

РЕОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ СЕРЕДОВИЩА З СУТТЄВИМ ВНУТРІШНІМ ТЕРТЯМ

В ході розрахунку основ фундаментів архітектурних споруд та моделювання процесу земляних робіт при їх спорудженні необхідно підібрати модель, яка б найбільш повно відображала процеси, що відбуваються в робочому середовищі, тобто в ґрунті. Авторами розглянуто існуючі моделі, що використовуються для описання деформування середовища з внутрішнім тертям. Це моделі теорії пластичності, «мікродеформування», моделі нелінійної механіки ґрунтів та моделі пластичного плинну. Деякі з цих моделей враховують нелінійність законів деформування, деякі – вплив внутрішнього тертя в граничній стадії деформування, дилатансії. Історію ж навантажень можна оцінити тільки за допомогою моделей пластичного плинну. Авторами зроблено висновок, що для описання контактної взаємодії середовища з внутрішнім тертям найраціональнішими можна вважати моделі теорії пластичності з особливими законами деформування, які встановлюватимуться експериментально.

Ключові слова: основа фундаменту; дискретне середовище; внутрішнє кулонове тертя; дилатансія.

O.A. DOROFEYEV, V.V. KOVTUN
Khmelnitskyi National University

RHEOLOGICAL MODELS OF SOILS WITH SIGNIFICANT LEVEL OF INTERNAL FRICTION

When calculating the fundamentals of the foundations of architectural structures and modeling the process of earthworks during their construction, it is necessary to select a model that would most fully reflect the processes occurring in the working environment, that is, in the soil. The contact problems of the interaction of such a medium with the elements of the structure are the most complex tasks of mechanics, since they require a coherent description of the stress-strain state of contacting objects which are considered to be the elements of structures and the environment with special laws of deformation. The authors consider existing models used to describe the deformation of the environment with internal friction. These are models of the theory of plasticity, "microdeforming", models of nonlinear soil mechanics and models of plastic flow. The effect of internal friction at all stages of deformation reflects the physical-nonlinear models of soil mechanics. They reflect two fundamental features of the deformation of materials with significant internal friction - the nonlinearity of the relations of "strain-strain" and the effect of internal coulomb friction on the laws of deformation of these materials. However, the laws of volumetric deformation do not describe the manifestation of dilatation for materials with internal friction, that is, the appearance of volumetric deformations under displacements. The most complex scientific and technical problem was the description of dilatation. To a certain extent, its manifestation in the process of material deformation can be described by means of dilatation relations of soil mechanics models of deformation type. The history of the loads can be estimated only using models of plastic flow, the history of the same loads can be estimated only with the help of models of plastic flow, the physical relations of which are formed as the relationship between the stresses and strains of deformations, and not between the stresses and achieved deformations. The authors conclude that for the description of the contact interaction of the medium with internal friction, the most rational is the model of the theory of plasticity with special laws of deformation, which will be determined experimentally.

Key words: base of foundation; discrete environment; internal coulomb friction; dilatation.

Вступ. Середовища з суттєвим внутрішнім тертям широко розповсюджені в інженерній практиці. До них відносяться природні ґрунти, гірські породи, бетони, технічна кераміка, сипкі, зернисті, гранульовані та інші фізично дискретні матеріали.

Важливою задачею інженерної механіки є описання контактної взаємодії такого середовища з елементами конструкцій.

Такі задачі доводиться розв'язувати, наприклад, під час проектування фундаментів, підпірних стін, причальних споруд морських і річкових портів, обладнання для транспортування й зберігання гранульованих матеріалів, зерна та інших матеріалів сільськогосподарського виробництва.

Ці контактні задачі є найбільш складними задачами механіки, оскільки вони вимагають сумісного описання напружено-деформованого стану контактуючих об'єктів – елементів конструкцій і середовища з особливими законами деформування.

Для описання напружено-деформованого стану елементів конструкцій використовують добре апробований апарат теорії пружності, основою якого є найпростіша реологічна модель Гука. Подібної ж

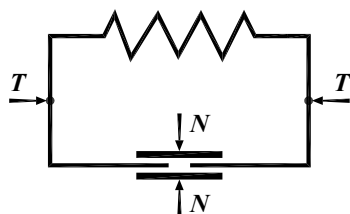


Рис. 1. Реологічна модель середовища з внутрішнім тертям

реологічної моделі для описання напружено-деформованого стану середовища з суттєвим внутрішнім тертям поки не створено, хоча запропоновано багато моделей, які в тій чи іншій мірі можуть відобразити характерні особливості деформування матеріалів з суттєвим внутрішнім тертям.

Запропоновані моделі потребують фундаментальних досліджень для встановлення достовірності описання напружено-деформованого стану середовища з внутрішнім тертям на усіх етапах його деформування.

Експериментальними дослідженнями встановлено, що реологічна модель середовища з суттєвим внутрішнім тертям повинна відображати як відомі закономірності деформування твердих тіл, так і

особливості деформування середовища, що спричинені впливом внутрішнього тертя. Таку модель умовно можна представити як поєднання моделі нелінійної теорії пружності та моделі Кулона, що враховує вплив внутрішнього тертя (рис. 1).

Дослідження, що проводились переважно на зразках природних ґрунтів, дозволяють сформувати такі особливості деформування матеріалу, які повинні бути враховані при виборі визначальних співвідношень моделі середовища з суттєвим внутрішнім тертям:

1) нелінійність законів деформування;

2) вплив внутрішнього тертя не тільки на граничній стадії деформування, але й у дограничній, тобто залежність опору зсувам τ від нормальних стискуючих напружень σ на усіх етапах деформування;

3) прояв дилатансії – виникнення об'ємних деформацій при зсувах.

Крім того, модель повинна враховувати вид напруженого стану, в якому працює середовище: загальний (тривимірний); плоско-деформаційний; осесиметричний та ін.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. На цей час не запропоновано модель, яка враховувала б усі ці вимоги. Нелінійність законів деформування беруть до уваги сучасні моделі теорії пластичності, вплив внутрішнього тертя – моделі «мікродеформування» і моделі нелінійної механіки ґрунтів. Залежність закономірностей деформування від виду напруженого стану можна не враховувати, якщо лабораторні дослідження проводити у тих самих умовах, в яких працює середовище.

Постановка завдання. Для обґрунтування найбільш раціонального напрямку досліджень цієї проблеми необхідно провести аналіз відомих реологічних моделей щодо їхньої відповідності сформульованим вимогам. **Метою** цієї статті є обґрунтування вибору найбільш раціонального класу реологічних моделей для описання напружено-деформованого стану середовища з суттєвим внутрішнім тертям.

Основний матеріал і результати. Моделі «мікродеформування»

Моделі «мікродеформування» розглядають середовище як набір макрочастинок, з'єднаних між собою особливими односторонніми контактами, що не сприймають дію розтягуючих зусиль і чинять опір зовнішньому навантаженню тільки за рахунок сил тертя, які виникають за наявності нормальних стискуючих зусиль в зоні контакту.

Залежність між силами опору T контакту і нормальним зусиллям N відповідає умові Амонта-Кулона $T = N \cdot f$, яка описує закон сухого кулонового тертя у контактах частинок.

Для переходу від одиничних мікроконтактів до середовища з безліччю контактів необхідно задатись структурою укладки однорідних чи різнорідних частинок, статистичним розподілом одиничних контактів, іноді ймовірнісними законами розподілу контактних зусиль в масиві матеріалу. Перехід від зусиль і взаємних зсувів в хаотично орієнтованих мікроконтактах до напружень та деформацій в точці середовища фактично означає заміну початково дискретної моделі «мікродеформування» на континуальну.

Детальний опис моделей, що ґрунтуються на «мікропідході», наведений у монографії І. І. Кандаурова [1].

Ідеї «мікродеформування» використовувались при розв'язанні інженерних задач. Наприклад, Г. І. Покровський запропонував використовувати модель зернистих середовищ для розрахунків дорожнього полотна. Р. А. Мюлер [2] використав дискретну модель у розрахунках підірних стін та фундаментів, І. І. Кандауров [1] розробив балочну дискретну модель тріщинуватих гірських масивів. Особливості кінематики частинок сипкого середовища за підірною стінкою при її великих зміщеннях розглянуті в роботі В. Т. Бугаєва та В. В. Ковтуна [3].

Слід відмітити, що моделі мікродеформування в більшості випадків є бездеформаційними, і, в кращому разі, можуть відобразити тільки вплив внутрішнього тертя у граничній стадії деформування, але не дозволяють описати особливості деформування матеріалів з суттєвим внутрішнім тертям в дограничній стадії.

Описання деформованого стану середовища з позицій «мікропідходу» пов'язано, як вже відмічалось, з переходом від розгляду переміщень у контактах частинок до переміщень і деформацій в кожній точці середовища з безліччю хаотично орієнтованих контактів. Це вимагає статистичного узагальнення результатів величезного об'єму експериментальних даних щодо форми, розмірів, структури укладки частинок, характеру контактів і їх ймовірнісного розподілу по розрахунковій області. Тому такий підхід не вдається реалізувати в конкретних інженерних розрахунках. Однак, теоретичні та експериментальні дослідження щодо можливості використання «мікропідходу» для описання напружено-деформованого стану середовища продовжуються. В роботах К. L. Lee, R. W. Rowe, M. Oda, H. Matsuoka, Г. Андреасяна та ін. розглядалися моделі середовища, що заповнено набором куль, циліндрів чи тілами іншої форми з регулярною чи ймовірнісною укладкою, з різними ступенями вільності переміщень і т. ін. Теоретичні співвідношення моделей порівнювались з результатами спеціальних експериментів. Найбільш відомими є експериментальні дослідження, що проведені науковцями Міннесотського, Іллінойського та Кембриджського університетів, а також дослідження на дискретних моделях Г. Дересевича, Тейлора – Шнеебелі, М. Ода та ін. В цих дослідженнях використовувалась найсучасніша на свій час експериментальна база та потужні комп'ютерні програми для ймовірнісного описання вихідних даних і операцій з ними.

Аналіз запропонованих за результатами цих досліджень моделей дозволяє зробити висновок, що в жодному випадку при формуванні визначальних співвідношень не було фундаментально обґрунтовано

перехід від дискретних характеристик (зусиль та переміщень у контактах частинок) до тензорних характеристик суцільного середовища – напружень та деформацій в точці. По суті, автори моделей з самого початку використовували для формулювання визначальних співвідношень атрибути механіки твердого деформівного тіла: напруження, деформації з деякими додатковими характеристиками мікроконтактів.

Враховуючи сказане, можна зробити висновок, що моделі «мікродеформування» здатні описати вплив внутрішнього тертя в граничному стані середовища, але не враховують інших особливостей його деформування.

Для врахування нелінійності законів деформування («фізичної нелінійності») запропоновано багато моделей теорії пластичності.

Моделі теорії пластичності деформаційного типу

Моделі цього класу, як і інші моделі механіки твердого деформівного тіла, під час формулювання крайової задачі використовують три групи рівнянь: рівняння рівноваги; геометричні рівняння нерозривності деформацій і фізичні рівняння, які пов'язують напруження, що виникають у розрахунковій області, з досягнутими (кінцевими) деформаціями матеріалу.

Рівняння рівноваги і геометричні рівняння не залежать від виду матеріалу й справедливі за умови малості деформацій.

Фізичні ж рівняння відображають особливості деформування матеріалу. Їх характер встановлюється за результатами спеціальних лабораторних випробувань макрозразків матеріалу.

В класичній теорії пластичності розглядають активний (монотонне зростання навантаження) та пасивний (розвантаження і наступне навантаження) процеси деформування. Для описання активного процесу деформування використовують апарат нелінійної теорії пружності. Пасивне ж деформування описується лінійною залежністю між напруженнями та деформаціями.

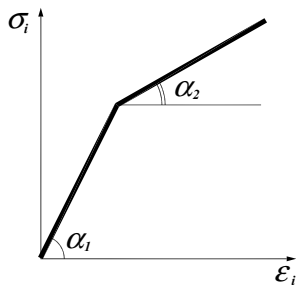


Рис. 2. Білінійна діаграма

Експериментальні дослідження закономірностей деформування матеріалів з суттєвим внутрішнім тертям показали, що в них з самого початку навантаження виникають як пружні, так і залишкові деформації, а залежність «напруження – деформації» є суцільно нелінійною і набагато складнішою ніж залежності, що характерні для твердих матеріалів.

Деформаційні моделі теорії пластичності, розроблені для твердих матеріалів, використовувались для оцінки напружено-деформівного стану ґрунтового середовища. Найчастіше розглядалися різні модифікації моделей малих пружно-пластичних деформацій.

В. В. Гапонов [4] розглянув задачу щодо оцінки напружено-деформованого стану плоскої області, заповненої сипким матеріалом з білінійною діаграмою деформування (рис. 2). Результати розв'язків на основі цієї моделі експериментально не перевірялись.

О. К. Фрьоліх [5] запропонував нелінійну модель ґрунтового середовища як набір лінійних моделей шляхом введення умовних коефіцієнтів концентрації.

Проведений М. В. Малишевим аналіз показав, що модель Фрьоліха еквівалентна моделі теорії пружності зі степеневим законом формозміни, в якому показник степені залежить від коефіцієнта Пуассона.

Модель О. К. Фрьоліха використовувалась для моделювання взаємодії елементів конструкцій з ґрунтовим середовищем. Однак необхідність призначення коефіцієнтів концентрації у кожному конкретному випадку, а також не використання фізичних залежностей «напруження – деформації» в явній формі, не дозволяють рекомендувати цю модель для описання деформацій середовища з внутрішнім тертям.

Багато науковців для досліджень напружено-деформованого стану ґрунтового середовища використовували моделі пластичного деформування зі степеневим законом формозміни.

М. В. Малишев [6] одержав розв'язок задачі про дію зосередженої сили на нелінійно деформівну півплощину. Автором прийняті такі закони деформування:

$$\epsilon_0 = \left(\frac{\sigma_0}{D} \right)^{1/\alpha} ; \quad \gamma_0 = \left(\frac{\tau_0}{A} \right)^{1/\alpha} , \tag{1}$$

де α, A, D – параметри апроксимації експериментальних кривих; $\sigma_0, \tau_0, \epsilon_0, \gamma_0$ – октаедричні напруження і деформації.

Ю. К. Зарецький [7] розглянув плоску контактну задачу для площини, що деформується за законом

$$\gamma_0 = \left(\frac{\tau_0}{A} \right)^\alpha , \quad \epsilon_0 = 0 . \tag{2}$$

Задачу про дію зосередженої сили на півплощину, що заповнена матеріалом зі степеневим зміцненням, розв'язав В. В. Соколовський [8]. Розв'язок проводився методом напружень. Виразів для переміщень не одержано.

Загальний розв'язок задачі для плоскої області, яка деформується згідно степеневому закону, отримав Н. Х. Арутюнян [9]. Задача розв'язувалась методом переміщень. Вирази для напружень та переміщень одержано в замкненій формі. На основі загального розв'язку Н. Х. Арутюнян розглянув ряд

важливих задач інженерної механіки: вдавлювання жорсткого штампа зосередженою силою чи моментом; вдавлювання жорсткого клину та ін.

Обґрунтування можливості використання степеневих моделей В. В. Соколовського, Ю. К. Зарецького, М. В. Малишева, Н. Х. Арутюняна та ін. для описання напружено-деформованого стану середовища з суттєвим внутрішнім тертям вимагає порівняння результатів теоретичного розв'язання конкретних задач з результатами їх експериментального моделювання, що само по собі є технічно складною задачею.

Аналіз відомих даних показує, що розбіжності між теоретичними і експериментальними результатами в першу чергу викликані тим, що прийнятий у розрахунках степеневий закон деформування не враховує інших особливостей деформування середовища з суттєвим внутрішнім тертям – впливу внутрішнього кулонового тертя та ефекту дилатансії.

Вплив внутрішнього тертя на усіх етапах деформування відображають відомі фізично-нелінійні моделі механіки ґрунтів.

Моделі нелінійної механіки ґрунтів, що враховують вплив внутрішнього тертя

Лабораторні дослідження процесу деформування матеріалів показали, що внутрішнє тертя впливає на особливості їх деформування не тільки у граничній, але і в дограничній стадії. Вплив внутрішнього тертя на деформування матеріалів у дограничній стадії достатньо повно відображають моделі нелінійної механіки ґрунтів деформаційного типу [10], [11].

Першою моделлю цього класу, ймовірно, була модель А. І. Боткіна [12]. Закон зміни об'єму приймався автором у вигляді лінійної залежності між першим інваріантом тензора напружень σ_0 і першим інваріантом тензора деформацій ϵ_0 .

Закон формозміни, на відміну від теорії пластичності твердих матеріалів, враховує вплив середнього стискуючого напруження σ_0 на опір зсуву τ_0 і записується у вигляді дробово-лінійної функції

$$\frac{\tau_0}{\sigma_0} = \frac{A\gamma_0}{B + \gamma_0}, \quad (3)$$

де σ_0 , τ_0 , γ_0 – напруження і деформації по октаедричній площині; A , B – експериментальні параметри.

Графіки нелінійних фізичних залежностей А. І. Боткіна показані на рис. 3, а у безрозмірних координатах і у вигляді зрізів інваріантної поверхні «напруження – деформації» – на рис. 3, б.

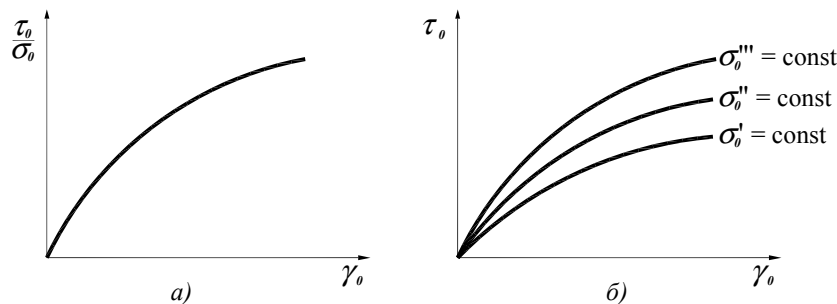


Рис. 3. Залежності «напруження – деформації» моделі А.І. Боткіна

Фізичні залежності А. І. Боткіна (3) враховують дві принципові особливості деформування матеріалів – суттєву нелінійність законів формозміни і вплив внутрішнього кулонового тертя. Тому вони привернули увагу багатьох науковців в області інженерної механіки.

Складні нелінійні залежності А. І. Боткіна не дозволяють отримати аналітичний розв'язок крайових задач інженерної механіки. Але поява потужної комп'ютерної техніки відкрила можливість розв'язання цих задач чисельними методами.

Чисельні розв'язки задач інженерної механіки з використанням залежностей А. І. Боткіна отримали Є. Ф. Винокуров [13], Ю. К. Зарецький [14], М. В. Малишев [15], В. Н. Широков, В. І. Соломін [16] та ін.

О. А. Дорофєєв [17] розглянув задачу взаємодії елементів машин з дискретним середовищем, використавши замість залежностей А. І. Боткіна запропоновану В. В. Ковтуном [18] степеневу залежність

$$\tau_0 = A\sigma_0\gamma_0^\alpha. \quad (4)$$

Дробово-лінійна (3) і степенева (4) функції добре описують вплив на деформування матеріалів внутрішнього кулонового тертя, але не відображають інші принципові особливості їх деформування – прояв дилатансії та залежність законів деформування від виду напружено-деформованого стану. Ці функції сформульовані у вигляді співвідношень між напруженнями τ_0 , σ_0 і деформаціями γ_0 , що виникають по октаедричним, рівнонахиленим до головних осей площинам. В інженерній практиці найбільший інтерес викликають «плоскі задачі», наприклад, задачі оцінки контактної взаємодії протяжних споруд з

середовищем, коли в ньому виникає плоско-деформований напружений стан. В умовах «плоскої деформації» переміщення частинок середовища можуть відбуватись тільки в площині, що перпендикулярна одній з головних осей, і ні в якому разі не в октаедричній площині.

Тому фізичні рівняння (3), (4) не мають чіткого фізичного змісту для плоскої задачі і можуть розглядатись тільки як формальні співвідношення. У зв'язку з цим з'явилися моделі, орієнтовані на конкретний вид напружено-деформованого стану: вісесиметричного, плоско-деформованого і т.п.

Ф. М. Шихієв [19] запропонував «кінематичну» модель ґрунтового середовища, орієнтовану на розв'язок плоскої задачі. Модель ґрунтується на двох визначаючих залежностях.

Закон об'ємного деформування прийнятий автором згідно принципу «еквівалентних» моделей.

Закон формозміни формулюється як співвідношення між напруженнями τ_α , σ_α і деформаціями γ_α за потенціальними площинками ковзання (рис. 4) –

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{кр}}, \quad (5)$$

де ρ – максимальний кут відхилення повного напруження від нормалі; φ – кут внутрішнього тертя (граничне значення кута ρ); γ_α , $\gamma_{кр}$ – деформації по площинкам зсуву в дограничному та граничному станах.

Отже, закон формозміни (5) сформульовано не як залежність між інваріантами тензорів напружень і деформацій, а як залежність між відношенням напружень та відношенням деформацій по умовних площинках.

Повна система статичних, геометричних і фізичних рівнянь зведена автором до нелінійного диференціального рівняння четвертого порядку, ефективного розв'язання якого не знайдено.

Г. А. Генієв [20] запропонував аналогічну модель жорстко-пружно-пластичного середовища, закон формозміни якого описується тензорним співвідношенням

$$\tau_{ij} = G_{зм} \gamma_{ij}, \quad (6)$$

де τ_{ij} – дотичні напруження; γ_{ij} – деформації зсуву; $G_{зм}$ – змінний модуль зсуву, величина якого залежить від напруженого стану в кожній точці середовища, від умовного коефіцієнта внутрішнього тертя λ , який, очевидно, пов'язаний з нормальними стискуючими напруженнями.

Фізичні рівняння моделі Г. А. Генієв записує у формі рівнянь Генкі, у які вводить змінний модуль зсуву $G_{зм}$. Залежність $G_{зм} = f(\lambda)$ показана на рис. 5. Умова $\lambda = 1$ визначає у просторі напружень

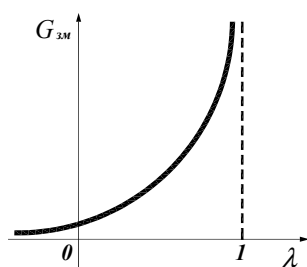


Рис. 5. Графік залежності моделі Г.А. Генієва

«жорстку» недеформівну область. Деформації матеріалу виникають тільки в точках, що лежать зовні цієї поверхні.

Ця особливість унеможливує використання моделі для оцінки напружено-деформованого стану дискретного середовища в дограничній області.

За результатами аналізу описаних моделей механіки ґрунтів деформаційного типу можна зробити висновки, що вони відображають дві принципові особливості деформування матеріалів з суттєвим внутрішнім тертям – нелінійність співвідношень «напруження-деформації» і вплив внутрішнього кулонового тертя на закони деформування цих матеріалів. Але прийняті авторами закони об'ємного деформування не

описують характерний для матеріалів з внутрішнім тертям прояв дилатансії – виникнення об'ємних деформацій при зсувах.

Описання дилатансії виявилось складною науково-технічною проблемою, яка не має вирішення вже понад півтора сторіччя.

Дилатансійні моделі деформаційного типу

Прояв дилатансії на процес деформування матеріалів в деякій мірі може бути описаний за допомогою дилатансійних співвідношень моделей механіки ґрунтів деформаційного типу.

Мабуть першим, хто запропонував такі співвідношення, був професор Г. М. Ломідзе зі своїми учнями.

Автори [21] запропонували закон зміни об'ємних деформацій ϵ_0 ґрунтів шукати у вигляді

експериментальної функції середнього нормального напруження σ_0 , інтенсивності напружень σ_i і параметра Лоде μ_σ , який визначає вид напружено-деформованого стану

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma_0, \sigma_i, \mu_\sigma). \quad (7)$$

Задача експериментального встановлення виду цієї функції, враховуючи її складність, є практично нездійсненною.

Проте, запропонований Г. М. Ломідзе підхід намагались реалізувати багато дослідників.

Послідовниками Г. М. Ломідзе запропоновано представляти об'ємну деформацію ε_0 в умовах плоскої деформації як суму об'ємної деформації ε_0^r від дії середнього стискуючого напруження σ_0 і дилатансійної складової ε_0^d , залежної від зсувів –

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^r + \varepsilon_0^d. \quad (8)$$

Запропоновано такий характер функцій

$$\varepsilon_0^r = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 a + b}, \quad \varepsilon_0^d = \left(\alpha \varepsilon_i^\beta - \lambda \varepsilon_i \right) \left[1 + \frac{\sigma_0}{P_a} \operatorname{tg} \rho (1 + \mu_\sigma) \right], \quad P_a = 10 \text{ КПа},$$

в яких ε_i – інтенсивність деформацій; $\operatorname{tg} \rho$ – параметр міцності по Боткіну; a , b , α , β – експериментальні параметри; λ – коефіцієнт дилатансії; P_a – умовно введений коефіцієнт для збереження розмірностей у формулі.

Подібні співвідношення приймалися у розрахунках іншими науковцями.

В. Г. Столяров [22] запропонував дві фізичні залежності, що описують закономірності формозміни і об'ємного деформування, замінити однією у вигляді функції відносних узагальнених характеристик напруженого і деформованого станів, відповідно – $D_\sigma = \frac{\sigma_i}{3\sigma_0}$, $D_\varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}$. Залежність «напруження – деформації» приймається у вигляді дробово-лінійної функції

$$D_\varepsilon = \frac{B D_\sigma}{A - D_\sigma}, \quad (9)$$

де A і B – експериментальні параметри.

Дилатансійні співвідношення моделей деформаційного типу пропонували В. Ladanyi, Г. А. Генієв, Ю. К. Зарецький, Р. А. Vermeer та інші.

Слід звернути увагу на те, що в розглянутих моделях механіки ґрунтів деформацію середовища у фізичних співвідношеннях пов'язують не з інтенсивністю напружень σ_i , як у класичній теорії пластичності, а з відношенням дотичних і нормальних напружень. Ця особливість відображає вплив внутрішнього кулонового тертя і прояв дилатансії при деформуванні матеріалу не тільки в граничній, але й у дограничній стадії.

Загальним недоліком моделей деформаційного типу є те, що їхні фізичні співвідношення формулюються як залежності між напруженнями і досягнутими деформаціями. Це не дозволяє описати вплив на процес деформування послідовності (історії) навантажень, оскільки закони деформування дискретних матеріалів при активному і пасивному процесі навантаження є різними, і одним і тим напруженням можуть відповідати різні деформації.

Вплив «історії» навантаження можна описати за допомогою моделей пластичного плинину.

Дилатансійні моделі пластичного плинину

В теорії пластичності твердого тіла крім моделей деформаційного типу використовується клас моделей пластичного плинину, фізичні співвідношення яких формуються як залежності між напруженнями $\{\sigma\}$ і швидкостями деформацій $\{d\varepsilon\}$, а не між напруженнями $\{\sigma\}$ і досягнутими деформаціями $\{\varepsilon\}$.

Для визначення компонентів швидкостей деформації вводиться [23] потенціальна функція $\Phi(\{\sigma\})$

$$\{d\varepsilon\} = d\lambda \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}}, \quad (10)$$

де $d\lambda$ – множник Лагранжа.

Якщо за потенціальну функцію приймається умова переходу в пластичний стан, співвідношення (10) будуть відповідати асоційованому закону пластичного плинину, усі інші – неасоційованим законам.

За аналогією з теорією пластичності твердого тіла моделі пластичного плинину пропонувались для

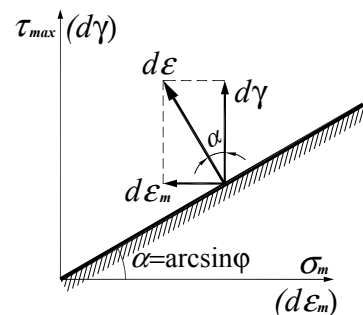


Рис. 6. Швидкості деформацій у моделі Друкера – Прагера

описання поведінки ґрунтів. В цих модифікованих моделях замість умов пластичності Сен-Венана чи Мізеса використовувались характерні для матеріалів з внутрішнім тертям умови переходу у граничний стан – умови Мора – Кулона або Боткіна.

Можливість використання умови Мора – Кулона як потенціальної функції для плоскої деформації середовища вперше продемонстровано у роботі Д. Друкера і У. Прагера [24].

За потенціальну функцію $\Phi(\{\sigma\})$ в моделі прийнята умова Мора – Кулона, яка записана в інваріантній формі як відношення максимального дотичного напруження τ_{\max} до середнього нормального напруження σ_m

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_m} = \sin \varphi. \quad (11)$$

Ця залежність у площині інваріантів $\tau_{\max} - \sigma_m$ зображується прямою (рис. 6). На рисунку вісі напружень σ_m , τ_{\max} суміщені з осями швидкостей деформацій $d\varepsilon_m$, $d\gamma$.

Визначальне співвідношення моделі має вигляд

$$\Delta = \frac{d\varepsilon_m}{d\gamma} = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_m} = \sin \varphi. \quad (12)$$

Безрозмірна величина Δ отримала назву коефіцієнта дилатансії. Співвідношення (12) відображає дві органічно пов'язані між собою принципові особливості деформування матеріалів – вплив внутрішнього кулонового тертя і прояв дилатансії.

Лабораторна перевірка співвідношення виявила, що теоретична величина Δ значно перевищує визначену експериментально. Наприклад, кут внутрішнього тертя φ сухого піску становить близько 30° ($\Delta = \sin 30^\circ = 0,5$). В досліджах же А. С. Строганова швидкість дилатансії щільного піску була $\Delta = 0,239$ ($\sin 14^\circ$), в досліджах Р. Roscoe і С. Фрідмана величина Δ змінювалась від $\Delta = 0,1$ до $\Delta = 0,35$. Відмічалось також не тільки розпушення, але й ущільнення пухких пісків.

Вказані розбіжності намагались ліквідувати шляхом розробки дилатансійних моделей пластичного плинину, співвідношення яких задаються довільно і не асоціюються з умовою граничного стану. Такі моделі пропонували Ю. М. Работнов, В. М. Ніколаєвський, А. С. Строганов, М. В. Малишев, Ю. К. Зарецький, А. Sowczuk, P. Stytz та інші. В більшості випадків запропоновані авторами теоретичні співвідношення не підтверджені експериментально щодо можливості їх використання для матеріалів з внутрішнім тертям.

Вибір потенціальної функції $\Phi(\{\sigma\})$, яка не асоціюється з умовою граничного стану, вимагає всебічного попереднього обґрунтування. Довільне призначення функції може призвести до суттєвих розбіжностей теоретичних і експериментальних даних у зв'язку з можливим порушенням принципу збереження енергії.

В інженерній механіці широко відомі моделі критичного стану (МКС), запропоновані групою науковців Кембриджського університету під керівництвом К. Roscoe [25] (моделі «Cam-Clay» і «Granta-gravel»).

Згідно з припущенням авторів середовище деформується тільки після досягнення граничного стану. Моделі критичного стану не описують дограничне деформування, тому безпосередньо не можуть бути використаними для оцінки напружено-деформованого середовища з суттєвим внутрішнім тертям.

Характерною особливістю розглянутих дилатансійних моделей пластичного плинину є те, що їх потенціальні функції пов'язують відношення дотичних τ і нормальних σ напружень з відношенням швидкостей об'ємних та зсувних деформацій. Це дозволяє відобразити найважливіші особливості граничного деформування дискретних матеріалів – вплив внутрішнього тертя та дилатансію, а також врахувати «історію» навантаження. Не вирішеними залишаються питання описання напружено-деформованого стану середовища на дограничній стадії, а також суттєва залежність визначальних співвідношень моделей від виду напруженого стану і відсутність експериментальних методик встановлення характеру цих співвідношень.

Висновки. Аналіз описаних реологічних моделей дозволяє зробити висновок, що для описання контактної взаємодії середовища з внутрішнім тертям і інженерних конструкцій найбільш раціональними можна вважати моделі теорії пластичності, але з особливими, характерними для цих матеріалів, законами деформування, які відображають вплив внутрішнього тертя і прояв дилатансії. Ці закони встановлюються експериментально.

Для розробки таких моделей і впровадження їх в інженерну практику необхідно розробити спеціальні методики лабораторних випробувань макрозразків матеріалу при різних схемах навантаження, в першу чергу, в умовах плоскої деформації і створити лабораторне обладнання для їх реалізації.

Література

1. Кандауров И. И. Механика зернистых сред и её применение в строительстве / И. И. Кандауров. – Л., М.: Стройиздат, 1966. – 318 с.
2. Мюлер Р. А. К статической теории распределения напряжений в зернистом грунтовом основании / Р. А. Мюлер // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1962. – № 4. – С. 10–12.
3. Бугаев В. Т. Кинематика частичек сыпучей среды при смещении ограждения / В. Т. Бугаев, В. В. Ковтун // Инженерные сооружения и оборудование морских портов : сб. науч. тр. – М.: Мортехинформреклама, 1985. – С. 11–15.
4. Гапонов В. В. Про переміщення в сипких грунтах, які перебувають у граничній рівновазі / В. В. Гапонов // Прикладна механіка. – 1959. – Т. 2. Вип. 1. – С. 52–61.
5. Фрелих О. К. Распределение давления в грунте / О. К. Фрелих. – М.: Издательство наркомхоза РСФСР, 1938. – 188 с.
6. Малышев В. М. Распределение напряжений и деформаций в нелинейно деформируемом основании, нагруженном сосредоточенной силой / В. М. Малышев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1963. – № 3. – С. 7–11.
7. Зарецкий Ю. К. Статика и динамика грунтовых плотин / Ю. К. Зарецкий, В. Н. Ломбардо. – М.: Энергия, 1983. – 256 с.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М.: Гостехтеориздат, 1950. – 243 с.
9. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала / Н. Х. Арутюнян. // Известия АН Армянской ССР. Серия физико-технических наук. – 1959. – Вып. 2. – С. 176–188.
10. Николаевский В. Н. Современные проблемы механики грунтов / В. Н. Николаевский // Определяющие законы механики грунтов. – М., 1975. – С. 210–227.
11. Скотт Р. Ф. Пластичность и соотношения состояния в механике грунтов / Р. Ф. Скотт // Американское общество гражданских инженеров. Отделение геомеханики. Журнал геотехники. – 1985. – Т. 3, № 5. – С. 215–225.
12. Боткин А. И. Исследование напряженного состояния в сыпучих и связных грунтах / А. И. Боткин // Известия ВНИИГ. – 1939. – Т. 24. – С. 3–41.
13. Винокуров Е. Ф. Итерационный метод расчетов оснований и фундаментов с помощью ЭВМ / Е. Ф. Винокуров. – Минск: Наука и техника, 1968. – 243 с.
14. Зарецкий Ю. К. К расчету ленточных фундаментов на нелинейно-деформируемом неоднородном основании / Ю. К. Зарецкий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1965. – № 1. – С. 7–10.
15. О совместной работе жестких фундаментов и нелинейно-деформируемого основания / [М. В. Малышев, Ю. К. Зарецкий, В. Н. Широков та ін.] // Труды к VIII международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. – М.: Стройиздат, 1973. – С. 97–104.
16. Широков В. Н. Напряженное состояние и перемещения несвязного нелинейно-деформируемого грунтового полупространства под круглым жестким штампом / В. Н. Широков, В. И. Соломин, М. В. Малышев, Ю. К. Зарецкий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1970. – № 1. – С. 2–5.
17. Дорофеев О. А. Математична модель взаємодії елементів машин з дискретним середовищем та методи її реалізації : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / О. А. Дорофеев. – Тернопіль, 2004. – 20 с.
18. Ковтун В. В. Исследование характера нелинейных физических зависимостей несвязных грунтов / В. В. Ковтун // Основания и фундаменты. – Киев: Будівельник, 1975. – Вып. 8. – С. 64–70.
19. Шихиев Ф. М. Об обобщенном напряженном состоянии грунтов / Ф. М. Шихиев // Гидротехника. – 1962. – № 2. – С. 17–20.
20. Гениев Г. А. Об одном варианте теории сыпучей среды / Г. А. Гениев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – Т. 10, № 2. – С. 157–165.
21. Крыжановский А. Л. Эффективность расчета оснований с учетом нелинейных деформационных свойств грунтов / А. Л. Крыжановский, А. С. Чевикин, О. В. Куликов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1975. – № 5. – С. 37–40.
22. Столяров В. Г. Деформируемость нескальных грунтов / В. Г. Столяров // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1981. – № 5. – С. 29–31.
23. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1970. – Т. 2. – 578 с.
24. Drucker D. C. Solid Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design / D. C. Drucker, W. Prager // Quarterly of Applied Mathematics. – 1952. – Vol. 10. – № 2. – P. 157–165.
25. Roscoe K. H. The Influence of Strains in Soil Mechanics / K. H. Roscoe // Geotechnique. – 1970. – Vol. 20. – № 2. – P. 129–170.
26. Ковтун В. В. Основи механіки дискретних матеріалів : монографія / В. В. Ковтун, О. А. Дорофеев. – Хмельницький: ХНУ, 2018. – 131 с.

References

1. Kandaurov I. I. *Mehanika Zernistyh Sred I Ee Primenenie V Stroitel'stve* / I. I. Kandaurov. – L., M.: Stroyizdat, 1966. – 318 S.
2. Myuler R. A. K staticheskoy teorii raspredeleniya napryazheniy v zernistom gruntovom osnovanii / R. A. Myuler // *Osnovaniya, fundamenti i mehanika gruntov*. – 1962. – № 4. – S. 10–12.
3. Bugaev V. T. Kinematika chastichek sypuchey sredy pri smeschenii ograzhdeniya / V. T. Bugaev, V. V. Kovtun // *Inzhenernye sooruzheniya i oborudovanie morskikh portov*: sb. nauch. tr. – M.: Morteinformreklama, 1985. – S. 11–15.
4. Haponov V. V. Pro peremishchennia v sypkykh gruntakh, yaki perebuvaui u hranychnii rinvovazi / V. V. Haponov // *Prykladna mekhanika*. – 1959. – T. 2. Vyp. 1. – S. 52–61.
5. Frel'ih O. K. Raspredelenie davleniya v grunte / O. K. Frel'ih. – M.: Izdatel'stvo narkomhoza RSFSR, 1938. – 188 s.
6. Malyshev V. M. Raspredelenie napryazheniy i deformatsiy v nelineynoy deformiruemom osnovanii, nagruzhenom sosredotochennoy siloy / V. M. Malyshev // *Osnovaniya, fundamenti i mehanika gruntov*. – 1963. – № 3. – S. 7–11.
7. Zareckiy Yu. K. Statika i dinamika gruntovykh plotin / Yu. K. Zareckiy, V. N. Lombardo. – M.: Energiya, 1983. – 256 s.
8. Sokolovskiy V. V. Teoriya plastichnosti / V. V. Sokolovskiy. – M.: Gostehizdat, 1950. – 243 s.
9. Arutyunyan N. H. Ploskaya kontaktnaya zadacha teorii plastichnosti so stepennym uprochneniem materiala / N. H. Arutyunyan. // *Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Seriya fiziko-tekhnicheskikh nauk*. – 1959. – Vyp. 2. – S. 176–188.
10. Nikolaevskiy V. N. Sovremennyye problemy mehaniki gruntov / V. N. Nikolaevskiy // *Opredelyayuschie zakony mehaniki gruntov*. – M., 1975. – S. 210–227.
11. Skott R. F. Plastichnost' i sootnosheniya sostoyaniya v mehanike gruntov / R. F. Skott // *Amerikanskoe obschestvo grazhdanskikh inzhenerov. Otdelenie geomekhaniki. Zhurnal geotekhniki*. – 1985. – T. 3, № 5. – S. 215–225.
12. Botkin A. I. Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya v sypuchih i svyaznykh gruntah / A. I. Botkin // *Izvestiya VNIIG*. – 1939. – T. 24. – S. 3–41.
13. Vinokurov E. F. Iteratsionnyy metod raschetov osnovaniy i fundamentov s pomosh'yu EVM / E. F. Vinokurov. – Minsk: Nauka i tekhnika, 1968. – 243 s.
14. Zareckiy Yu. K. K raschetu lentochnykh fundamentov na nelineynoy deformiruemom neodnorodnom osnovanii / Yu. K. Zareckiy // *Osnovaniya, fundamenti i mehanika gruntov*. – 1965. – № 1. – S. 7–10.
15. O sovmestnoy rabote zhestkikh fundamentov i nelineynoy deformiruemogo osnovaniya / [M. V. Malyshev, Yu. K. Zareckiy, V. N. Shirokov ta in.] // *Trudy k VIII mezhdunarodnomu kongressu po mehanike gruntov i fundamentostroeniya*. – M.: Stroyizdat, 1973. – S. 97–104.
16. Shirokov V. N. Napryazhennoe sostoyanie i peremescheniya vesomogo nelineynoy deformiruemogo gruntovogo poluprostranstva pod kruglym zhestkim shtampom / V. N. Shirokov, V. I. Solomin, M. V. Malyshev, Yu. K. Zareckiy // *Osnovaniya, fundamenti i mehanika gruntov*. – 1970. – № 1. – S. 2–5.
17. Dorofiev O. A. Matematychna model vzaiemodii elementiv mashyn z diskretnym seredovyshechem ta metody yii realizatsii: avtoref. dys. na zdobuttia nauk. stupenia kand. tekhn. nauk: spets. 01.05.02 "Matematychni modeliuvannia ta obchysluvalni metody" / O. A. Dorofiev. – Ternopil, 2004. – 20 s.
18. Kovtun V. V. Issledovanie haraktera nelineynykh fizicheskikh zavisimostey nesvyaznykh gruntov / V. V. Kovtun // *Osnovaniya i fundamenti*. – Kiev: Budivelnik, 1975. – Vyp. 8. – S. 64–70.
19. Shihiev F. M. Ob obobshchennom napryazhennom sostoyanii gruntov / F. M. Shihiev // *Gidrotehnika*. – 1962. – № 2. – S. 17–20.
20. Geniev G. A. Ob odnom variante teorii sypuchey sredy / G. A. Geniev // *Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy*. – 1965. – T. 10, № 2. – S. 157–165.
21. Kryzhanovskiy A. L. Effektivnost' rascheta osnovaniy s uchedom nelineynykh deformatsionnykh svoystv gruntov / A. L. Kryzhanovskiy, A. S. Chevikin, O. V. Kulikov // *Osnovaniya, fundamenti i mehanika gruntov*. – 1975. – № 5. – S. 37–40.
22. Stolyarov V. G. Deformiruemost' neskal'nykh gruntov / V. G. Stolyarov // *Osnovaniya, fundamenti i mehanika gruntov*. – 1981. – № 5. – S. 29–31.
23. Sedov L. I. *Mehanika sploshnoy sredy* / L. I. Sedov. – M.: Nauka, 1970. – T. 2. – 578 s.
24. Drucker D. C. *Solid Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design* / D. C. Drucker, W. Prager // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1952. – Vol. 10. – № 2. – P. 157–165.
25. Roscoe K. H. The Influence of Strains in Soil Mechanics / K. H. Roscoe // *Geotechnique*. – 1970. – Vol. 20. – № 2. – P. 129–170.
26. Kovtun V. V. Osnovy mekhaniky diskretnykh materialiv: monohrafiya / V. V. Kovtun, O. A. Dorofiev. – Khmelnytskyi: KhNU, 2018. – 131 s.

Рецензія/Peer review : 20.5.2019 р.

Надрукована/Printed : 2.6.2019 р.

Рецензент: д.т.н., проф. Харжевський В.О.