

температурних та деформаційних параметрів під час різання металів // Український міжвідомчий науково-технічний збірник “Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні”. – Львів, 2012. – №46. – С. 145–152. 8. Сычев В. В. Дифференциальные уравнения термодинамики. – М.: Высш. шк., 1991. – 224 с. 9. Шредингер Э. Статистическая термодинамика. – Ижевск: Изд-во РХД, 1999. – 96 с. 10. Яцерицын П.И. Теория резания / П.И. Яцерицын, Е.Э. Фельдштейн, М.А. Корниевич. – Минск: Новое знание, 2006. – 512 с.

УДК 621.9

А.Е. Воронов

Східноукраїнський національний університет ім. В. Даля,  
кафедра технології машинобудування та інженерного консалтингу

## АНАЛІЗ СПОТВОРЕННЯ ПРОФІЛЮ ЗУБЦЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО ЗУБЧАСТОГО КОЛЕСА ГІПЕРБОЛОЇДНИМ ШЛІФУВАЛЬНИМ КРУГОМ ЗАСОБАМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

© Воронов А.Е., 2013

На основі математичної моделі, яка описує процес зачеплення циліндричного зубчастого колеса і гіперboloїдного шліфувального круга, отримано комп'ютерну модель для моделювання цього процесу. Модель дала змогу дослідити спотворення профілю зубця циліндричного зубчастого колеса під час застосування гіперboloїдного і циліндричного шліфувальних кругів. Наочно показані місця, схильні до найбільших спотворень і відхилення форми профілю зубця циліндричного зубчастого колеса за зміни окремих параметрів інструмента.

On the basis of a mathematical model which is describe the process of engaging the spur gear and the wheel hyperboloid a computer model to simulate the process obtained. The model allowed investigate the profile distortion of the tooth spur gear in the application of hyperboloid and cylindrical grinding wheels. It has been amply demonstrated the places most affected by distortions and the change of tool with changing some of its parameters.

**Постановка проблеми.** Високий рівень науково-технічного розвитку збільшує темпи освоєння на практиці нових машин і механізмів. В основу більшості частин машин, що рухаються, покладено принцип зубчастого зачеплення. Причому зубчасте зачеплення проявляється не тільки у час використання готових деталей, але й у процесі їх виготовлення чи виправлення. Так, під час вивчення принципів формоутворення циліндричних зубчастих коліс, особливо можна виділити інструменти, що мають гвинтові поверхні, які уможливають прискорити процес одержання деталі й підвищити його точність. Питання точності виготовлення особливо актуальне на етапах фінішної обробки виробу. Зміна форми інструмента здатна підвищити точність або швидкість оброблення зі збереженням прийнятої точності. Так, розглядаючи процес шліфування циліндричних зубчастих коліс, застосування гіперboloїдних поверхонь [1] дає змогу підвищити продуктивність порівняно із циліндричними черв'ячними шліфувальними кругами [2]. Аналіз зміни точності доцільно проводити, застосовуючи сучасні інструменти. Сьогодні рівень розвитку комп'ютерної техніки та програмних пакетів оброблення інформації уможлиблює прискорити процес аналізу та скоротити об'єм матеріалу й необхідного часу на виготовлення дослідних зразків та оснащення. Оскільки кожне завдання свого роду унікальне і моделювання гіперboloїдних

гвинтових поверхонь не розглядається під час написання популярних програмних пакетів, стає актуальним розроблення алгоритмів, здатних показати результати застосування зміненої форми інструмента для аналізу його переваг, недоліків та можливості застосування.

**Аналіз останніх досліджень.** Питаннями підвищення якості та продуктивності оброблення зубчастих коліс цікавилися Новиков Ф. В., Литвин Ф. Л., Батьківщин П. Р., Вітренко В. О., Грибанов В. М. та ін. Підходячи до виконання цих завдань, були застосовані методи диференціальної геометрії та матричного обчислення. Однак через недостатність обчислювальної потужності комп'ютерної техніки під час вивчення питань, не був проведений аналіз за допомогою моделювання, який уможливило у будь-який момент часу вивчити реальні положення заготовки та інструмента, а також сил, що виникають між ними.

**Формулювання мети.** Мета роботи – дослідити процес зачеплення гіперболоїдного шліфувального круга із циліндричним зубчастим колесом і оцінити спотворення профілю зубця останнього за результатами комп'ютерного моделювання.

**Основна частина.** У цій роботі розглядається процес одержання комп'ютерних моделей шліфувальних кругів на прикладі гіперболоїдного шліфувального круга та вивчення величини спотворення профілю зубця циліндричного зубчастого колеса, що обробляється таким інструментом.

Для процесу моделювання необхідне математичне уявлення циліндричного зубчастого колеса та гіперболоїдного шліфувального круга. Математичне уявлення циліндричного зубчастого колеса можливе, якщо описати рівнянням евольвенти поверхню, яка формує його зубець, та місце цієї евольвенти у просторі. Поєднаємо отриману просторову криву з деякою системою координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ . Нехай у просторі розташований гіперболоїдний шліфувальний круг, пов'язаний із системою координат  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ . Ці системи координат можуть бути математично погоджені між собою застосуванням методів диференціальної геометрії та матричного обчислення [3], пов'язуючи один із ступенів свободи завдяки рівнянню безперервності верстатного зачеплення.

Аналітичний вираз форми та положення гіперболоїдного шліфувального круга залежно від форми положення циліндричного зубчастого колеса можна подати у вигляді системи чотирьох рівнянь [4]:

$$\begin{cases} x_2 = z_1 \cos \phi_2 \sin \gamma + S_1 \cos \phi_2 \cos \gamma + y_1 (-\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \gamma - \cos \phi_1 \sin \phi_2) + \\ \quad + x_1 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \gamma - \sin \phi_1 \sin \phi_2) - A \sin \phi_2, \\ y_2 = z_1 \sin \phi_2 \sin \gamma + S_1 \sin \phi_2 \cos \gamma + y_1 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \gamma) + \\ \quad + x_1 (\cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \gamma + \sin \phi_1 \cos \phi_2) + A \cos \phi_2, \\ z_2 = -S_1 \sin \gamma + \sin \phi_1 y_1 \sin \gamma - \cos \phi_1 x_1 \sin \gamma + z_1 \cos \gamma + 1, \\ y_1' (u_{21} z_1 \sin \phi_1 \sin \gamma + u_{21} S_1 \sin \phi_1 \cos \gamma + y_1 (u_{21} \cos \gamma - 1) - u_{21} A \cos \phi_1 \cos \gamma) - \\ - x_1' (u_{21} z_1 \cos \phi_1 \sin \gamma + u_{21} S_1 \cos \phi_1 \cos \gamma + x_1 (1 - u_{21} \cos \gamma) + u_{21} A \sin \phi_1 \cos \gamma) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

У системі (1) три перші рівняння описують перехід від системи  $S_1$  до системи  $S_2$  у координатній формі. Четверте рівняння системи є наслідком безперервності верстатного зачеплення. Система рівнянь (1) отримана за допомогою математичного пакета Maxima [4, 5], після введення послідовності елементарних перетворень системи координат і необхідної інформації про профіль вихідного циліндричного зубчастого колеса, а також складових частин рівняння безперервності верстатного зачеплення.

Складеної системи рівнянь не достатньо для аналізу поведінки гіперболоїдного шліфувального круга, оскільки неможливо у явній формі визначити крапку і її положення на гвинтовій гіперболоїдній поверхні, яка відповідатиме певній крапці циліндричного зубчастого

колеса. Для аналізу необхідно одержати всі крапки гіперболоїдної поверхні або певної частини поверхні, що є першим етапом моделювання. Оброблення такого місткого масиву даних можливе тільки під час застосування високорівневих мов комп'ютерного програмування. Як таку мову вибрано компільовану, що підтримує об'єктно-орієнтоване програмування, мову C++ [4, 6]. Оболонкою для реалізації програмного коду вибрана Eclipse SDK — вільне інтегроване середовище розробки модульних крос-платформних додатків, яке розвивається та підтримується Eclipse Foundation [4, 7].

У результаті використання розробленої програми отримано базу даних крапок поверхні гіперболоїдного колеса та графічний інструмент, що дає змогу аналізувати процес зачеплення зубчастих коліс (рис. 1).

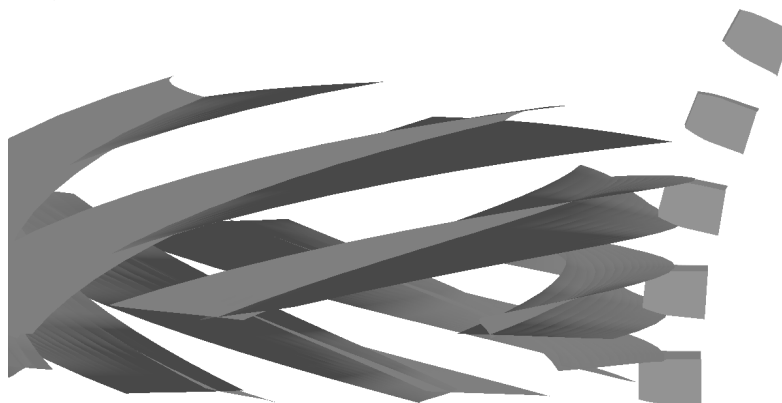


Рис. 1. OpenGL промальовка в Eclipse SDK зачеплення гіперболоїдного шліфувального круга й циліндричного зубчастого колеса

У підґрунті гіперболоїдної поверхні лежить прямолінійна утворювальна, уздовж якої відбувається повне повторення профілю зубця циліндричного зубчастого колеса будь-якого діаметра. Для наочності розглядатимемо зубчасту рейку – циліндричне зубчасте колесо нескінченно великого діаметра. Розглянемо результати моделювання за системою рівнянь (1). Для цього побудуємо кілька моделей гіперболоїдного шліфувального круга, що мають кут схрещування осей  $\gamma = 95^\circ$  і  $Z_2 = \{5, 3, 1\}$  заходів черв'яка (рис. 2).

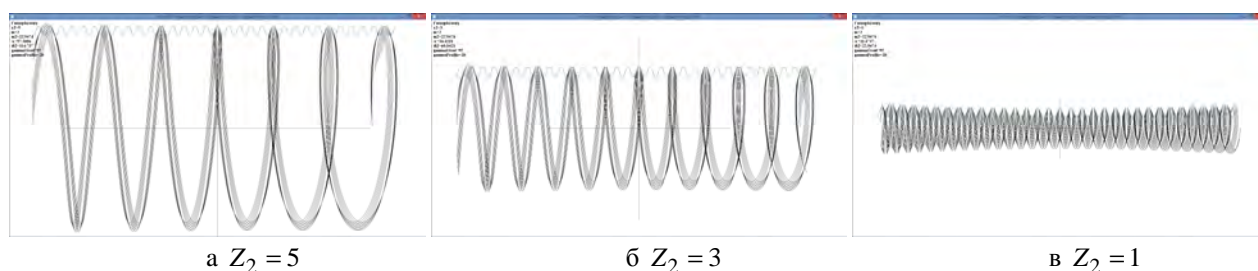


Рис. 2. Моделі гіперболоїдного шліфувального круга за фіксованого кута схрещування осей і кількостей заходів  $Z_2$

На рис. 2 зображений тільки один захід з можливих  $Z_2$  кількостей заходів для спрощення візуального сприйняття, тому, починаючи на нульовій висоті й роблячи один повний оберт, гіперболоїдна спіраль потрапляє в  $Z_2$  зубець зубчастої рейки. Другий та інші заходи гіперболоїдної моделі для багатозахідного черв'яка утворюються поворотом промальованої моделі на кут  $\alpha_2^{i-\text{го захода}} = 360^\circ \cdot i / Z_2$ , де  $i$  – номер заходу, що змінюється від 2 до  $Z_2$ . Для усіх трьох варіантів, зображених на рис. 2, кут схрещування осей  $\gamma$  заданий однаковим, а отже, і кут підйому витка зберігається. Як наслідок, за незмінного значення кута підйому витка зі зменшення кількості

заходів гіперболоїдного черв'яка  $Z_2$  відбувається зменшення значення ділильного діаметра гіперболоїдного інструмента у горловому перетині  $d_2^i$ .

Другий варіант побудови моделі гіперболоїдного колеса – використання як фіксованого вхідного параметра ділильного діаметра гіперболоїдного інструмента в горловому перетині  $d_2^i$  та зміни значення кута схрещування осей  $\gamma$  (рис. 3). Оскільки діаметри гіперболоїдних моделей у горловому перетині задаються однаковими, то зі збільшенням кількості заходів черв'яка зростає кут схрещування осей  $\gamma$ , а отже, зростає і кут підйому витка  $\gamma^{\text{витка}}$ .

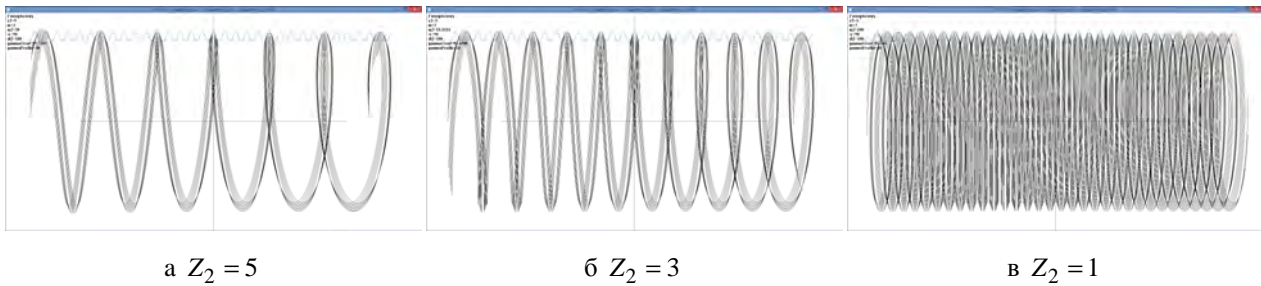


Рис. 3. Моделі гіперболоїдного шліфувального круга для діаметра в горловому перетині  $d_2^i = 100$  мм та кількості заходів  $Z_2$

Реальне зубчасте колесо має товщину, відмінну від товщини, утворюваної гіперболоїдним шліфувальним кругом, звідси впливає завдання вивчення спотворень профілю зубця, які при цьому виникають. Для цього модель доповнюється крапками контакту у суміжних моментах часу, які проєктуються на площину  $XOY$  в системі координат зубчастої рейки  $S_1(x_1; y_1; z_1)$ . Цю процедуру можна проробити за допомогою січних площин висот  $z = z^{\text{cut}}$ , де  $z^{\text{cut}}$  – відстань, на яку зміщена площина перетину, паралельна до площини  $XOY$ . Для візуалізації використовується деяка модель гіперболоїдного шліфувального круга з доволі великим кутом схрещування осей  $\gamma$  і відповідно з доволі великим кутом підйому витка  $\gamma^{\text{витка}}$  та погрішністю профілю зубця, яку можна побачити фактично неозброєним оком. Для промальовки моделі підбрано наближення та положення спостерігача в такий спосіб, щоб показати найважливішу у цей момент частину моделі (рис. 4).

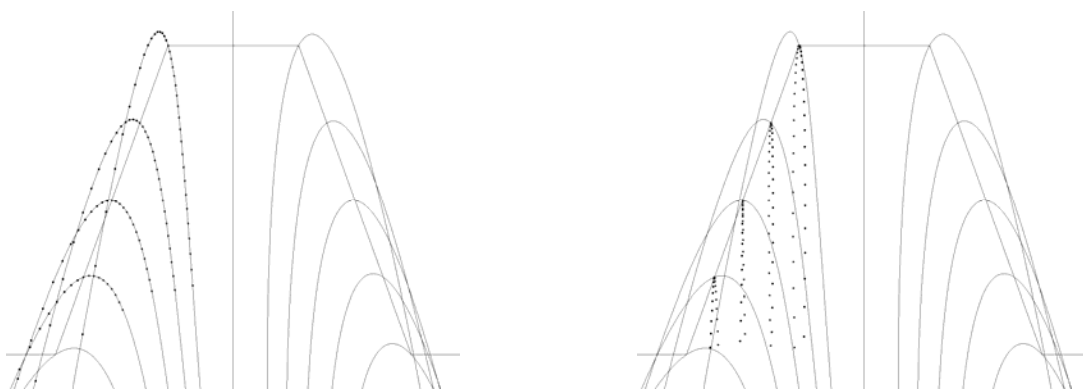


Рис. 4. Крапки контакту гіперболоїдного шліфувального круга й зубчастої рейки:  
а – крапки на вихідних поверхнях; б – крапки, спроектовані на площину  $z_1 = 0$

На рис. 4 показані “усі” крапки, належні до гіперболоїдного шліфувального круга, що перебувають у зоні потенційного контакту з одним боком одного зубця зубчастої рейки й належні

січними площинами  $z^{cut}$ , побудованим з деяким кроком уздовж осі  $z$ . Світло-сірі крапки, які розташовані у позитивній частині півпростору ( $P_z > 0$ ), а чорні – у негативному ( $P_z \leq 0$ ). Візуально складно оцінити положення крапок  $P$  у момент, коли нульова висота зубчастої рейки сполучиться із січною площиною  $z^{cut}$ , тому уявимо собі, що, рухаючись із подачею  $S_2$ , гіперболоїдний шліфувальний круг накопичуватиме ці крапки на нульовій висоті, тобто у цьому випадку – це  $P^0(P_x; P_y; 0)$  (рис. 4, б). Як бачимо з рис. 4, б, більшість крапок, які брали участь у зачепленні у певний момент часу, просто “виходять” із нього, але частина крапок внаслідок гвинтової властивості поверхні продовжує контакт і спотворює профіль зубця зубчастої рейки. Для того, щоб досліджувати як сильно і у якому місці відбувається спотворення профілю, необхідно виділити із усіх крапок ті, що “не вписуються” у профіль зубчастої рейки. В такий спосіб усі крапки  $P^0(P_x; P_y; 0)$ , для яких  $dx > 0$ , є причиною спотворення профілю зубця зубчастої рейки за віддалення від  $z^{cut} = 0 \text{ мм}$ . Збільшимо кількість кривих. Доволі велика кількість крапок дає змогу побачити форму викривлення профілю зубця зубчастої рейки (рис. 5).

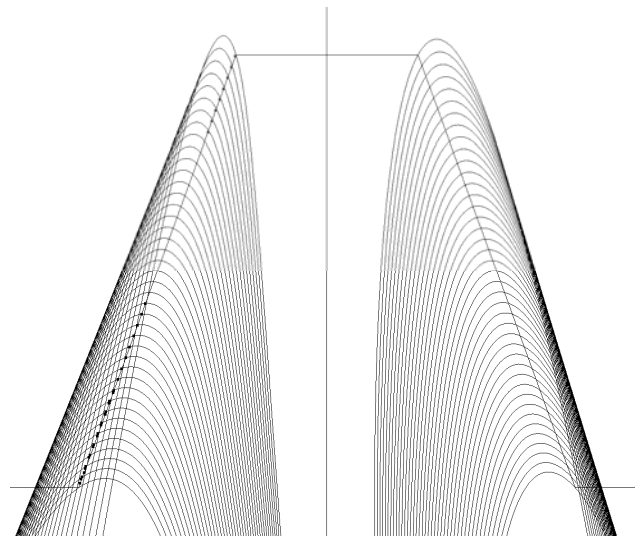


Рис. 5. Крапки контакту, спроектовані на площину  $z_1 = 0$

З рис. 5 зрозуміло, що більше спотворення профілю зубця зубчастої рейки припадає на вершину її зубця та зменшується до ніжки зубця. Точну форму викривлення можна одержати, заміривши максимальну величину різниці  $dx$  для усіх висот  $y_1$ . Результати доповнюють модель новими характеристиками. Зробимо попередню процедуру з більшою точністю (більша кількість розрахунків з меншим кроком) і знайдемо такі крапки, що створюють найбільше викривлення профілю  $dx > 0$  в околі кожної із  $N_{y_1}$  крапок для лівого та правого боків кожного зубця. Залежність викривлення форми зубця зубчастої рейки від висоти, на якій проводиться замір, показано на рис. 6 потовщеною лінією.

Для аналізу отриманої кривої зробимо її порівняння із кривою, отриманою аналогічними розрахунками для конвolutного циліндричного черв'ячного шліфувального круга (рис. 6 – тонка лінія). На рис. 6 нульове значення абсцис відповідає западині зубця, а максимальне значення  $N_{y_1}$  – висоті, що дорівнює  $2m$ . Як бачимо, форма спотворення профілю зубця зубчастої рейки під час оброблення гіперболоїдним і циліндричним шліфувальним кругом для першого зубця рейки нагадує параболу, яка спирається на нуль і спрямована гілками вгору. Першим зубцем зубчастої рейки вважається зубець, що перебуває в області горлового перетину гіперболоїдного шліфувального круга. Менше викривлення для

гіперболоїдної форми припадає на третину висоти зубця зубчастої рейки й зростає фактично з однаковою швидкістю до основи й головки зубця. Для циліндричної форми меншим є викривлення всередині зубця. Величина спотворення немає різких перепадів уздовж висоти зубця. Максимальна величина спотворення профілю припадає на верхню частину зубця на висоті  $2m$  для гіперболоїдної форми і становить трохи більшу величину порівняно з результатом для циліндричної форми шліфувального круга. При цьому в основі зубця величина викривлення трохи менша. Імовірно, що величини спотворень інших зубців у разі оброблення циліндричним шліфувальним кругом будуть ідентичними до показаних, а для гіперболоїдного шліфувального круга будуть відмінності, що викликано складною просторовою формою. Вивчення їх величин вимагає додаткових досліджень.

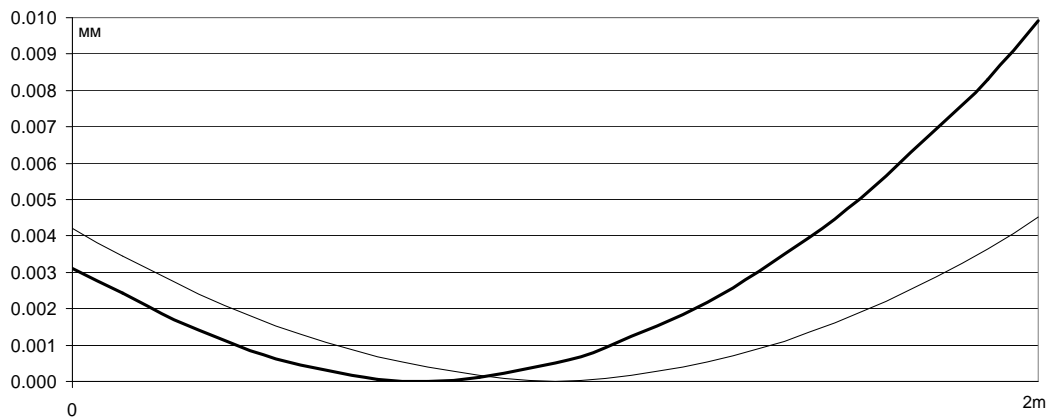


Рис. 6. Форма викривлення профілю зубця зубчастої рейки уздовж висоти зубця:  
 — оброблення гіперболоїдним шліфувальним кругом;  
 — оброблення конволютним черв'ячним шліфувальним кругом

**Висновок.** Отримані моделі та алгоритми дали змогу наочно уявити процеси взаємного впровадження поверхонь гіперболоїдного шліфувального круга та циліндричного зубчастого колеса, які приводять до спотворення профілю зубця останнього. Незважаючи на видимі, майже дворазову величину спотворення порівняно з обробкою шліфувальним кругом циліндричної форми, проглядаються явні переваги. До них варто зарахувати нульове викривлення профілю зубця під час обробки доволі тонких коліс, що неможливо досягти циліндричною формою, яка даватиме однакову величину спотворення для будь-якої товщини зубчастого колеса. Крім того, збільшена зона охоплення гіперболоїдного шліфувального круга дає можливість отримати більшу продуктивність. Продовженням вивчення цього питання може стати дослідження залежності максимальних величин спотворень профілю зубця циліндричного зубчастого колеса залежно від відстані до горлового перетину, а також від товщини, діаметра та модуля самого зубчастого колеса.

1. Гавриленко В.А., Осипова С.Д. *Определение оптимальных параметров начальных поверхностей колес эвольвентных гиперболических передач* // *Изв. вузов Машиностроение*. – 1969. – № 1. 2. Витренко В.А. *Повышение производительности зубонарезания цилиндрических зубчатых колес гиперболическим инструментом за счет совершенствования формообразования резанием: монография* / В.А. Витренко, В.В. Белозерова. – Луганск: Ноулидж, 2009. – 147 с. 3. Выгодский М.Я. *Дифференциальная геометрия*. – М.: Машигиз, 1949. – 659 с. 4. Воронов А.Э., Витренко В.А. *Компьютерное моделирование процесса формообразования гиперболического инструмента* // *Вісник Національного університету "Львівська політехніка"*. – № 746. – С. 13–17. 5. Стахин Н.А. *Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima. (ПО для решения задач аналитических (символьных) вычислений): учеб. пособ.* – М., 2008. – 86 с. 6. Страуструп Б. *Язык программирования С++ / Бьерн Страуструп // Специальное издание*. – 3-е изд. – СПб.: Бином, Невский Диалект, 2004. – 1104 с. 7. *Официальный сайт компании Eclipse Foundation*. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://eclipse.org>.