УДК 51(07)

Соколенко Л.О.

ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОМБІНАТОРИКИ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В РОБОТАХ З.Г. ШЕФТЕЛЯ

Розкрито особливості методики навчання елементів комбінаторики та теорії ймовірностей в навчальних посібниках та підручниках професора, кандидата фізико-математичних наук З.Г. Шефтеля

Ключові слова:комбінаторика, розміщення, перестановки, комбінації, теорія ймовірностей, особливості методики навчання.

Формування ймовірнісно-статистичного мислення учнів є одним з основних завдань сучасної математичної освіти. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики сьогодні вивчаються починаючи з основної школи в обсязі, що відповідає вимогам Державного стандарту. У старшій профільній школі ця змістова лінія суттєво розширюється, поглиблюється.

Якщо звернутись до історії цього питання, то можна з'ясувати, що до вивчення елементів комбінаторики та теорії ймовірностей у різні часи відносились по різному, визначаючи їх місце у навчальному процесі.

До 70-х років ХХ століття комбінаторика в середній школі вивчалася за підручником А.П. Кисельова [3]. Після впровадження нової програми і нових підручників, зокрема посібника з алгебри і початків аналізу за ред. А.М. Колмогорова [1], комбінаторику було виключено з програми. Але її вивченню приділялась належна увага у посібниках для факультативних занять, серед яких посібники [2], [4], співавтором яких є З.Г. Шефтель. За цими ж посібниками учні середньої школи мали можливість ознайомлюватись з елементами теорії ймовірностей.

Зупинимось на основних аспектах методики навчання учнів елементів комбінаторики, запропонованої З.Г. Шефтелем у згаданих посібниках, а саме на питаннях методики формування основних понять комбінаторики, доведення основних формул та методики навчання розв'язування комбінаторних задач.

У методиці навчання математики та в навчально-методичній літературі існують різні підходи до вивчення різних видів сполук залежно від їх трактування та послідовності запровадження. Успіх у формуванні цих математичних понять залежить від способу та послідовності їх введення.

За посібником для факультативних занять 9 класу [2] та за посібником для шкіл та класів з поглибленим вивченням математики [4] перед розглядом видів сполук означаються поняття "впорядкована множина" та "рівні впорядковані множини".

Означення 1. Множину M називають впорядкованою, якщо в ній встановлено відношення порядку $\prec$, що має такі властивості: 1) для будь-яких $a, b \in M$ або $a \prec b$ (a передує b), або $b \prec a$; 2) якщо $a \prec b,\ \ b \prec c$, то $a \prec c$ [4].

Означення 2. Дві впорядковані множини вважаються рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів і однаково впорядковані [4].

Сполуки без повторень розглядаються в наступній послідовності: розміщення, перестановки, комбінації. Поняття "перестановка" є видовим поняттям по відношенню до поняття "розміщення". Згадані поняття вводяться абстрактно-дедуктивним методом, спочатку означають поняття, а потім наводять приклади його практичного застосування.

Означення сполук, запропоновані у згаданих посібниках зрозумілі та нескладні для усвідомлення учнями, які знайомі з поняттями "множина" та "підмножина". Сформулюємо їх.

Означення 3. Нехай M є n-елементною множиною, $k \leq n$.Розміщенням з n елементів по k називають будь-яку впорядковану k-елементну підмножину множини M [4].

Означення 4. Розміщення з n елементів по n називається перестановками з n елементів [4].

Означення 5. Нехай M є n-елементною множиною, $k \leq n$.Комбінацією з n елементів по k називають будь-яку k-елементну підмножину множини M [4].

Такий підхід до означення згаданих понять сприяє вірному визначенню учнем виду сполуки про яку йдеться у конкретній ситуації практичного характеру, тобто при розв’язуванні задачі.

Зупинимось на декількох задачах запропонованих у посібнику [4].

Задача 1 [4, с.188, №1]. Скількома способами можна розсадити 5 учнів на 12 місцях?

Задача 2 [4, с.189, №5]. У шаховому турнірі беруть участь 7 чоловік. Скількома способами можуть розділитися місця між ними?

Задача 3. [4, с. 192, №1]. Скількома способами можна вибрати три фарби з п’яти різних фарб?

У сформульованих задачах йдеться про скінченні множини та підмножини, складені з елементів довільної природи. Залежно від умови задачі розглядаються скінченні множини, в яких істотним є або порядок їх елементів, або належність певних елементів до цих множин, або перше і друге одночасно. Використовуючи означення 3-5, учням нескладно визначити вид сполуки про яку йдеться в задачі. Продемонструємо це з допомогою наступної таблиці.

Початкова множина	12 місць	7 місць	5 фарб
Нова (створена) множина чи підмножина	підмножина	множина	підмножина
	5 місць для учнів	7 місць для учасників турніру	3 фарби
Впорядкована	+	+	-
Сполука	розміщення	перестановка	комбінація

Багато теорем і формул комбінаторики ґрунтується на так званому правилі добутку. У посібниках [2], [4] перед його формулюванням автор розглядає просту та зрозумілу ситуацію, розв’язання якої допомагає учням у засвоєнні цього правила.

Приклад 1.[4, с.185]. На тарілці лежать 3 яблука і 5 груш. Скількома способами можна взяти одне яблуко і одну грушу?

Роз’вязання.Щоб відповісти на це запитання, перенумеруємо окремо яблука і груші. Ми можемо взяти перше яблуко з будь-якою з п’яти груш; це дає п’ять способів. Так само можна взяти друге або третє яблуко з будь якою з п’яти груш, і для кожного з яблук дістанемо по п’ять способів. Отже, загальна кількість способів вибору дорівнює $3 \cdot 5 = 15$.

Відповідь.15 способів.

Міркування проведені учнями під час розв’язування цього та аналогічних до нього прикладів дають можливість переконатись у правильності такого правила.

Правило добутку.Нехай об’єкт a можна вибрати m способами і при кожному з цих виборів об’єкт b можна вибрати n способами. Тоді вибір пари (a,b) можна здійснити mn способами [4].

Правило добутку легко узагальнюється на випадок кількох виборів.

Узагальнене правило добутку.Нехай об’єкт a_1 можна вибрати m_1 способами, об’єкт $a_2 - m_2$ способами, …, об’єкт a_k можна вибрати m_k способами. Тоді послідовний вибір всіх об’єктів $(a_1, a_2, ..., a_k)$ можна здійснити $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ способами [4].

Підхід до доведення формул комбінаторики певною мірою залежить від послідовності вивчення окремих видів сполук і попереднього ознайомлення учнів з методами доведень. Так для розуміння учнями доведення формули кількості розміщень з n елементів по k: $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$, де n,k-довільні натуральні числа $(k \le n)$, запропонованого у посібнику [2], учні мають бути попередньо ознайомлені з методом математичної індукції.

Доведення цієї ж формули, запропоноване автором у посібнику [4], спирається на узагальнене правило добутку. Це значно полегшує його розуміння та запам’ятовування учнями. Переконаємось в цьому, розглянувши доведення.

Доведення.З’ясуємо скількома способами можна скласти k-елементну впорядковану множину $(a_1, a_2, ..., a_k)$ з елементів заданої n-елементної множини M. За a_1 можна прийняти будь-який елемент множини M, тобто a_1 можна вибрати n способами. За a_2 можна прийняти будь-який елемент M, відмінний від a_1, отже a_2 можна вибрати $n-1$ способами. Аналогічно a_3 можна вибрати $n-2$ способами і т.д. Тому за узагальненим правилом добутку шукане число способів дорівнює добуткові k множників $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$.

Обрана З.Г. Шефтелем послідовність вивчення окремих видів сполук дає можливість, з доведеної тільки що формули, безпосередньо одержати формулу кількості перестановок з n елементів: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$, оскільки $P_n = A_n^n$.

Для доведення формули кількості усіх комбінацій з n елементів по k: $C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ використовуються раніше виведенні формули A_n^k, P_k, [4, с.189].

Існуючий зв’язок між видами сполук та обраний автором порядок їх вивчення дають можливість встановити зв’язок між формулами кількості сполук. Саме цей зв’язок і сприяє їх швидкому запам’ятовуванню учнями.

$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	
$A_n^n = P_n = n!$	$A_n^k = P_k \cdot C_n^k \Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Методика навчання учнів розв’язування комбінаторних задач не зводиться лише до формування в учнів вміння визначати вид сполуки, про яку йдеться в задачі, і застосування відповідної формули для обчислення кількості сполук. Таким чином розв’язуються лише простіші комбінаторні задачі. Серед комбінаторних задач часто зустрічаються задачі для розв’язування яких слід використовувати правила добутку або суми, до складу яких входять різні види сполук та інші відомості, зокрема пов’язані з кількістю підмножин n -елементної множини. Розглянемо приклад такої задачі.

Задача 4.[4, с. 192, №10]. З 10 різних квіток потрібно скласти букет так, щоб у ньому було не менше двох квіток. Скількома способами можна скласти такий букет?

Для відповіді на це питання використовується наслідок з теореми про кількість усіх підмножин n -елементної множини: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

Успіх у розв’язанні такої задачі залежить від правильно проведеного аналізу її умови, а саме від розуміння слів "букет повинен містити не менше двох квіток", тобто дві, три, …, десять.

Зважаючи на це одержують відповідь: $2^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 = 2^{10} - 11 = 1013\ (способів)$.

Елементи теорії ймовірностей стали обов’язковими для вивчення у школах з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики, згідно з програмою 2001 року [5]. До цього часу їх розглядали на факультативних заняттях. Розглянемо підхід до вивчення елементів теорії ймовірностей запропонований З.Г. Шефтелем у посібниках [2], [4].

В існуючій літературі є різні погляди на зміст і структуру навчального матеріалу теми "Початки теорії ймовірностей". Найбільш суперечок виникає щодо того перевагу якому з означень ймовірності події класичному чи статистичному надати у шкільному курсі.

З.Г. Шефтель у факультативних курсах [2], [4], розпочинаючи виклад навчального матеріалу з даної теми, після введення конкретно-індуктивним методом понять "випробування" та "випадкова подія" означає поняття "частоти настання події A " та дає статистичне означення ймовірності.

Означення 6.Нехай ми здійснили експеримент n разів і при цьому в результаті μ випробувань настала подія A; відношення $\frac{\mu}{n}$ природно називати (відносною) частотою настання події A в цій серії з n випробувань [4].

Теорія ймовірностей вивчає події, для яких характерна властивість стійкості частот (частота події A при великій кількості випробувань мало відрізняється від деякого числа). Число, навколо якого групуються частоти події A при великій кількості випробувань, називається ймовірністю події A і позначається $P(A)$ [4].

Наведене означення ймовірності називають статистичним або частотним. На думку автора "на основі цього означення важко побудувати логічно досконалу теорію, оскільки в ньому нічого не сказано про те, якою має бути кількість випробувань і на скільки може відхилятися частота від імовірності при даному n" [4, с. 194].

Саме цьому у наступних параграфах розглядається класичне означення ймовірності: імовірністю події A називається відношення кількості результатів випробування, сприятливих для події A, до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування, $P(A)=\frac{N(A)}{N}$ [4].

Слід зазначити, що введення понять у даних посібниках супроводжується розглядом численних прикладів, які полегшують розуміння цих понять та сприяють їх кращому засвоєнню. Задачі на обчислення ймовірності за класичним означенням мають практичний зміст, хоча умови задач інколи при необхідності ідеалізуються. Розглянемо деякі з них та методику навчання учнів їх розв'язування.

Задача 5.[4, с. 202, №2]. З 10 лотерейних білетів два виграшних. Знайдіть імовірність того, що серед узятих будь-яких 5 білетів: а) один виграшний; б) принаймні один виграшний.

Розв'язання.а) Нехай подія A полягає у тому, що серед взятих 5 білетів один виграшний. Кількість всіх рівноможливих, попарно несумісних результатів випробування $N=C_{10}^{5}$, а число результатів випробування, сприятливих для події A: $N(A)=C_2^1\cdot C_8^4$. За класичним означенням ймовірності $P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_8^2}{C_{10}^5}=\frac{5}{9}$. б) Нехай подія B полягає у тому, що серед взятих 5 білетів принаймні один виграшний. Ймовірність цієї події обчислити складно. Розглянемо протилежну до неї подію $\overline{B}$, яка полягає у тому, що серед п'яти взятих білетів немає жодного виграшного. Тоді за класичним означенням імовірності $P(\overline{B})=\frac{C_8^5}{C_{10}^5}=\frac{2}{9}$. За властивістю ймовірності протилежної події $P(B)=\frac{7}{9}$.

Оскільки при розгляді відношень, в яких перебувають події, встановлюється зв'язок між подіями та множинами, то це дає можливість легко доводити властивості операцій над подіями (переставну, сполучну, розподільну, закони де Моргана) і, як наслідок, властивості ймовірності, серед яких теорема додавання для двох несумісних подій, теорема додавання для попарно несумісних подій, теорема додавання для довільних подій.

У згаданих посібниках розглядається й ряд інших питань, а саме геометричні ймовірності, умовні ймовірності та незалежні події, теорема множення для двох подій, послідовні незалежні випробування (схема Бернуллі), які згодом увійшли до питань шкільного курсу алгебри і початків аналізу.

Перший досвід вивчення початків теорії ймовірностей на факультативних заняттях виявився корисним. Він розкрив можливість введення в програму з математики старшої школи нової сучасної змістової лінії. Це стало можливим завдяки високопрофесійній роботі математиків, серед яких З.Г. Шефтель, який умів доступно, чітко, послідовно та цікаво розкривати ці питання перед учнями та навчати майбутніх вчителів математики, приділяючи особливу увагу питанням, які можна використовувати на уроках у школі.

Використані джерела

Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / А.М. Колмогоров, О.М. Абрамов, Ю.П. Дудніцин та ін.; За ред. А.М. Колмогорова.– К.: Рад. шк., 1992.–350 с.

Вивальнюк Л.М., Шефтель З.Г., Рафаловський Е.В. Математика: Посібник для факультативних занять в 9 кл.– К.: Рад. шк., 1984.– 136 с.

Кисельов А.П. Алгебра. Ч ІІ: Підруч. для серед. шк.–К.: Рад. шк., 1966.– 264 с.

Математика: Посібник для шк. та кл. з поглибл. Вивченням математики. Л.М. Вивальнюк, М.М. Мурач, О.І. Соколенко та ін.– К.: Освіта, 1998.– 301с.

Програми: для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 класи; для класів з поглибленим вивченням математики, 8-11 класи; для класів гуманітарного напряму. Математика 10-11 класи // Математика.–2001.–№35, №37.

Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей: Підручник.–2-ге вид. перероб. і допов.–К.: Вища шк., 1994.– 192 с.

Sokolenko L.A.

PECULIARITIES OF TEACHING METHODS OF THE ELEMENTS
OF COMBINATORICS AND PROBABILITY THEORY IN THE WORKS
OF Z.H. SHEFTEL

The peculiarities of teaching methods of the elements of combinatorics and probability theory in textbooks and manuals of Professor, Candidate of Science Z.H Sheftel are discovered.

Key words: combinatorics, location, permutations, combinations, probability theory, peculiarities of teaching methods.

Стаття надійшла до редакції 06.08.2013 р.