7. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W. (2004). Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary. *Journal of Elasticity, 77 (2)*, 95-122.

8. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W.L. (2003). Hierarchical Models for Elastic Cusped Plates and Beams. *Lecture Notes of TICMI, 4*.

9. Meunargia T. (1999). On one method of construction of geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells. *Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences, 119*, 133-154.

10. Mikhlin S.G. (1970). Variational Methods in Mathematical Physics. Moscow: Nauka (in Rus.)

11. Bitsadze A. (1981). *Some Classes of Partial Differential Equations*. Moscow: Nauka (in Rus.)

12. Vekua I. (1948). *New Methods of Solution of Elliptic Equations*. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat (in Rus.)

Анотація. М. Габелая. Про відхилення призматичної оболонки, експоненціально зростаючої на нескінченності, в N=0 апроксимації ієрархічних моделей. *При* $N=0$ *апроксимації ієрархічних моделей вивчається корректно поставлена крайова задача для рівняння відхилення призматичної оболонки, експоненціально зростаючої на нескінченності,. Сформульовано та досліджено наступну задачу*

$$h = h_0 e^{-\kappa(x_1^2+x_2^2)}, \quad h_0 = const > 0, \quad \kappa = const \ge 0, \quad x_1 \in (-\infty,+\infty), \quad x_2 \ge 0 .$$

Подано явний вигляд розв'язку рівняння в інтегральній формі.

Ключові слова: загострена призматична оболонка, загострена пластинка, ієрархічні моделі, еліптичні рівняння, рівняння в частинних похідних, вироджені диференціальні рівняння в частинних похідних.

Одержано редакцією 10.08.2016 Прийнято до друку 15.09.2016

УДК 517.928.1 PACS 02, 03, 05, 06, 07

И. В. Атамась

ПЛОЩАДЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ХУКУХАРЫ

Получены явные формулы для вычисления площади решения разностных уравнений Хукухары в пространстве $conv\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: Разность Хукухары, смешанная площадь Минковского, метод сравнения Чаплыгина–Важевского, разностные уравнений, динамические системы, метрика Хаусдорфа.

Введение

Теория динамических систем в полулинейном метрическом пространстве $conv\mathbb{R}^n$ активно развивается в последние годы как часть математического анализа в метрических пространствах. Основные результаты, касающиеся дифференциальных уравнений в пространстве $conv\mathbb{R}^n$ подытожены в монографии [1], где рассмотрены вопросы общей теории и качественного анализа, в частности, для разностных уравнений обобщены теоремы прямого метода Ляпунова. Разностные уравнения Хукухары также исследовались в работе [2]. Общие вопросы теории разностных уравнений в банаховых пространствах изучены в монографии [3]. В работах [4, 5] исследованы вопросы устойчивости динамических систем в пространстве $conv\mathbb{R}^n$, в частности, в этих работах впервые предложено использовать классическую геометрическую теорию Минковского–Александрова для исследования устойчивости. В пределах этого научного направления актуальной задачей является вычисление площади решений разностных уравнений Хукухары. В настоящей работе этот вопрос решается в предположении, что линейный оператор A является устойчивым.

Пусть $x \in conv\mathbb{R}^n$ – метрическое пространство непустых выпуклых компактов с метрикой Хаусдорфа. В этом пространстве можно ввести структуру линейной полугруппы, определив операцию сложения Минковского и умножения на неотрицательный скаляр [1]. Разность Хукухары определяется как действие (частичная операция) обратное сложению Минковского [1].

Рассмотрим разностное уравнение

$$\Delta_H X_n = AX_n, \tag{1}$$

где Δ_H – разностный оператор Хукухары, $x_n \in conv\mathbb{R}^n$, A – расширение линейного оператора $A \in L\left(\mathbb{R}^2\right)$ на пространство $conv\mathbb{R}^n$, определенное следующим образом для $x \in conv\mathbb{R}^n$ полагаем

$$AX = \left\{ Ax | x \in X \right\} \in conv\mathbb{R}^2.$$

В этой работе предполагается, что линейный оператор A – устойчивый, т.е. $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left\|A^k\right\| < +\infty$. Вследствие теоремы Б. Секефальви-Надя [3], $\det A = 1$.

Обозначим $S\left[X, X\right]$ – площадь выпуклого компакта $x \in conv\mathbb{R}^n$, тогда $S\left[X, Y\right]$ – функционал смешанной площади Минковского, определяется посредством поляризационного тождества [6]

$$S\left[X+\rho Y, X+\rho Y\right] = S\left[X, X\right] + 2\rho S\left[X, Y\right] + \rho^2 S\left[Y, Y\right], \rho \in \mathbb{R}_+.$$

Целью настоящей работы является вычисление площади решений разностного уравнения Хукухары (1). Для этого используются классические геометрические методы и метод сравнения Чаплыгина–Важевского [7].

1. Вычисление площади решений разностного уравнения Хукухары

Введем вспомогательные последовательности

$$\xi_n^k = S\left[X_n, A^k X_n\right], k \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя свойства функционала смешанной площади Минковского, нетрудно установить, что введенные последовательности $\{\xi_n^k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяют разностным уравнениям

$$\xi_0^{n+1} = S\left[X_{n+1}, X_{n+1}\right] = S\left[X_n + AX_n, X_n + AX_n\right] = \xi_0^n + 2\xi_1^n + \xi_0^n,$$

$$\xi_k^{n+1} = S\left[X_{n+1}, A^k X_{n+1}\right] = S\left[X_n + AX_n, A^k X_n + A^{k+1} X_n\right] = \xi_k^n + \xi_{k+1}^n + \xi_{k-1}^n + \xi_k^n, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Счетная система разностных уравнений

$$\Delta\xi_k^n = \xi_{k-1}^n + \xi_k^n + \xi_{k+1}^n, k \ge 1,\ \Delta\xi_0^n = 2\xi_1^n + \xi_0^n, \tag{2}$$

является системой сравнения для исходного разностного уравнения Хукухары (1). Пусть

$$l_\infty = \left\{ \left(x_0, \ldots, x_k, \ldots \right) \middle| x_i \in \mathbb{R}, \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left| x_k \right| < +\infty \right\}.$$

В l_∞ естественным образом вводится структура банахового пространства при помощи нормы $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} |x_k|$, для любого $x \in l_\infty$.

Покажем, что $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots) \in l_\infty$, где $\xi_k = S\left[X, A^k X\right]$. Действительно, $\|X\| = d_H\left(X, 0\right)$, $X \subset \|X\| K$, где K – единичный круг на плоскости $\mathbb{R}^2$, поэтому, вследствие монотонности функционала смешанной площади Минковского, приходим к неравенству

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} S\left[X, A^k X\right] \le \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|X\|^2 S\left[A^k K, K\right].$$

Вследствие теоремы Секефальви-Надя, существуют ортогональный оператор U и невырожденный оператор T такие, что $A = T^{-1} U T$. Тогда

$$S\left[T^{-1} U^k T K, K\right] = \frac{S\left[U^k TK, TK\right]}{|\det T|} \le \frac{S\left[\|T\| U^k K, \|T\| K\right]}{|\det T|} = \frac{\|T\|^2}{|\det T|} S\left[U^k K, K\right] = \frac{\pi \|T\|^2}{|\det T|}.$$

Поэтому $\sup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} S\left[X, A^k X\right] \le \dfrac{\pi \|T\|^2 \|X\|^2}{|\det T|}$. Далее введем оператор $\Omega : l_\infty \to l_\infty$ по формулам:

$$\left(\Omega \xi\right)_k = \xi_{k-1} + \xi_{k+1}, k \ge 1,\ \left(\Omega \xi\right)_0 = 2\xi_1.$$

Очевидно, что $\Omega \in L\left(l_\infty\right)$.

Тогда систему сравнения (2) запишем в виде абстрактного разностного уравнения:

$$\Delta \xi_n = \left(\Omega + 1\right) \xi_n, \tag{3}$$

отсюда следует

$$\xi_n = \left(\Omega + 2\right)^n \xi_0.$$

Для решения уравнения (3) применим формулу Рисса

$$\left(\Omega + 2\right)^n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma R_\Omega\left(\lambda\right) \left(\lambda + 2\right)^n d\lambda, \tag{4}$$

где Γ – замкнутый контур, ориентированный в положительном направлении, который охватывает спектр $\sigma\left(\Omega\right)$ оператора Ω, $R\left(\lambda, \Omega\right)$ – резольвента оператора Ω,.

Спектр и резольвента оператора Ω, вычисленны в работе [8]. Очевидно, что при любом $\alpha \in \left[0, \pi\right]$ вектор

$$e_\alpha = \left(1, \cos\alpha, \cos 2\alpha, \ldots, \cos k\alpha, \ldots\right) \in l_\infty$$

является собственным вектором оператора Ω, принадлежащим собственному значению $\lambda = 2\cos\alpha$ оператора Ω и, поэтому, $\sigma\left(\Omega\right) \supset \left[-2, 2\right]$. Обратное включение доказывается следующим образом: рассматривается уравнение

$$\left(\Omega - \lambda\right) x = f, f \in l_\infty^{\mathbb{C}}. \tag{5}$$

Известно, что $\lambda \in \rho\left(\Omega\right)$ – резольвентному множеству оператора Ω тогда и только тогда, когда для уравнения для каждого $f \in l_\infty^{\mathbb{C}}$ существует единственное его решение $x \in l_\infty^{\mathbb{C}}$, которое непрерывно зависит от f.

Уравнение эквивалентно разностному уравнению

$$x_{k-1}+x_{k-1}-\lambda x_k=f_k, k=1,2,\ldots \tag{6}$$

с начальным условием

$$2x_1-\lambda x_0=f_0. \tag{7}$$

Предположим, что $\lambda\notin[-2,2]$ и рассмотрим характеристическое уравнение для однородного разностного уравнения, соответствующего уравнению

$$q^2+1=\lambda q.$$

Это уравнение имеет два корня $q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$, причем эти корни не лежат на единичной окружности, поэтому будем считать, что $|q_2(\lambda)|<1$. Пусть

$$G_m(\lambda)=\frac{q_2^{|m|}(\lambda)}{q_2(\lambda)-q_1(\lambda)}.$$

Можно доказать, что последовательность

$$x_k=G_k(\lambda)f_0+\sum_{p=1}^{\infty}(G_{k-p}(\lambda)+G_{k+p}(\lambda))f_p$$

удовлетворяет разностному уравнению начальному условию, причем, выполняется оценка

$$\|x\|_{l_\infty}\le\frac{1}{\sqrt{|\lambda^2-4|}}\left(1+\frac{3}{1-|q_2(\lambda)|}\right)\|f\|_{l_\infty}.$$

Таким образом, $\lambda\in\rho(\Omega)$, следовательно $\mathbb{C}\setminus[-2,2]\subset\rho(\Omega)$, что доказывает $\sigma(\Omega)=[-2,2]$ и $(R(\lambda,\Omega)f)_k=G_k(\lambda)f_0+\sum_{p=1}^{\infty}(G_{k-p}(\lambda)+G_{k+p}(\lambda))f_p$, $k=0,1,\ldots$

Из формулы и представления для резольвенты оператора $R(\lambda,\Omega)$ следует, что

$$\xi_k^n=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma[G_k(\lambda)S[X_0,X_0]+\sum_{p=1}^{\infty}(G_{k-p}(\lambda)+G_{k+p}(\lambda))S\left[X_0,A^pX_0\right](2+\lambda)^n\,d\lambda, \tag{8}$$

$k=0,1,\ldots$

Ряд в подинтегральном выражении сходится равномерно по параметру $\lambda\in\Gamma$, $t\in[0,T]$, поэтому обосновано почленное интегрирование бесконечного ряда в выражении и

$$S\left[X(t),A^kX(t)\right]=-a_kS\left[X_0,X_0\right]-\sum_{p=1}^{\infty}(a_{k-p}+a_{k+p})S\left[X_0,A^pX_0\right]$$

где $a_k=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma G_k(\lambda)(\lambda+2)^n\,d\lambda, k\in\mathbb{Z}$.

Используя методы теории функций комплексной переменной и следуя работе [8], получаем:

$$a_k=-\frac{2^n}{\pi}\int_0^\pi(1+\cos\alpha)^n\cos|k|\alpha d\alpha=-\frac{2^n}{\pi}\sum_{m=0}^{n}C_n^m\int_0^\pi\cos^m\alpha\cos|k|\alpha d\alpha=$$

$$=-\frac{2^n}{\pi}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-|k|}{2}\right]}C_n^{|k|+2l}\frac{\pi(|k|+2l)!}{2^{|k|+2l}(|k|+l)!l!}=-\frac{n!}{2^{|k|-n}}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-|k|}{2}\right]}\frac{1}{4^l(n-|k|-2l)!(|k|+l)l!}.$$

Следовательно, приходим к **основному результату настоящей работы:** получена явная формула для вычисления площади $S[X,X]$ решения разностных уравнений Хукухары в пространстве $conv\mathbb{R}^2$:

$$S[X_n,X_n]=2^n n!\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{4^l(n-2l)!(l!)^2}S[X_0,X_0]+2\sum_{p=1}^{n}\frac{n!}{2^{p-n}}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-p}{2}\right]}\frac{1}{4^l(n-p-2l)!(p+l)l!}S\left[X_0,A^pX_0\right].$$

Выводы

В настоящей работе вычислена площадь $S[X,X]$ решений разностного уравнения Хукухары (1). Для этого использовались классические геометрические методы, а также метод сравнения Чаплыгина–Важевского. Получена явная формула для вычисления площади $S[X_n,X_n]$ решения разностных уравнений Хукухары в пространстве $conv\mathbb{R}^2$:

$$S[X_n,X_n]=2^n n!\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{4^l(n-2l)!(l!)^2}S[X_0,X_0]+2\sum_{p=1}^{n}\frac{n!}{2^{p-n}}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n-p}{2}\right]}\frac{1}{4^l(n-p-2l)!(p+l)l!}S\left[X_0,A^pX_0\right].$$

Список использованной литературы:

1. Lakshmikantham V. Theory of set differential equations in metric spaces/ V. Lakshmikantham, G. Bhaskar, J. Vasundhara Devi :Cambridge Scientific Publisers, 2006.– 212 p.

2. Bhaskar G. Stability results for Set Difference Equations/ G. Bhaskar, T. Shaw // Dynamical Systems and Applications. – 2004. – Vol.13. – P. 479-485.

3. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

4. Slyn'ko V.I. The stability of fixed points of discrete dynamical systems in the space $conv\mathbb{R}^n$ / V.I. Slyn'ko // Functional Analysis and Its Applications. – 2016, Vol. 50, Issue 2. – P. 163–165.

5. Slyn'ko V.I. Stability in terms of two measures for set difference equations in space $conv\mathbb{R}^n$ / V.I. Slyn'ko //Applicable Analysis. – 2017, Vol. 96, N 2. – P. 278–292.

6. Бляшке В. Круг и шар / В. Бляшке; [пер. с нем. В. А. Залгаллера, С. И. Залгаллер]. – М.: Наука. 1967. – 232 с.

7. Слынько В.И. Площадь решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары / В.И. Слынько// Мат. заметки (принято в печать).

References

1. Lakshmikantham V.(2006). Theory of set differential equations in metric spaces. *Cambridge Scientific Publisers*, 212 p.

2. Bhaskar G.(2004). Stability results for Set Difference Equations. *Dynamical Systems and Applications*, p. 479-485.

3. Daletskii Yu.L., Krein M.G. (1970). Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. *Translations of Mathematical Monographs Reprinted by AMS*, 536 p.

4. Slyn'ko V.I. (2016). The stability of fixed points of discrete dynamical systems in the space $conv\mathbb{R}^n$. *Functional Analysis and Applications*, 163–165.

5. Slyn'ko V.I. (2017). Stability in terms of two measures for set difference equations in space $conv\mathbb{R}^n$. *Applicable Analysis*, p. 278–292.

6. Blyashke W. (1967). Kreis und Kugel.*Verlag von Veit & Comp.*, 232 p.

7. Slyn'ko V.I. (2016). The area of solutions for a class of set linear differential equations with Hukuhara derivative. *Math. notes* (to appear).

Summary. I. V. Atamas'. The area of solutions of linear difference Hukuhara equations. *In this paper we study the question of area calculation for solutions to linear difference Hukuhara equations*

$$\Delta_H X_n = AX_n .$$

We introduce here auxiliary sequences

$$\xi_n^k = S\left[X_n, A^k X_n\right], k \in \mathbb{Z}_+ .$$

Then we can write a comparison system in abstract form $\Delta\xi_n = (\Omega+1)\xi_n$ *with initial conditions* $\xi_n = (\Omega+2)^n \xi_0$, *where operator* $\Omega : l_\infty \to l_\infty$ *is given by*

$$(\Omega\xi)_k = \xi_{k-1} + \xi_{k+1}, k \geq 1,\ (\Omega\xi)_0 = 2\xi_1 .$$

Examining a comparison system, we get a main result: we obtain the exact formula for area $S[X_n, X_n]$ *for solutions to linear difference Hukuhara equations:*

$$S[X_n, X_n] = 2^n n! \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{4^l (n-2l)!(l!)^2} S[X_0, X_0] + 2\sum_{p=1}^{n} \frac{n!}{2^{p-n}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-p}{2}\right]} \frac{1}{4^l (n-p-2l)!(p+l)l!} S\left[X_0, A^p X_0\right].$$

Keywords: Hukuhara difference, Minkowski mixed area, Chaplygin-Vazhevskii method of comparison, difference equations, dynamic systems, Hausdorff metric.

Одержано редакцією 19.08.2016 Прийнято до друку 23.09.2016

УДК 517.92 PACS 02,03,05,06,07

В. О. Болілий, І. О. Зеленська

НЕСТАБІЛЬНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ТОЧКА ЗВОРОТУ II РОДУ В СИСТЕМІ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і точкою звороту отримано умови для побудови рівномірної асимптотики розв'язку. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи. Асимптотику побудовано методом істотно-особливих функцій, який дозволяє в околі точки звороту використати модельний оператор Ейрі-Лангера для однорідної задачі і функцію Скорера для неоднорідної задачі. Конструкція асимптотичних розв'язків містить довільні сталі, які визначаються однозначно під час розв'язання ітераційних рівнянь. Доведено також існування розв'язку системи диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній та при наявності точки звороту, за умови, що точка звороту міститься на інтервалі $[-l, l]$. *Проведена оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку.*

Ключові слова: лінійна система, малий параметр, точка звороту, простір безрезонансних розв'язків, модельний оператор Ейрі-Лангера, рівняння типу Орра-Зоммерфельда.