

ОКОННАЯ КОРРЕКЦИЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ВРЕМЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ УЗКОПОЛОСНОГО, НОРМАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Розглядається формування випадкових реалізацій вузькосмугового випадкового процесу як функцій часу. При формуванні використовуються незалежні значення функцій й інтерполювання цих значень. Вводиться корекція значень випадкових функцій на ділянках, які виходять на межі теоретичних розподілень амплітуди та фази, яка основана на використанні віконної функції. Вивчаються статистичні характеристики реалізацій

Ключові слова: псевдовипадкові послідовності, вузькосмугові сигнали, метод огинаючих, моделювання, статистична радіотехніка

Рассматривается формирование случайных реализаций узкополосного случайного процесса как функций времени. При формировании используются независимые значения функций и интерполирование этих значений. Вводится коррекция значений случайных функций на участках, которые выходят за границы теоретических распределений амплитуды и фазы, основанная на применении оконной функции. Исследуются статистические характеристики реализаций

Ключевые слова: псевдослучайные последовательности, узкополосные сигналы, метод огибающих, моделирование, статистическая радиотехника

А. Ф. Величко
 Доктор технических наук, профессор*
 E-mail: afvel@yandex.ru

Д. А. Величко
 Кандидат технических наук,
 старший научный сотрудник, доцент*
 E-mail: davel@yandex.ru

А. В. Вичкань
 Младший научный сотрудник*
 E-mail: vichkan@ire.kharkov.ua

К. В. Нетребенко
 Кандидат технических наук, научный сотрудник*
 E-mail: kostya_net@mail.ru

*Отдел обработки радиосигналов
 Институт радиопизики и электроники
 им А. Я. Усикова НАН Украины
 ул. Проскуры, 12, г. Харьков, Украина, 61085

1. Введение

Моделирование радиоэлектронных систем с помощью цифровых технологий широко применяется для исследования ожидаемых результатов разработки и с иными целями. При моделировании работы ретрансляционных систем технической диагностики [1] часто необходимо формировать реализации узкополосного случайного процесса, как функции времени. Они используются при создании смеси сигнал/шум, которая преобразуется в ретрансляторе и в приемном устройстве [2, 3]. Известны несколько способов формирования случайных временных реализаций: программный, табличный, программно-аппаратный, с помощью физических датчиков [4]. Наиболее употребителен и экономичен программный метод. В том случае, когда огибающая сигнала является случайной функцией, спектр которой имеет резко выраженный максимум, применяется метод огибающих. В нем используются две независимые случайные функции: амплитуды (огнивающей) $E(t)$ и фазы $\Phi(t)$ [5]. В настоящее время реализация этого пути моделирования осуществляется с помощью мощных систем программирования, од-

ной из которых является система *Matlab*, включающая в себя пакет *Simulink*. Эта система позволяет строить модели устройств, систем и каналов на основе готовых блоков с задаваемыми пользователем параметрами [6].

Сформированные шумовые колебания являются составной частью входного сигнала измерительных систем и ретрансляционных измерителей технической диагностики. Последние в качестве информационного параметра чаще всего используют фазовые характеристики входного сигнала с целью повышения точности измерения. Как отмечено выше, в ретрансляционных системах формирование таких сигналов при моделировании системы производится дважды [2, 3]. Поэтому отклонения от теоретически обоснованных характеристик узкополосного, случайного процесса будут усиливать погрешности моделирования и такие отклонения необходимо снижать.

В связи с этим приближение к теоретически обоснованным зависимостям характеристик случайных временных реализаций узкополосного, нормального процесса, которые формируются программным способом, позволят усовершенствовать моделирование ретрансляционных и иных измерительных систем.

2. Анализ литературных данных, методы и цель исследований

В литературе давно установились методы оценки параметров сигнала, который выделяется из смеси сигнала $s(t, \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$ и шума $\eta[t, b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)]$, где $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ — информационные параметры сигнала, $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$ — параметры шумового колебания. Такое колебание представляется [5, 7] как случайный процесс, характеристики которого определены для разных условий и способов комбинирования сигнала и шума. Теоретические распределения такой смеси были получены на основе модели процессов, исследованных кинетической теорией и термодинамикой. Они проанализированы и приведены к виду, удобному для использования при обработке сигналов, во многих монографиях, в частности, в [8, 9]. Математические методы, необходимые для моделирования временных реализаций, приведены в справочниках [10], внедрены в современные системы моделирования [6].

Однако рост требований к качеству промышленной продукции требует совершенствования систем контроля, в состав которых входят радиотехнические средства контроля, в частности, ретрансляционные [1–3]. В принцип работы ретрансляционных систем заложены повышенные возможности извлечения информации о контролируемом объекте. Поэтому при их моделировании необходимы усовершенствованные встроенные процедуры и функции системы программирования *Matlab*, которые при формировании временных реализаций случайного процесса обеспечивают меньшее расхождение характеристик полученных процессов с теоретическими закономерностями.

Остановимся на основных рекомендациях литературы при моделировании реализаций узкополосного, нормального случайного процесса. В этом случае, как следует из [4, 5, 7–9] используются две независимые случайные функции $E(t)$ и $\Phi(t)$, процесс $x(t)$ представляется в виде

$$x(t) = E(t) \cdot \cos[\Phi(t)]. \quad (1)$$

Энергетический спектр узкополосного процесса расположен вблизи центральной частоты ω_0 полосового усилителя, поэтому случайная функция фазы приобретает вид $\Phi(t) = \omega_0 \cdot t + \phi(t)$, где $\omega_0 \cdot t$ — детерминированная, а $\phi(t)$ — случайная функция, равномерно распределенная в диапазоне $-\pi \leq \phi(t) < \pi$. Плотность $f(E)$ случайной функции $E(t)$ подчиняется релеевскому закону

$$f(E) = \frac{E}{\sigma^2} \exp(-E^2 / 2\sigma^2), \quad (2)$$

где σ^2 — дисперсия случайной функции $E(t)$.

В узкополосном процессе $x(t)$ выделяется некоторый интервал времени τ_k , который зависит от ширины полосы $\Delta\omega$ и формы частотной характеристики устройства. Его называют интервалом корреляции, этой величиной можно обозначить отрезок времени, на котором случайные реализации функций $E(t)$ и $\phi(t)$ являются независимыми. Поскольку в узкополосных устройствах $\Delta\omega \ll \omega_0$, то

$$\tau_k \gg T_0 = 2\pi/\omega_0, \quad (3)$$

где T_0 — шаг выборки. Функции $E(t)$ и $\phi(t)$ меняются медленно по сравнению с $\omega_0 t$. Для каждой из этих функций формируются независимые значения, которые на оси времени располагаются через τ_k ; далее будем называть их узловыми точками соответствующих функций.

Первый шаг формирования псевдослучайных последовательностей (ПСП) состоит в следующем. Используя рекомендации указанных выше источников, используя предлагаемые процедуры формирования случайных величин системой программирования *Matlab* и другими можно получить ПСП узловых точек функций $E(t)$ и $\phi(t)$. Легко убедиться в том, что распределения узловых точек почти идеально соответствуют теоретическим законам — релеевскому и равномерному.

На втором шаге нужно воспроизвести значения ПСП в промежутке между узловыми точками. При этом, в соответствии с теоремой Котельникова, необходимо на один период самой высокочастотной гармоники спектра определить не менее чем 2 значения каждой независимой случайной функции $E(t)$ и $\phi(t)$. Здесь шаг дискретизации T_0 функций $E(t)$ и $\phi(t)$ значительно меньше τ_k . Заметим, что в узкополосном усилителе невозможны скачки амплитуды и фазы, эти величины изменяются плавно от одной узловой точки к другой. А в качестве исходных данных для определения значений $E(t)$ и $\phi(t)$ через шаг T_0 имеются только узловые точки двух ПСП: амплитуды и фазы.

Промежуточные значения между соседними точками τ_k^i и τ_k^{i+1} находят с помощью интерполяционных многочленов либо сплайнов. Процедуры, использующие интерполяцию и сплайны, широко применяются в цифровой обработке сигналов [6], в мультимедийных технологиях и в топографии [10], в системах автоматического проектирования [11] и др. Базовая система *Matlab* имеет встроенные функции одномерной интерполяции `interp1`, `spline`, `rpchip` [6, 12]. Свойства интерполяционных многочленов в форме Лагранжа, форме Ньютона, сплайн-интерполяция рассмотрены в [13–17].

При исследованиях случайных реализаций, полученных рекомендованными в литературе методами полиномиальной интерполяции в форме Лагранжа, кубических сплайнов были обнаружены выбеги случайных значений $E(t)$ и $\phi(t)$ за пределы, которые определяются теоретическими законами распределений. Проблема появления таких выбегов рассматривалась в научной литературе только в [10]. Эта работа посвящена описанию ландшафта сплайн-функциями.

Система *Matlab* включает в себя развитый пакет *Spline Toolbox*, который предоставляет возможности многомерной сплайн-интерполяции, аппроксимации и конструирования сплайнов. Пакет также включает отдельные функции, реализующие известные методы интерполяции [11, 12]. Однако средства для устранения или ограничения выбега результатов интерполирования за заданные границы в этой системе отсутствуют.

Поэтому была поставлена следующая цель статьи. Определить статистические характеристики выбегов значений $E(t)$ и $\phi(t)$ за пределы теоретических за-

конов и разработать способ снижения вероятности их выбегов за пределы границ, определенных теоретически, при формировании реализаций узкополосного, нормального случайного процесса.

3. Статистические характеристики выходов случайных значений $E(t)$ и $\varphi(t)$ за пределы теоретических законов

Случайные значения $E(t)$ и $\varphi(t)$ определялись с помощью функции *spline*, реализующей алгоритм кусочно-гладкой интерполяции кубическими сплайнами по заданной сетке узловых точек. Аргументами функции являлись абсциссы и ординаты узловых точек, а также абсциссы точек, для которых функция будет вычислять интерполированные значения. Такой выбор был сделан из трех наиболее доступных для реализации методов по следующим причинам.

Использование полиномиальной интерполяции на отрезках, состоящих из небольшого числа узловых точек, с последующей их стыковкой приводит к разрывам первой производной [13]. Такие разрывы являются причиной скачков и разрывов мгновенной частоты, а сглаживание мест стыковки требует разработки специализированных дополнительных процедур. Второй метод включает последовательные процедуры дополнения нулями межузловых интервалов и низкочастотной фильтрации [6]. При таком подходе требуется каждый раз производить расчет и оптимизацию ФНЧ при изменении параметров моделируемого узкополосного, случайного процесса. Предпочтение было отдано методу интерполяции кубическими сплайнами [13], свободному от перечисленных недостатков. Как отмечено ранее, *spline* является встроенной функцией базовой системы *Matlab*.

Рассмотрим ПСП $E(t)$. На рис. 1 показан фрагмент интерполированной последовательности амплитуды (кривая 2), которая на данном участке принимает отрицательные значения. По оси абсцисс даны номера отсчетов n , по оси ординат — значения дискретной последовательности амплитуды $E(n)$ в вольтах. Данные, отмеченные на рисунке кружками — узловые точки. Число отсчетов, выходящих за пределы области теоретического распределения на некотором локальном участке интерполированной последовательности, далее будем называть протяженностью выбега c , которая измеряется числом дискретных отсчетов по оси абсцисс. Глубину выбега обозначим через a (рис. 1), объем всех отсчетов сформированной реализации — через N .

Протяженность выбега зависит от выбранного метода интерполяции, близости к пределу области тех узловых точек, между которыми наблюдается выбег, а также от взаимного расположения этих узловых точек по оси ординат. Протяженность любого выбега c всегда меньше коэффициента интерполяции $\gamma = N/M$, где M — число узловых точек. Кривой 4 на рис. 1 показан типичный результат устранения выбега амплитуды.

Оценка выборочной плотности вероятности протяженностей выбегов $\hat{f}(c_E)$, полученная при формировании амплитуды приведена на рис. 2. Она весьма сходна с теоретической плотностью модуля гауссовой случайной величины $f(c_E) = (\sqrt{2}/\sigma\sqrt{\pi})\exp(-c_E^2/2\sigma^2)$.

Анализ кривой подтверждает, что максимальное значение c не превышает значения γ , равного в данном примере пятидесяти.

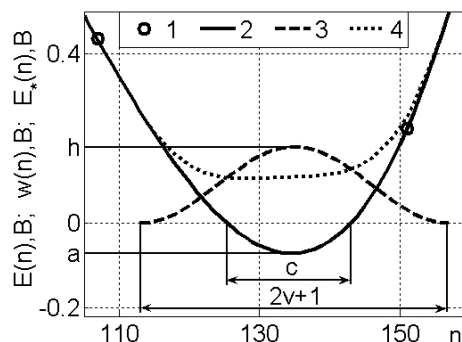


Рис. 1. Фрагмент последовательности амплитуды с выбегом: 1 — узловые точки; 2 — исходная ПСП; 3 — корректирующее окно; 4 — скорректированная ПСП

Оценка плотности вероятности абсолютных значений глубин выбегов ПСП амплитуды $\hat{f}(a_E)$ (рис. 3) хорошо аппроксимируется плотностью экспоненциального закона $f(a_E) = \lambda \exp(-\lambda |a_E|)$.

В случае фазы выбеги возникают как в положительной области значений фазы, так и в отрицательной, когда интерполированная последовательность выходит за интервал $[-\pi, \pi]$. Оценка плотности вероятности протяженности выбегов $\hat{f}(c_\varphi)$ приведена на рис. 4. График оценки $\hat{f}(c_\varphi)$ подтверждает, что протяженности выбегов не превышают величины γ . Оценка плотности вероятности глубины выбегов для положительной области значений фазы $\hat{f}(a_{+\varphi})$ показана на рис. 5. Эта оценка хорошо аппроксимируется экспоненциальной плотностью распределения $f(a_{+\varphi}) = \lambda \exp(-\lambda a_{+\varphi})$. Для отрицательной области значений оценка будет иметь аналогичный характер с тем лишь различием, что отклонения выбегов будут отрицательными, поэтому соответствующий график не приводится.

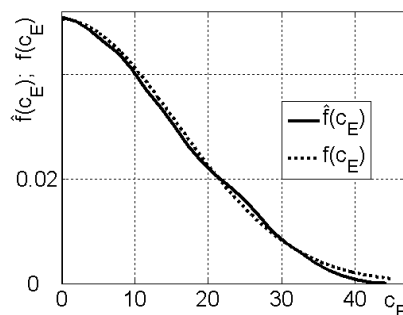


Рис. 2. Выборочная плотность вероятности протяженности выбегов $\hat{f}(c_E)$ и плотность вероятности модуля гауссовой случайной величины $f(c_E)$. $M = 10^6$, $\gamma = 50$

Как видно из рис. 3, 5 выборочные плотности вероятности глубины выбегов хорошо аппроксимируются экспоненциальной плотностью вероятности.

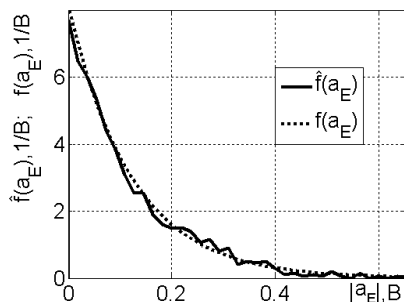


Рис. 3. Выборочная плотность вероятности глубины выбегов функции амплитуды $\hat{f}(a_E)$ и плотность вероятности экспоненциального закона $f(a_E)$. $M=10^6, r=50$

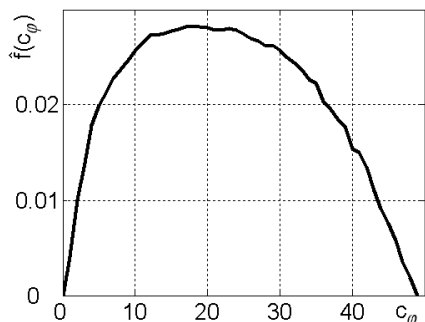


Рис. 4. Выборочная плотность вероятности протяженности выбегов ПСП фазы $\hat{f}(c_\phi)$. $M=10^6, r=50$

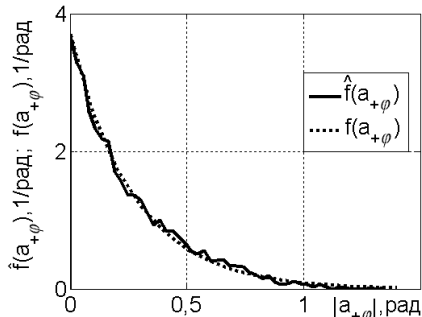


Рис. 5. Выборочная плотность вероятности глубины выбегов функции фазы $\hat{f}(a_{+\phi})$ и экспоненциальная плотность вероятности $f(a_{+\phi})$. $M=10^6, r=50$

ПСП фазы. На рис. 7 приведена оценка плотности вероятности фазы $\hat{f}(\phi)$ и теоретическая плотность равномерного распределения $f(\phi)$. Заметно, что за пределами области определения фазы присутствуют выборочные значения.

Известно [8, 9], что плотность вероятности процессов на выходе узкополосных линейных цепей близка к гауссовой. Появление значений случайной функции $E(t)$ и $\phi(t)$ за пределами областей, границы которых определены теорией, приводят к тому, что моделируемый узкополосный, случайный процесс будет иметь симметричную плотность вероятности с отличным от нуля коэффициентом эксцесса. На рис. 8 показана оценка плотности вероятности узкополосного, случайного процесса $\hat{f}(x)$, сформированного в соответствии с (1) и устраненными выбегами, а также теоретическая плотность нормального распределения $f(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\exp(-x^2/2\sigma^2)$.

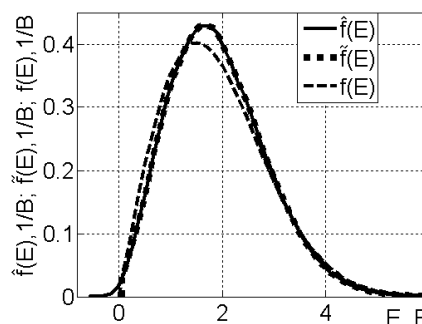


Рис. 6. Теоретическая и выборочные плотности вероятности амплитуды. $M=10^6, r=50$

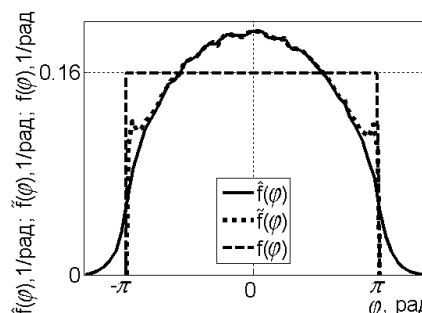


Рис. 7. Теоретическая и выборочные плотности вероятности фазы. $M=10^6, r=50$

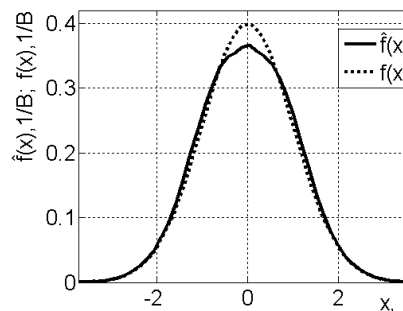


Рис. 8. Теоретическая и выборочная плотности вероятности узкополосного, нормального случайного процесса

4. Искажение плотностей вероятности псевдослучайных последовательностей амплитуды и фазы

При использовании интерполяции распределения ПСП $E(t)$ и $\phi(t)$ отличаются от плотности релеевского распределения (2) в случае амплитуды и от плотности равномерного распределения в случае фазы, что иллюстрируют рис. 6, 7 соответственно. Оценка плотности вероятности амплитуды $\hat{f}(E)$ (рис. 6) имеет более вытянутый вид в сравнении с теоретической плотностью $f(E)$ и, кроме того, за счет выбегов появляется скат в области отрицательных значений. Еще более заметны искажения плотности вероятности

5. Методика поиска и устранения выбегов

Поскольку выбеги приводят к отличию характеристик сформированных реализаций узкополосных, нормальных процессов, что в свою очередь вызовет погрешности при моделировании работы радиосистем, необходимо ослабить их влияние. В первую очередь необходимо либо полностью устранить выбеги, либо уменьшить их величину. Поскольку протяженность выбегов s варьируется в пределах, меньших τ , а большинство из них заметно меньше этой величины, целесообразно разработать алгоритм их устранения, используя протяженность и глубину.

В [10] предлагается устранять выбеги, называемые авторами «пороговыми осцилляциями», приравниванием нулю первых производных в узловых точках, находящихся по обе стороны от выбега. Это позволяет сохранить неизменными величины в узловых точках, но в строгом смысле не гарантирует устранения выхода интерполированных данных за заданные пределы. Кроме этого, такой подход требует дополнительного изучения данных с целью составления требований для тех узловых точек, в окрестности которых имеют место выбеги. В результате придется отказаться от принятия решения автоматически по заранее выработанным критериям.

Поскольку полного устранения погрешностей получить не удастся, можно не сохранять данные в узловых точках строго неизменными, приоритетом же является отсутствие разрывов и скачков амплитуды и фазы. Для гладкого устранения выбегов предлагается следующий подход, который рассмотрим на примере устранения выбегов амплитуды. Для устранения выбегов функции фазы процедура идентична с тем лишь различием, что необходимо устранять выбеги как в отрицательной области значений фазы, когда значения фазы оказываются меньше $-\pi$, так и в положительной, когда значения фазы превышают уровень π .

В массиве ПСП амплитуды $E(n)$ находится глобальный минимум a . Если его значение отрицательно, $a < 0$, значит, имеет место выбег. После устранения данного выбега процедура поиска повторяется. Новый глобальный минимум устраняется. Поиск, проверка на отрицательность и устранение текущего выбега повторяется до тех пор, пока значение очередного глобального минимума окажется неотрицательной величиной, $a \geq 0$.

Рассмотрим теперь процедуру устранения выбега. Пусть имеется глобальный минимум $E(k)$. На некотором интервале $l \in [k-v, k+v]$ по обе стороны от $E(k)$ из отсчетов амплитуды производится вычитание некоторой функции, которую в дальнейшем будем называть окном: $E'(l) = E(l) - w(l)$. В качестве такого окна предлагается использовать весовую функцию, аналогичную тем, что применяются для сглаживания данных при оценке спектров [18]. Ширина окна составляет $2v+1$. Поскольку оконные функции имеют плавный спад амплитуды до нуля, их применение не вызовет заметных скачков первой производной скорректированных данных. Вопрос поведения производных порядка выше первого в работе не рассматривался. Выбегам не свойственны значительные асимметрии относительно точки их локального экстремума, поэтому симметричность окна не является недостатком. В исследованиях

было выбрано окно Хэннинга — одна из наиболее распространенных оконных функций, отличающаяся простотой вычисления:

$$w(l) = h \cos^2\left(\frac{\pi l}{2v+1}\right), \quad l = -v, \dots, -1, 0, 1, \dots, v, \quad (4)$$

где h — высота окна.

Для осуществления процедуры необходимо определить значения ширины и высоты окна. На начальном этапе исследований ширина окна принималась фиксированной, и имела значение, превышающее τ чтобы покрыть максимально протяженные выбеги. Однако затем, для оптимизации вычислений, а также с целью внесения минимальных изменений в интерполированные данные, ширина корректирующего окна определялась как монотонно-возрастающая функция от глубины a . Эта идея возникла вследствие того, что оценка нормированной взаимной корреляции между величинами $|a|$ и s составляет около 0,85, т. е. глубина выбега существенно связана с ее протяженностью.

Практика применения такого подхода выявила, что ширина окна, рассчитанная подобным образом, не всегда достаточна для полного устранения за один проход процедуры таких выбегов, у которых велико отношение s/a . Это приводит к заметному искажению графика скорректированных данных (рис. 9, кривая 2). Такие искажения приводят к появлению высокочастотных спектральных компонент, которые также искажают результаты моделирования.

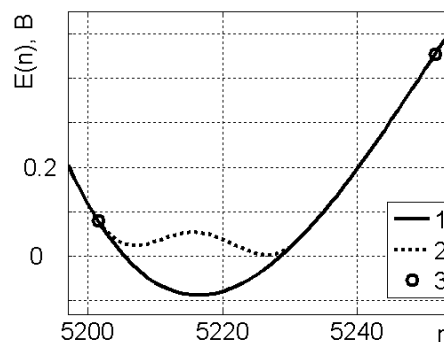


Рис. 9. Зависимость случайного значения огибающей от времени. Участок с выбегом за пределы теоретического закона

Если ширину окна определять в зависимости от s , хорошие результаты обеспечивает ширина окна, равная $2s+1$. Это позволяет устранить искажения, показанные на рис. 9 за счет небольшого увеличения вычислительных затрат. Существенное изменение значений узловых точек при этом не происходит.

Высота окна h также может изменяться от конкретных условий. Очевидно, что h не может быть меньше $|a|$, иначе потребуются несколько проходов процедуры коррекции для устранения каждого выбега. Если же $h = |a|$, то в скорректированных данных может появиться большое число точек, значения которых близки к нулю, а это негативно отразится на плотности вероятности скорректированных данных. В окончательной версии процедуры высота корректирующего окна определялась как $h = -a - d$, где d — равномерно

распределенная случайная величина, что позволило практически устранить искажения, показанные на рис. 9. На рис. 6, 7 показаны оценки плотностей вероятности амплитуды $\hat{f}(E)$ и фазы $\hat{f}(\phi)$ после устранения выбегов. Улучшение формы плотностей вероятности особенно заметно для функции фазы.

5. Выводы

В результате исследований большого числа сформированных программным способом реализаций случайных функций амплитуды и фазы узкополосного, нормального случайного процесса можно сделать следующие выводы.

Изучены особенности появления значений амплитуды и фазы, которые выходят за пределы законов их распределения. Установлены протяженности и глубина выхода ПСП амплитуды и фазы за границы, которые определены теоретически.

Проанализированы распределения протяженности и глубины выбегов случайной функции амплитуды, предложена математическая аппроксимация плотностей распределения этих величин.

Установлены отклонения законов распределения амплитуды и фазы сформированных реализаций узкополосного, случайного процесса от теоретических значений при применении интерполяции.

Разработан способ снижения отклонений плотностей вероятности сформированных функций амплитуды и фазы узкополосного процесса на основе корректирующей оконной функции Хэннинга. Разработаны рекомендации по выбору параметров корректирующей функции. Результатом применения указанного способа является устранение выбегов функций амплитуды и фазы.

Предложенный способ устранения выбегов интерполированных данных может применяться при решении широкого круга задач интерполяции данных в различных областях науки и техники.

Литература

1. Величко, А. Ф. Ретрансляционный метод измерения и подавления помеховых отражений при непрерывном излучении с частотной модуляцией [Текст] / А. Ф. Величко, Д. А. Величко // Радиоэлектроника. – 1998. – Т. 41, № 11. – С. 3–12.
2. Величко, Д. А. Моделирование характеристик многочастотной ретрансляционной системы [Текст] / Д. А. Величко // Радиоэлектроника. – 2008. – Т. 51. – № 2. – С. 14–24.
3. Величко, Д. А. Модель контрольно-измерительной системы с управляемой структурой ретранслятора [Текст] : Матер. 20-й Междунар. конф. / Д. А. Величко, С. А. Величко // «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (СпiMiCo'10), 13-17 сентября 2010, Севастополь. – С. 1023–1024.
4. Прохоров, С. А. Математическое описание и моделирование случайных процессов [Текст] / С. А. Прохоров. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. – 209 с.
5. Бунимович, В. И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах [Текст] / В. И. Бунимович. – М.: Сов. радио, 1951. – 360 с.
6. Дьяконов, В. П. Matlab R2007/2008/2009 для радиоинженеров [Текст] / В. П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 976 с.
7. Middleton, D. An Introduction to Statistical Communication Theory [Текст] / D. Middleton. - New York: Mc Graw-Hill, 1960. – 1184 p. doi:10.1109/9780470544112
8. Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники [Текст] / Б. Р. Левин. – М.: Сов. радио, 1966. – 728 с.
9. Свешников, А. А. Прикладные методы теории случайных функций [Текст] / А. А. Свешников. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
10. Самотонин, Д. Н. Сплайн-интерполяция высот рельефа местности при моделировании распространения радиоволн с использованием векторных геоданных [Текст] / Д. Н. Самотонин, С. И. Биденко // Информационно-управляющие системы. – 2004. – № 3. – С. 22–30.
11. Сиденко, Л. А. Компьютерная графика и геометрическое моделирование [Текст] / Л. А. Сиденко. – СПб.: Питер, 2009. – 224 с.
12. Кетков, Ю. Л. MATLAB 7: программирование, численные методы [Текст] / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. – СПб: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
13. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами [Текст] / под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. - 832 с.
15. Ahlberg, J. H. The Theory of Splines and Their Applications [Текст] / J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh. - New York: Academic Press, 1967. – 284 p.
16. Де Бор, К. Практическое руководство по сплайнам [Текст] / К. Де Бор. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
17. Половко, А. М. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации [Текст] / А. М. Половко, П. Н. Бутусов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.
18. Хэррис, Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье [Текст] / Ф. Дж. Хэррис. // ТИИЭР. – 1978. – Т. 66, № 1. – С. 60–96.