, Э. В. Райк // *Журнал выч. мат. и мат. физики* – 1967. – Вип. 7, №.6. – С.1211–1228.
16. Patel Shreyaskumar A. A survey on single image superresolution / A. Patel Shreyaskumar // *International Journal of Computer Science and Information Technology & Security (IJCSITS)*. – 2012. – Vol. 2, № 6. – P. 1136–1143.
17. Penrouse R. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51, 406–413 (1955).
18. Рашкевич Ю. М. Зміна роздільної здатності зображення засобом псевдообертання виродженого матричного оператора відносних симетричних мір конвергенції / Ю. М. Рашкевич, І. В. Ізонін, Д. Д. Пелешко, І. О. Малець // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”*. – 2015. – № 826: Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – С. 259–266.