УДК 681.3.057:518.12

Н. Л. Костьян, *старший преподаватель*
Киевский национальный университет технологий и дизайна,
ул. Немировича-Данченко, 2, г. Киев, 01011, Украина
friit_ikt@ukr.net

МЕТОД МНОГОКРАТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В работе рассматриваются вопросы использования интегрального метода идентификации динамического объекта в процессе исследования переходных процессов при произвольном входном воздействии. Устанавливается связь между рассматриваемым методом и методом площадей.

Ключевые слова: *переходной процесс, передаточная функция, метод многократного интегрирования, метод площадей.*

Введение. Изучение переходных процессов является весьма важным, так как дает возможность установить, каким образом деформируются по форме и амплитуде сигналы при прохождении их через усилители, фильтры и другие устройства, позволяет выявить превышения напряжения на отдельных участках электрической цепи, увеличения амплитуд токов, а также определить продолжительность переходного процесса. Применение большинства параметрических методов при исследовании переходных процессов имеет существенные ограничения. Их можно использовать для систем до второго порядка и только при ступенчатом воздействии. Кроме того, определение коэффициентов передаточной функции зависит от точности отдельно взятых точек кривой переходного процесса. Интегрирование переходных процессов позволяет определять динамические свойства испытуемого объекта при произвольном входном воздействии.

Постановка проблемы. В работах [1; 2] предлагаются соотношения, позволяющие определять коэффициенты линейного дифференциального уравнения типа

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + y(t) = kx(t)\,, \quad (1)$$

соответствующего передаточной функции

$$\frac{k}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i s^i}\,,$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned} &y'(0) = y''(0) = \ldots y^{(n-1)}(0) = 0;\\ &y'(\infty) = y''(\infty) = \ldots y^{(n-1)}(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия (2) означают, что испытуемый объект при $t \le 0$ и $t \to \infty$ должен находиться в неизменном стационарном состоянии. В аналогичном состоянии, очевидно, должен также находиться входной сигнал $x(t)$. В интервале $0 \le t < \infty$ поведение входного сигнала может быть произвольным.

В указанной работе рассматривается случай, когда $x(0) = x(\infty) = 0$ и соответственно $y(0) = y(\infty) = 0$.

В этом случае коэффициент усиления определяется из равенства

$$k = \frac{\int\limits_0^\infty y dt}{\int\limits_0^\infty x dt}\,. \quad (3)$$

Для определения коэффициента a_1 вначале интегрируется уравнение (1) в пределах от t до ∞:

$$\begin{aligned} &-a_n y^{(n-1)}(t) - a_{n-1} y^{(n-2)}(t) - \\ &- \ldots - a_1 y(t) + \int\limits_t^\infty y dt = k \int\limits_t^\infty x dt \end{aligned}\,, \quad (4)$$

а затем уравнение (4) в пределах от 0 до ∞:

$$a_1 = \frac{1}{\int\limits_0^\infty y dt}\left(\int\limits_0^\infty\!\!\int\limits_t^\infty y dt^2 - k\int\limits_0^\infty\!\!\int\limits_t^\infty x dt^2\right). \quad (5)$$

Интеграл $\int\limits_0^\infty\int\limits_t^\infty ydt^2$ численно равен площади, ограниченной кривой $\int\limits_0^t ydt$ и прямой $\int\limits_0^\infty ydt$. Такой же геометрический смысл имеет и интеграл $\int\limits_0^\infty\int\limits_t^\infty xdt^2$.

При вычислении коэффициента a_2 и последующих для снижения порядка производной при определяемом коэффициенте a_l до нулевого выполняется l-кратное интегрирование обеих частей уравнения (1) в пределах от t до ∞, а затем в (l+1)-й раз – в пределах от 0 до ∞. В результате

$$a_l = \frac{(-1)^l}{S_1(y)}[kS_{l+1}(x) - \sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i a_i S_{l+1-i}(y)], \quad (6)$$

$$S_l(y) = \int\limits_0^\infty \underbrace{\int\limits_t^\infty \ldots \int\limits_t^\infty}_{l-1} ydt^l,$$
$$S_l(x) = \int\limits_0^\infty \underbrace{\int\limits_t^\infty \ldots \int\limits_t^\infty}_{l-1} xdt^l. \quad (7)$$

Целью работы является дальнейшее развитие метода многократного интегрирования, расширяющее возможности его применения.

Переходные процессы при $x(0) \neq x(\infty)$. Переходные процессы при произвольном входном воздействии с произвольным установившимся состоянием в начале и в конце процесса относятся к более общему случаю экспериментального исследования. Анализ таких процессов проще анализа процессов, у которых $y(0) = y(\infty)$, так как требует определения меньшего количества интегралов.

Из очевидных соображений находится коэффициент усиления системы

$$k = \frac{y(0) - y(\infty)}{x(0) - x(\infty)}. \quad (8)$$

Для определения остальных коэффициентов необходимо преобразовать уравнение (1). Введение нормированных переменных $x_1(t)$ и $y_1(t)$

$$y_1(t) = 1 - \frac{y(t)}{y(\infty)};$$
$$x_1(t) = 1 - \frac{x(t)}{x(\infty)} \quad (9)$$

при не сказывающемся на общности предположении, что $x(0) = y(0) = 0$, позволяет записать уравнение (1) в виде

$$a_n y_1^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y_1'(t) + y_1(t) = x_1(t) \quad (10)$$

Величины $x_1(\infty)$ и $y_1(\infty)$ согласно (9) равны нулю, и это позволяет интегрировать уравнение (10) в пределах от 0 (или t) до ∞.

В результате многократного интегрирования определяются последовательно коэффициенты уравнения (10), для которых может быть записана следующая рекуррентная формула:

$$a_l = (-1)^l [S_l(x_1) - \sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i a_i S_{l-i}(y_1)],$$
$$(l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (11)$$

Определение коэффициентов передаточной функции с полиномом в числителе. Исследование систем более общего вида значительно усложняется, так как в этом случае не существует рекуррентной формулы для вычисления коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции.

Для определения n коэффициентов знаменателя и m коэффициентов числителя составляется n+m уравнений, связывающих определяемые коэффициенты с численными значениями интегралов типа (7), вычисленными по данным эксперимента. В последних m уравнениях системы все m+n коэффициентов связаны однотипными зависимостями, отличающимися только порядком интегралов.

Структура таких систем уравнений для произвольных входных воздействий типа $x(0) = x(\infty)$ приведена в табл. 1, а для $x(0) \neq x(\infty)$ – в табл. 2.

Таблица 1

Структура систем уравнений для определения коэффициентов передаточной функции с полиномом в числителе при входном воздействии типа $x(0)=x(\infty)$

Число уравнений	Коэффициенты при определяемых параметрах								Правые части уравнений
	a_1	a_2	…	a_n	b_1	b_2	…	b_m	
m	$-S_1(y)$ $-S_2(y)$ $\vdots$ $-S_{m-1}(y)$ $-S_m(y)$	0 $S_1(y)$ $\vdots$ $S_{m-2}(y)$ $S_{m-1}(y)$		0 0 $\vdots$ 0 0	$kS_1(x)$ $kS_2(x)$ $\vdots$ $kS_{m-1}(x)$ $kS_m(x)$	0 $-kS_1(x)$ $\vdots$ $-kS_{m-2}(x)$ $-kS_{m-1}(x)$		0 0 $\vdots$ 0 $(-1)^{m-1}kS_1(x)$	$kS_2(x)-S_2(y)$ $kS_3(x)-S_3(y)$ $\vdots$ $kS_m(x)-S_m(y)$ $kS_{m+1}(x)-S_{m+1}(y)$
n-m	$-S_{m+1}(y)$ $\vdots$ $-S_{n-1}(y)$ $-S_n(y)$	$S_m(y)$ $\vdots$ $S_{n-2}(y)$ $S_{n-1}(y)$		0 $\vdots$ 0 $(-1)^n S_1(y)$	$kS_{m+1}(x)$ $\vdots$ $kS_{n-1}(x)$ $kS_n(x)$	$-kS_m(x)$ $\vdots$ $-kS_{n-2}(x)$ $-kS_{n-1}(x)$		$(-1)^{m-1}kS_2(x)$ $\vdots$ $(-1)^{m-1}kS_{n-m}(x)$ $(-1)^{m-1}kS_{n-m+1}(x)$	$kS_{m+2}(x)-S_{m+2}(y)$ $\vdots$ $kS_n(x)-S_n(y)$ $kS_{n+1}(x)-S_{n+1}(y)$
m	$-S_{n+1}(y)$ $\vdots$ $-S_{n+m}(y)$	$S_n(y)$ $\vdots$ $S_{n+m-1}(y)$		$(-1)^n S_2(y)$ $\vdots$ $(-1)^n S_{m-1}(y)$	$kS_{n+1}(x)$ $\vdots$ $kS_{n+m}(x)$	$-kS_n(x)$ $\vdots$ $-kS_{n+m-1}(x)$		$(-1)^{m-1}kS_{n-m+2}(x)$ $\vdots$ $(-1)^{m-1}kS_{n+1}(x)$	$kS_{n+2}(x)-S_{n+2}(y)$ $\vdots$ $kS_{n+m+1}(x)-S_{n+m+1}(y)$

ISSN 2306-4455. Вісник ЧДТУ, 2014, № 3

ISSN 2306-4455. Вісник ЧДТУ, 2014, № 3

Таблица 2

Структура систем уравнений для определения коэффициентов передаточной функции с полиномом в числителе при входном воздействии типа $x(0)\neq x(\infty)$

Число уравнений	Коэффициенты при определяемых параметрах								Правые части уравнений
	a_1	a_2	…	a_n	b_1	b_2	…	b_m	
m	$-S_1(y_1)$ $-S_2(y_1)$ $\vdots$ $-S_{m-1}(y_1)$ $-S_m(y_1)$	0 $S_1(y_1)$ $\vdots$ $S_{m-2}(y_1)$ $S_{m-1}(y_1)$		0 0 $\vdots$ 0 0	$S_1(x_1)$ $S_2(x_1)$ $\vdots$ $S_{m-1}(x_1)$ $S_m(x_1)$	0 $-S_1(x_1)$ $\vdots$ $-S_{m-2}(x_1)$ $-S_{m-1}(x_1)$		0 0 $\vdots$ 0 $(-1)^{m-1}S_1(x_1)$	$S_1(x_1)-S_1(y_1)$ $S_2(x_1)-S_2(y_1)$ $\vdots$ $S_{m-1}(x_1)-S_{m-1}(y_1)$ $S_m(x_1)-S_m(y_1)$
n-m	$-S_{m+1}(y_1)$ $\vdots$ $-S_{n-1}(y_1)$ $-S_n(y_1)$	$S_m(y_1)$ $\vdots$ $S_{n-2}(y_1)$ $S_{n-1}(y_1)$		0 $\vdots$ 0 $(-1)^n S_1(y_1)$	$S_{m+1}(x_1)$ $\vdots$ $S_{n-1}(x_1)$ $S_n(x_1)$	$-S_m(x_1)$ $\vdots$ $-S_{n-2}(x_1)$ $-S_{n-1}(x_1)$		$(-1)^{m-1}S_2(x_1)$ $\vdots$ $(-1)^{m-1}S_{n-m}(x_1)$ $(-1)^{m-1}S_{n-m+1}(x_1)$	$S_{m+1}(x_1)-S_{m+1}(y_1)$ $\vdots$ $S_{n-1}(x_1)-S_{n-1}(y_1)$ $S_n(x_1)-S_n(y_1)$
m	$-S_{n+1}(y_1)$ $\vdots$ $-S_{n+m}(y_1)$	$S_n(y_1)$ $\vdots$ $S_{n+m-1}(y_1)$		$(-1)^n S_2(y_1)$ $\vdots$ $(-1)^n S_{m-1}(y_1)$	$S_{n+1}(x_1)$ $\vdots$ $S_{n+m}(x_1)$	$-S_n(x_1)$ $\vdots$ $-S_{n+m-1}(x_1)$		$(-1)^{m-1}S_{n-m+2}(x_1)$ $\vdots$ $(-1)^{m-1}S_{n+1}(x_1)$	$S_{n+1}(x_1)-S_{n+1}(y_1)$ $\vdots$ $S_{n+m}(x_1)-S_{n+m}(y_1)$

Для вычисления коэффициентов передаточной функции по формулам, получаемым в каждом конкретном случае из приведенных систем уравнений, целесообразно использовать ЭВМ.

Связь метода многократного интегрирования с методом площадей. Оба интегральных метода – метод площадей [3; 4] и метод многократного интегрирования – оперируют с однотипными интегралами и решают одну задачу – определение коэффициентов передаточной функции. Представляет интерес установить связь между этими методами в явной форме.

Преобразуем выражение для многократного интеграла с переменным нижним пределом. В результате первого интегрирования по частям интеграл $S_l(y)$ (7) примет вид

$$S_l(y) = \int_0^\infty \left[\underbrace{\int_t^\infty \ldots \int_t^\infty}_{l-1} y dt^{l-1} \right] dt =$$

$$= t \underbrace{\int_t^\infty \ldots \int_t^\infty}_{l-1} y dt^{l-1} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty t \left[\underbrace{\int_t^\infty \ldots \int_t^\infty}_{l-2} y dt^{l-2} \right] dt.$$

В силу экспоненциального характера затухания переменной y первое слагаемое в правой части равно нулю не только в нижнем, но и в верхнем пределе. Последовательным интегрированием по частям выражение для $S_l(y)$ сведется к виду

$$S_l(y) = \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \int_t^\infty y dt \Big|_t^\infty + \int_0^\infty \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \int_t^\infty y dt^2 =$$

$$= \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} y \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} y dt = \int_0^\infty \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} y dt,$$

или

$$S_l(y) = \int_0^\infty \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} y dt = \eta_l . \qquad (12)$$

Таким образом, многократные интегралы $S_l(y)$ и $S_l(x)$ численно равны моментам l-го порядка от соответствующих величин. Однако, в отличие от метода площадей, здесь моменты вычисляются для произвольного (в частном случае ступенчатого) воздействия.

Учитывая равенство (12), можно записать рекуррентные формулы (6) и (11) в другой форме:

$$a_l = \frac{(-1)^l}{\eta_1(y)} [k\eta_{l+1}(x) - \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i a_i \eta_{l+1-i}(y)],$$
$$x(0) = x(\infty) = 0; \qquad (13)$$

$$a_l = (-1)^l [\eta_l(x_1) - \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i a_i \eta_{l-i}(y_1)]$$
$$, \quad x(0) \neq x(\infty). \qquad (14)$$

Из рассмотрения (13) и (14) можно сделать вывод, что метод площадей является частным случаем метода многократного интегрирования. Действительно, при подстановке в (14) значений моментов от входного ступенчатого воздействия

$$\eta_l(x_1) = 0 \;\; (l=1, 2, 3, \ldots).$$

Преобразованная формула для a_l

$$a_l = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-1-i} a_i \eta_{l-i}(y_1) \qquad (15)$$

совпадает с соответствующей формулой метода площадей (в данном случае $y_1 = 1 - h$ и $q_l = a_l$).

Выводы. Главное достоинство метода многократного интегрирования состоит в том, что он позволяет исследовать переходные процессы, вызванные входным воздействием произвольного характера. Это очень важно при проведении испытаний объекта в условиях его нормальной эксплуатации и, в частности, при натурных испытаниях. Кроме того, данный метод позволяет избежать погрешностей, связанных с неточным фиксированием входного, например, быстро изменяющегося, сигнала.

Список литературы

1. Vrancic, D. (2012) Magnitude optimum techniques for PID controllers. Introduction to PID controllers – theory, tuning and application to frontier areas. Rijeka: Published by InTech, pp. 75–102.
2. Strejc, V. (1960) Auswertung der dynamischen Eigenschaften von Regelstrecken bei gemessenen Ein-und Ausgangssignalen allgemeiner, Zeitschrift fur Messen, Steuern, Regeln, Jg. 3, Nr. 1. Berlin, S. 7–10.
3. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы / И. В. Мирошник. – СПб. : Питер, 2005. – 336 с.
4. Жуков С. Ф. Применение метода площадей для идентификации параметров комплекса весового дозирования шахтовых материалов / С. Ф. Жуков, А. И. Важинский // Наукові праці Донецького національного технічного університету. – Донецьк : ДонНТУ, 2013. – № 2(15). – С. 103–106. – (Серія : Електротехніка і енергетика).

Стаття надійшла до редакції 22.08.2014.

References

1. Vrancic, D. (2012) Magnitude optimum techniques for PID controllers. Introduction to PID controllers – theory, tuning and application to frontier areas. Rijeka: Published by InTech, pp. 75–102.
2. Strejc, V. (1960) Auswertung der dynamischen Eigenschaften von Regelstrecken bei gemessenen Ein-und Ausgangssignalen allgemeiner, Zeitschrift fur Messen, Steuern, Regeln, Jg. 3, Nr. 1. Berlin, S. 7–10.
3. Miroshnik, I. V. (2005). Automatic control system. Linear systems. St. Petersburg: Peter, 336 p. [in Russian].
4. Jukov, S. F. and Vajinskiy, A. I. (2013) The use of the area method for identification of parameters of weigh batching complex of mine materials, 2(15). Donetsk: DonNTU, pp. 103–106. [in Russian].

N. L. Kostian, *senior lecturer*
Kyiv National University of Technologies and Design,
Nemirovich-Danchenko str., 2, Kyiv, 01011, Ukraine
friit_ikt@ukr.net

THE METHOD OF MULTIPLE INTEGRATION FOR SYSTEM STUDY IN CASE OF RANDOM EFFECT

One way of calculating of parameters of transfer function with the gain in the numerator of a linear object that is in invariable stationary state at the beginning and end of the process is multiple integration of corresponding linear differential equation. The purpose of this study is the further development of the method of multiple integration, extending its application.

In the analysis of transient responses for random input effect with a random steady state at the beginning and end of the process is offered to pre-normalize variables of differential equation, and then to use recursive formulas derived from multiple integration in the range of 0 (or t) to ∞.

The study determines the structure of the systems of equations for finding the coefficients of transfer function with a polynomial in the numerator for input effects of the type of $x(0) = x(\infty)$ *and* $x(0) \neq x(\infty)$.

The link between the above method and the area method has been established. Multiple integrals are numerically equal to the moments of corresponding values. However, unlike the area method while using the method of multiple integration moments are calculated for a random effect. Thus, the area method is a special case of the method of multiple integration.

The main advantage of the proposed method is that it allows to explore transient responses caused by input effect of random nature. The proposed method can be effectively used during object testing in conditions of its normal operation. In addition, errors due to inaccurate fixation of input, for example, fast-paced, signal can be avoided.

Keywords: *transient process, transfer function, multiple integration method, area method.*