4. Ahnazarova, S. L. Ispolzovanie funktsii zhelatelnosti Harringtona pri reshenii optimizatsionnyih zadach himicheskoy tehnologii [Text] / S. L. Ahnazarova, L. S. Gordeev. – Moscow: izd-vo RHTU, 2003. – 76 p.
5. Bandi, B. Metodyi optimizatsii. Vvodnyiy kurs [Text] / B. Bandi; perevod s angl. – Moscow: Radio i svyaz, 1988. – 129 p.
6. Sanginova, O. Multi-objective optimization in formation tasks of leather and fur materials [Text] / O. Sanginova, A. Danylkovych, S. Branovitskaja // ScienceRise. – 2014. – Vol. 2, Issue 2. – P. 43–50. doi: 10.15587/2313-8416.2014.27262
7. Danylkovych, A. G. Application of Box method for multi-objective optimization problems [Text] / A. G. Danylkovych, S. V. Branovitskaja, S. G. Bondarenko, O. V. Sanginova // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2013. – Vol. 3, Issue 4 (63). – P. 4–8. – Available at: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/14743/12521
8. Kats, M. A new method for solving the problems of identification, diagnosis, prognosis and optimization of complex systems [Text] / M. Kats // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2011. – Vol. 3, Issue 12 (51). – P. 17–28. – Available at: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/2467/2268
9. Zraychenko-Polozentsev, A. V. Evaluation of potential reserves of production for melting synthetic iron [Text] / A. V. Zraychenko-Polozentsev, O. S. Koval, D. A. Demin // Technology audit and production reserves. – 2011. – Vol. 1, Issue 1 (1). – P. 7–15. – Available at: http://journals.uran.ua/tarp/article/view/4081/3747
10. Ekologichno orientovani tehnologiyi virobnitstva shkiryanih ta hutrovih materialiv dlya stvorennya konkurentospromozhnih tovariv. In 2 part:, Part I [Text] : monografiya / A. G. Danilkovich, V. I. Lischuk, V. P. Plavan, E. E. Kasyan, O. G. Zhigotskiy; A. G. Danilkovich (Ed.). – Kiev: FenIks, 2011. – 437 p.
11. Danylkovych, A. G. Innovatsiyni tehnologiyi virobnitstva shkiryanih i hutrovih materialiv ta virobiv [Text]: monografIya / A. G. Danylkovych, I. M. Grischenko, V. I. Lischuk et. al.; A. G. Danylkovych (Ed.). – Kiev: Feniks, 2012. – 344 p.
12. Lischuk, V. I. Vikoristannya bagatokriterialnoyi optimizatsiyi dlya poshuku kompromisnoyi oblasti protsesu zolinnya [Text] / V. I. Lischuk, T. G. Voytsehovska, A. G. Danylkovych // Legka promislovist. – 2007. – Vol. 1. – P. 37–39.
13. Danylkovych, A. G. Pidvischennya yakosti vtorinnogo pokrittya shlyahom optimizatsiyi pokrivnoyi kompozitsiyi [Text] / A. G. Danylkovych, A. S. Brayilko, N. V. Omelchenko // Visnik HNU. – 2010. – Vol. 3. – P. 129–134.

УДК 519.6+514.1
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.36753

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ РОЗМІЩЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Л. Г. Євсеєва
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Полтавське вище міжрегіональне професійне училище
вул. Бірюзова, 64а, м. Полтава, Україна, 36009
E-mail: lg.yevseeva@gmail.com

Статтю присвячено прикладним аспектам інтервального математичного моделювання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів. Будується повний клас реалізацій інтервальної математичної моделі основної інтервальної оптимізаційної задачі розміщення геометричних об'єктів. Пропонуються інтервальні математичні моделі низки оптимізаційних задач розміщення та модифікації методів локальної та глобальної оптимізації для їх реалізації в інтервальних та евклідових просторах

Ключові слова: геометричне проектування, інтервальна геометрія, інтервальна математична модель оптимізаційної задачі розміщення

Статья посвящена прикладным аспектам теории интервального математического моделирования оптимизационных задач размещения геометрических объектов. Строится полный класс реализаций интервальной математической модели основной интервальной оптимизационной задачи размещения геометрических объектов. Предлагаются интервальные математические модели ряда оптимизационных задач размещения и модификации методов локальной и глобальной оптимизации для их реализации в интервальных и евклидовых пространствах

Ключевые слова: геометрическое проектирование, интервальная геометрия, интервальная математическая модель оптимизационной задачи размещения

1. Вступ

На сучасному етапі стрімко зростає інтерес до ефективного розв'язання оптимізаційних задач геометричного проектування, зокрема, задач розміщення, що пояснюється розмаїттям практичних застосувань і надзвичайною складністю математичних моделей та методів їхнього розв'язання.

Задачі розміщення є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їх розв'язання – новим напрямом теорії дослідження операцій. Оптимізаційні задачі розміщення виникають при дослідженні актуальних проблем біології, мінералогії, медицини, матеріалознавства, у наукових дослідженнях в галузі нанотехнологій, у робототехніці, при кодуванні інформації, в системах розпізнавання образів, системах керування космічними апаратами, у хімічній промисловості, енергетиці, машино-, судно-, авіабудуванні, будівництві, порошковій металургії тощо.

В більшості застосувань оптимізаційних задач розміщення потрібно організувати упаковку даного набору об'єктів в межах певної області (наприклад, завантаження палуби судна, залізничного вагона або компоновка електронних компонент на платі) і також необхідно звести до мінімуму об'єм використаного простору або максимізувати число розміщених об'єктів. Багато інших застосувань включають тривимірні задачі: упаковка пігулок в пляшку, розміщення ящиків та бочок у вантажному відсіку, 3D лазерний розкрій, моделювання сипучих середовищ і рідин, планування лікування за допомогою радіохірургії, задача формування пористого порошкового матеріалу тощо.

Розробка сучасних інформаційних систем для розв'язання задач розміщення вимагає побудови адекватних математичних моделей для прогнозування розв'язку.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

В роботі здійснено аналіз сучасного стану наукових досліджень щодо методології математичного моделювання і розв'язання задач розміщення та підходів до прийняття рішень в умовах інтервальної невизначеності, з якого можна зробити такий висновок: відомі математичні моделі оптимізаційних задач розміщення подаються, як правило, в ідеалізованому вигляді, коли похибки вихідних даних та параметрів розміщення не враховуються. Через це відсутня адекватність математичних моделей реальним постановкам задач розглянутого класу. Застосування елементів інтервальної геометрії є ефективним засобом математичного моделювання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів з урахуванням похибок метричних характеристик та параметрів розміщення.

Тому наукову значущість набуває проблема створення методології математичного моделювання і розв'язання оптимізаційних задач геометричного проектування з урахуванням похибок.

Коло фундаментальних и прикладних проблем, пов'язаних з конструктивним математичним моделюванням процесу розміщення реальних об'єктів і створенням ефективних методів пошуку розв'язків задач розміщення у відповідності до заданого критерію оптимальності, є предметом досліджень теорії геометричного проектування [1]. Автором однієї з перших монографій, присвячених розв'язанню задач упаковки та розкрою, є лауреат Нобелівської премії Л. В. академік АН СССР Канторович Л. В. [2 – 4].

Фундаментальним дослідженням в цих напрямах присвячені роботи професора Стояна Ю. Г. та його учнів [5–9], а також багатьох іноземних науковців, а саме: Dowsland K. [10], Bennell, J. [11], Burke [12], Kendall, G. [13], Milenkovic M. [14], Oliverra J. [15], Gomes, M. [15] Scheithauer, G. [16].

Нинішній час характеризується збільшенням числа галузей застосування методів інтервального аналізу для розв'язання прикладних задач. Цій науковій царині присвячено роботи таких закордонних авторів, як Moore R. E. [17], Kaucher E. [18], Марков С. М. [19], Hansen E. [20], Alefeld G. [21], Herzberger J. [21], Калмиков С. А. [22], Шокін Ю. І. [22], Шарий С. П. [23] та ін.

Необхідно відмітити, що методи інтервального аналізу є сучасним інструментарієм оперування з невизначеностями, але до задач розміщення з урахуванням похибок їх, на жаль, не можна застосувати безпосередньо через складність відповідних матема-тичних моделей.

З метою здійснення єдиного підходу до вирішення проблеми урахування похибок при розв'язанні зазначеного класу задач в 1992 році Ю. Г. Стояном закладено основи нового наукового напряму – інтервальної геометрії [24–27].

Застосування інтервальної геометрії при моделюванні та розв'язанні оптимізаційних задач розміщення дає можливість раціонально враховувати похибки метричних характеристик і параметрів розміщення геометричних об'єктів та використовувати відомі оптимізаційні методи для розв'язання задач даного класу.

Таким чином, актуальним є подальший розвиток геометричного проектування на базі використання теорії інтервальної геометрії, розробка методів розв'язання оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів як невід'ємна частина теорії геометричного проектування з урахуванням похибок.

3. Ціль та задачі дослідження

Проведені дослідження ставили за мету подальший розвиток теорії інтервальної геометрії та теорії геометричного проектування щодо математичного моделювання і розв'язання оптимізаційних задач розміщення в інтервальних просторах.

Для досягнення цієї мети поставлено такі основні наукові задачі:

– сформувати повний клас реалізацій інтервальної математичної моделі основної задачі розміщення по вигляду інтервальних відображень, які визначають критерії оптимізації та приймають участь в формуванні системи інтервальних обмежень;

– розробити стратегії розв'язку основної інтервальної оптимізаційної задачі розміщення на основі побудови інтервальних відображень занурення інтервальних математичних моделей інтервальних оптимізаційних задач розміщення в евклідові простори;

– розробити модифікації методів локальної і глобальної оптимізації для розв'язання інтервальних оптимізаційних задач розміщення;

– розробити відповідне програмне забезпечення.

4. Прикладні аспекти інтервальних математичних моделей

4. 1. Метричний інтервальний простір $(\mathbf{I}_s^n\mathbf{R},\rho)$

Поняття n-вимірного інтервального простору введено в роботі [28].

В даному дослідженні пропонуються інтервальні відображення, які є метриками інтервальних просторів:

1) евклідова метрика

$$\boldsymbol{\rho}(\langle U_1\rangle,\langle U_2\rangle)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\rho}^2(\langle X_j^1\rangle,\langle X_j^2\rangle)}\in R^1, \tag{1}$$

де

$$\boldsymbol{\rho}(\langle A\rangle,\langle B\rangle)=\sqrt{(b-a)^2+(\nu_b-\nu_a)^2}\in R^1,$$

$$\langle A\rangle=\langle a,\nu_a\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R},\ \langle B\rangle=\langle b,\nu_b\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

$$\langle U_i\rangle=(\langle X_1^i\rangle,\ldots,\langle X_n^i\rangle)\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R},$$

$$\langle X_j^i\rangle=\langle x_j^i,\nu_{x_j}^i\rangle,\ j\in J_n,\ i=1,2.$$

2) інтервальне відображення $\mathbf{м}:\boldsymbol{\Omega}\to\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ виду

$$\boldsymbol{\mu}(\langle U_1\rangle,\langle U_2\rangle)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\mu^2(\langle X_j^1\rangle,\langle X_j^2\rangle)},$$

де

$$\langle U_i\rangle=(\langle X_1^i\rangle,\ldots,\langle X_n^i\rangle)\in\boldsymbol{\Omega},$$

$$\langle X_j^i\rangle=\langle x_j^i,\nu_{x_j}^i\rangle,\ \forall j\in J_n,\ i=1,2,$$

$\mu:\mathbf{I}_s\mathbf{R}\to\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – інтервальна метрика на $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$:

$$\boldsymbol{\mu}(\langle A\rangle,\langle B\rangle)=\begin{cases}\left|\langle A\rangle-\overline{\langle B\rangle}\right|, \text{ якщо } \nu_\alpha-\nu_\beta\geq 0\\ \overline{\left|\langle A\rangle-\overline{\langle B\rangle}\right|}, \text{ якщо } \nu_\alpha-\nu_\beta<0,\end{cases} \tag{2}$$

при виконанні умови $\langle X_j\rangle\in\mathbf{I}_{s1}^{+}$, $\forall j\in J_n$.

Надалі метричний інтервальний простір $(\mathbf{I}_s^n\mathbf{R},\boldsymbol{\rho})$ будемо позначати $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ і, при необхідності, окремо вказувати, яку з поданих метрик будемо використовувати в конкретному випадку.

4. 2. Постановка основної оптимізаційної інтервальної задачі розміщення

В інтервальному просторі $\mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$ дано множину інтервальних геометричних об'єктів $\mathbf{T}_i\subset\mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$, $i\in J_n$, і область $\boldsymbol{\Omega}\subset\mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$, геометрична інформація про які однозначно описується кортежами

$$\mathbf{g}_{\mathbf{T}_i}=(\mathbf{T}_i,\mathbf{m}_i,(\langle U_i\rangle,\langle\Theta_i\rangle)),\ \mathbf{g}_{\boldsymbol{\Omega}}=(\boldsymbol{\Omega},\mathbf{m}_0,(\langle U_0\rangle,\langle\Theta_0\rangle)),$$

$$\mathbf{m}_i=(\langle A_1^i\rangle,\langle A_2^i\rangle,\ldots,\langle A_{k_i}^i\rangle),\ \langle A_j^i\rangle=\langle a_j^i,\nu_{a_j}^i\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}, j\in J_{k_i},$$

$$i\in\{0\}\cup J_n,\ \langle V_i\rangle=\langle V_0\rangle\overset{\Rightarrow_b}{}\langle V_i\rangle=(\langle X_1^i\rangle,\ldots,\langle X_n^i\rangle)\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R},$$

$$\langle X_j^i\rangle=\langle x_j^i,\nu_{x_j}^i\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R},\ j\in J_{k_i},\ i\in J_n.$$

Нехай при розміщенні об'єкта $\mathbf{T}_i$ використовується його трансляція на інтервальну направлену множину $\langle V_i\rangle\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ і обертання навколо свого полюса на інтервальний кут $\langle\Theta_i\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$. Тоді вектор параметрів розміщення має вигляд $\langle U_i\rangle=(\langle V_i\rangle,\langle\Theta_i\rangle)\in\mathbf{I}_s^{n+1}\mathbf{R}$. Позначимо $\mathbf{T}_i(\langle U_i\rangle)\subset\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i\in J_n$, $\boldsymbol{\Omega}(\langle U_0\rangle)\subset\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$.

Необхідно упакувати інтервальні геометричні об'єкти $\mathbf{T}_i$, $i\in J_n$, в інтервальну область $\boldsymbol{\Omega}$, тобто знайти інтервальну направлену множину параметрів розміщення $\langle U_i\rangle\in\mathbf{I}_s^{n+1}\mathbf{R}$ таку, щоб усі $\mathbf{T}_i$ належали області $\boldsymbol{\Omega}$ (у відповідності до поняття інтервальної належності елементів інтервальних просторів) без взаємних перетинів, і при цьому інтервальний критерій якості $\overset{*}{\boldsymbol{\kappa}}(\langle U\rangle)$ розміщення приймав найкраще значення, яке розуміємо у відповідності до відношення порядку, введеного в просторі $(\mathbf{I}_s\mathbf{R},\boldsymbol{\rho})$.

4. 3. Інтервальна математична модель основної оптимізаційної інтервальної задачі розміщення

За математичні моделі геометричних об'єктів, що мають змінні метричні характеристики, які породжуються похибками вихідних даних, пропонуються інтервальні множини як точкові множини інтервальних просторів. Інтервальне моделювання геометричних обмежень виконаємо у відповідності до основних положень інтервальної геометрії [23]. За інтервальний критерій $\boldsymbol{\kappa}(\langle V\rangle,\langle\Theta\rangle)$ якості розміщення (інтервального цільового відображення) на основі гомеоморфізму просторів $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ и R^2 обираємо таке: мінімум однієї з метричних характеристик області розміщення (наприклад, «інтервальну довжину» $\langle L\rangle$ або «інтервальну висоту» $\langle H\rangle$ зайнятої частини інтервальної області $\boldsymbol{\Omega}(\langle U_0\rangle)$ як характеристику результату розміщення в ній інтервальних об'єктів, максимум коефіцієнта заповнення області, мінімум відходів, мінімум відхилення від центра ваги, максимум використаної площі або об'єму, мінімум використаної кількості порошку для виготовлення сплаву певної пористості).

Не порушуючи загальності, надалі будемо розглядати лише задачі на мінімум, який розуміємо у відповідності до відношення порядку, введеного в інтервальному просторі $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

В роботі [29, 30], виходячи з основних положень теорії геометричного проектування, інтервальної геометрії та сформульованих задач дослідження, побудовано інтервальну математичну модель основної інтервальної оптимізаційної задачі розміщення:

$$\inf_{\langle U\rangle\in\mathbf{D}\subset\mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}}\mathbf{F}(\langle U\rangle,\langle\Theta\rangle), \tag{3}$$

$$(\langle U\rangle,\langle\Theta\rangle,\langle H\rangle)=(\langle U_1\rangle,\ldots,\langle U_n\rangle,\langle\Theta_1\rangle,\ldots,\langle\Theta_n\rangle,\langle H\rangle)\in\mathbf{D}\subset\mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R},$$

де $\mathbf{F}:\mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}\to\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – інтервальне відображення (інтервальний критерій якості розміщення), $\mathbf{D}$ – інтервальна область допустимих розв'язків задачі, яка описується системою виду

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{0i}(\langle U_0\rangle,\langle U_i\rangle)\geq\boldsymbol{\rho}_0,\ i\in J_n,\\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{ij}(\langle U_i\rangle,\langle U_j\rangle)-\overline{\boldsymbol{\rho}_{ij}^{-}}\geq\mathbf{0},\\ -\overline{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{ij}(\langle U_i\rangle,\langle U_j\rangle)}+\boldsymbol{\rho}_{ij}^{+}\geq\mathbf{0}, i,j\in J_n, i<j,\end{cases} \tag{4}$$

$\forall i\in\{0\}\cup J_n$, $\forall j\in J_n$, $J_n=\{1,\ldots,n\}$, $\mathbf{0}=\langle 0,0\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $\mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}$ – (3n+1)-вимірний інтервальний простір з інтервальною метрикою $\boldsymbol{\rho}$ (вигляд метрики обирається в залежності від конкретної оптимізаційної задачі), $\langle U_i\rangle=(\langle X_i\rangle,\langle Y_i\rangle,\langle Z_i\rangle)\in\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $i\in J_n$, $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – розширений простір центрованих інтервалів, $\boldsymbol{\rho}_{ij}^{-}$, $\boldsymbol{\rho}_{ij}^{+}$, $\boldsymbol{\rho}_{0i}^{-}$, $\boldsymbol{\rho}_{0i}^{+}$ – мінімальні і максимальні допустимі інтервальні відстані між об'єктами, що розмішуються, об'єктами і областю розміщення відповідно, $\tilde{\mathbf{\Phi}}_{0i}(\langle U_0\rangle,\langle U_i\rangle)$ і $\tilde{\mathbf{\Phi}}_{ij}(\langle U_i\rangle,\langle U_j\rangle)$ є нормалізовані інтервальні $\mathbf{\Phi}$-відображення,

4. 4. Класифікація реалізацій інтервальної математичної моделі основної інтервальної оптимізаційної задачі розміщення

Незважаючи на різноманітність просторових форм геометричних об'єктів, їх метричних характеристик, які породжуються науковою та практичною необхідністю, інтервальна математична модель основної інтервальної оптимізаційної задачі розміщення описує будь-яку оптимізаційну задачу розміщення геометричних об'єктів з урахуванням похибок вихідних даних і обмеженнями на мінімально и максимально допустимі відстані.

Через це наукову значущість набуває проблема класифікації інтервальних математичних моделей оптимізаційних задач геометричного проектування на основі особливостей інтервальних відображень інтервальних математичних моделей в евклідові простори.

1. Інтервальна оптимізаційна задача з квазилінійними обмеженнями.

Нехай $\mathbf{h}_i:\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}\to\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i\in J_n$, $\mathbf{g}_j:\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}\to\mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $j\in J_m$, – квазилінійні інтервальні відображення виду:

$$\mathbf{F}(U)=\sum_{i=1}^{n}\langle C_i\rangle*\langle X_i\rangle .$$

Тоді інтервальну математичну модель (3)-(4) набуде виду:

$$\mathbf{F}(U)\to\inf,\ U\in\mathbf{D}\subset\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}, \tag{5}$$

$$\mathbf{A}U\le\mathbf{B},$$

де

$$\mathbf{A}=[\langle A_{ij}\rangle]_{m\times n},\ \langle A_{ij}\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R},\ i\in J_n,\ j\in J_m,$$

$$\mathbf{B}=(\langle B_1\rangle,\langle B_2\rangle,...,\langle B_m\rangle),\ \langle B_i\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R}, i\in J_m,$$

$$U=(\langle X_1\rangle,\langle X_2\rangle,\ldots,\langle X_n\rangle)\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R},\ \langle X_i\rangle=\langle x_i,\nu_{x_i}\rangle\in\mathbf{I}_s\mathbf{R},$$

$$i\in J_n .$$

Обмеження (5) є системою інтервальних нерівностей виду

$$\sum_{j=1}^{n}\langle A_{ij}\rangle*\langle X_j\rangle\le\langle B_i\rangle, i\in J_n .$$

2. Квазилінійна інтервальна задача оптимізації:

$$\mathbf{F}(U)=\sum_{i=1}^{n}\langle C_i\rangle*\langle X_i\rangle\to\min,$$

$$\mathbf{A}U\le\mathbf{B},\ U\in\mathbf{I}_s^n\mathbf{R},\ x_i\ge 0,\ \nu_{x_i}\ge 0,\ i\in J_n .$$

3. Квазиквадратична інтервальна задача оптимізації.

$$\mathbf{F}(U)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle C_{ij}\rangle*\langle X_i\rangle*\langle X_j\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle D_i\rangle*\langle X_i\rangle .$$

4. Інтервальні задачі оптимізації на **ie** множині (**ie**-задачі). Якщо інтервальна область допустимих розв`язків є інтервальною **e**-множиною, або **ie**-множиною, $\mathbf{IE}=\theta(\mathbf{IM})\subset\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ (образом комбінаторної множини в результаті відображення занурення її в $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$).

5. Імітаційне інтервальне моделювання.

5. Стратегії реалізації інтервальних математичних моделей

Вибір стратегії реалізації інтервальних математичних моделей оптимізаційних задач розміщення залежить від того, до якого класу вони належать. З метою застосування існуючих мее тодів геометричного проектування для розв'язання оптимізаційних задач розміщення перейдемо від інтервального простору $\mathbf{I}_s^g\mathbf{R}$ до ізометричного йому евклідова простору R^{2g}, $g\in J_{2n+1}$.

Один із способів реалізації інтервальної математичної моделі задачі (3)–(4) базується на застосуванні відображення занурення інтервальної математичної моделі в евклідів простір. При побудові інтервальних відображень інтервальних математичних моделей в евклідові простори використовуються властивості інтервальних операцій, метрики та відношення порядку. При цьому для одних і тих же інтервальних моделей застосовуються різні види відображень в евклідові простори різних вимірностей. Наприклад, інтервальну математичну модель оптимізаційної задачі перетворюємо на двохкритеріальну оптимізаційну модель в евклідовому просторі.

Виходячи з особливостей області допустимих розв'язків для інтервальної оптимізаційної задачі розміщення, здійснюємо перехід від задачі (3)–(4) з векторною функцією цілі до послідовності однокритеріальних задач.

В залежності від результату, який вимагається, векторного або числового, обираємо такі варіанти перетворення цільового відображення задачі з інтервального простору в евклідів у вигляді інтервальних відображень $\mathbf{\Psi}_i:\mathbf{I}_s(\mathbf{R})\to R^1, i\in J_3$:

$$\mathbf{\Psi}_1(\langle L\rangle)=\sqrt{l^2+\nu_l^2};$$

$$\mathbf{\Psi}_2(\langle L\rangle)=|\,l\,|+|\nu_l|,\ \mathbf{\Psi}_3(\langle L\rangle)=(l,\nu_l). \tag{6}$$

Одержуємо математичну модель двохкритеріальної оптимізаційної задачі в просторі R^{2n}, яка відноситься до багатовимірних багатоекстремальних задач математичного програмування:

$$\Psi(T)=(\Psi_1(T),\Psi_2(T))\to\min,$$

$$T\in\Omega\subset R^{2m},\ T=\mathbf{H}_m(\Theta),\ \Psi_1(T)=h,\ \Psi_2(T)=\nu_h .$$

При розробці модифікації методу меж та гілок в інтервальному просторі використано поняття інтервальної гіперплощини, інтервальної m-площини в просторі $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, їх властивості та властивості інтервальної множини $\mathbf{E}_{nq}(\mathbf{G})$.

Один із способів реалізації інтервальної математичної моделі даної задачі базується на релаксації до відомої інтервальної оптимізаційної задачі меншої вимірності. При розробці модифікації методу меж та гілок в інтервальному просторі використано властивості комбінаторної множини інтервальних поліпереставлень, зануреної в евклідів простір.

Стратегія розв'язання ґрунтується на комбінації наближених та точних методів оптимізації й використовує схему методу апроксимації, модифікованого методу околів, що звужуються [1].

Будуються математичні моделі задач в інтервальному вигляді. Здійснюється відображення інтервальної області припустимих розв’язків зазначених задач та інтервальної функції цілі в евклідів простір. Задачі розглядаються як двохкритеріальні. Пропонуються способи розв’язання, що ґрунтуються на модифікаціях методу оптимізації по групах змінних і методу гілок та меж. Розроблено відповідне програмне забезпечення.

6. Інтервальні математичні моделі задач розміщення

6. 1. Оптимізаційна задача розміщення інтервальних паралелепіпедів

Інтервальну математичну модель (3)–(4) оптимізаційної задачі упаковки інтервальних паралелепіпедів [31, 32] $\mathbf{P}_i(U_i)$, $i \in J_n$, в інтервальній області $\mathbf{P}_0(U_0)$, виходячи з особливостей постановки задачі, подамо у вигляді [31]:

$$\inf_{(U,\langle H\rangle)\in \mathbf{D}\subset \mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}} \langle H\rangle, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i) \ge \mathbf{0},\ i\in J_n, \\ \mathbf{\Phi}_{ij}(U_i,U_j)\ge \mathbf{0},\ i\in J_n,\ j\in J_n,\ i<j, \end{cases} \tag{8}$$

$$U=(U_1,U_2,...,U_n)\in \mathbf{I}_s^{3n}\mathbf{R},$$

$$U_i=(\langle X_i\rangle,\langle Y_i\rangle,\langle Z_i\rangle)\in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R},\quad i\in J_n,$$

$$\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i)=\min_{k=1,2,...,6}\{\mathbf{f}_{0i}^k(U_0,U_i)\},$$

$$\mathbf{f}_{0i}^1(U_0,U_i)=-\overline{(\langle X_i\rangle-\langle\overline{X_0}\rangle)}+\langle A\rangle+\langle \nu_{a_0}-\nu_{a_i},\ \nu_{a_0}-\nu_{a_i}\rangle,$$

$$\mathbf{f}_{0i}^2(U_0,U_i)=\langle X_i\rangle-\langle\overline{X_0}\rangle+\langle A\rangle+\langle -\nu_{a_0}-\nu_{a_i},\ \nu_{a_0}-\nu_{a_i}\rangle,$$

$$\mathbf{f}_{0i}^3(U_0,U_i)=-\overline{(\langle Y_i\rangle-\langle\overline{Y_0}\rangle)}+\langle -\nu_{b_0}-\nu_{b_i},\ \nu_{b_0}-\nu_{b_i}\rangle,$$

$$\mathbf{f}_{0i}^4(U_0,U_i)=\langle Y_i\rangle-\langle\overline{Y_0}\rangle+\langle B\rangle+\langle -\nu_{b_0}-\nu_{b_i},\ \nu_{b_0}-\nu_{b_i}\rangle,$$

$$\mathbf{f}_{0i}^5(U_0,U_i)=-\overline{(\langle Z_i\rangle-\langle\overline{Z_0}\rangle)}+\langle B\rangle+\langle -\nu_{c_0}-\nu_{c_i},\ \nu_{c_0}-\nu_{c_i}\rangle,$$

$$\mathbf{f}_{0i}^6(U_0,U_i)=\langle Z_i\rangle-\langle\overline{Z_0}\rangle+\langle C\rangle+\langle -\nu_{c_0}-\nu_{c_i},\ \nu_{c_0}-\nu_{c_i}\rangle,$$

$$\langle A\rangle=\langle A_0\rangle-\langle A_i\rangle,\ \langle B\rangle=\langle B_0\rangle-\langle B_i\rangle,\ \langle C\rangle=\langle C_0\rangle-\langle C_i\rangle,$$

$$\mathbf{\Phi}_{ij}(U_i,U_j)=\max_{k=1,2,...,6}\left\{\mathbf{f}_{ij}^k(U_i,U_j)\right\},$$

$$\mathbf{f}_{ij}^1(U_i,U_j)=\langle X_j\rangle-\langle\overline{X_i}\rangle-\overline{\langle A'\rangle}-\overline{\langle \nu_{a_i}+\nu_{a_j},\nu_{a_i}-\nu_{a_j}\rangle},$$

$$\mathbf{f}_{ij}^2(U_i,U_j)=-\overline{(\langle X_j\rangle-\langle\overline{X_i}\rangle)}-\overline{\langle A'\rangle}-\overline{\langle \nu_{a_i}+\nu_{a_j},\nu_{a_i}-\nu_{a_j}\rangle},$$

$$\mathbf{f}_{ij}^3(U_i,U_j)=(\langle Y_j\rangle-\langle\overline{Y_i}\rangle)-\overline{\langle B'\rangle}-\overline{\langle \nu_{b_i}+\nu_{b_j},\ \nu_{b_i}-\nu_{b_j}\rangle},$$

$$\mathbf{f}_{ij}^4(U_i,U_j)=-\overline{(\langle Y_j\rangle-\langle\overline{Y_i}\rangle)}-\overline{\langle B'\rangle}-\overline{\langle \nu_{b_i}+\nu_{b_j},\ \nu_{b_i}-\nu_{b_j}\rangle},$$

$$\mathbf{f}_{ij}^5(U_i,U_j)=(\langle Z_j\rangle-\langle\overline{Z_i}\rangle)-\overline{\langle C'\rangle}-\overline{\langle \nu_{c_i}+\nu_{c_j},\nu_{c_i}-\nu_{c_j}\rangle},$$

$$\mathbf{f}_{ij}^6(U_i,U_j)=-\overline{(\langle Z_j\rangle-\langle\overline{Z_i}\rangle)}-\overline{\langle C'\rangle}-\overline{\langle \nu_{c_i}+\nu_{c_j},\nu_{c_i}-\nu_{c_j}\rangle},$$

$$\langle A'\rangle=\langle A_i\rangle+\langle A_j\rangle,\ \langle B'\rangle=\langle B_i\rangle+\langle B_j\rangle,\ \langle C'\rangle=\langle C_i\rangle+\langle C_j\rangle.$$

де $\mathbf{\Phi}_{0i}(U_0,U_i)$, $i\in J_n$, – інтервальне $\mathbf{\Phi}$-відображення $\mathbf{P}_i(U_i)$ і $\mathbf{P}_0^*(U_0)$, $\mathbf{\Phi}_{ij}(U_i,U_j)$ – інтервальне $\mathbf{\Phi}$-відображення $\mathbf{P}_i(U_i)$ і $\mathbf{P}_j(U_j)$, а $\langle X_j\rangle-\langle\overline{X_i}\rangle$, $\langle Y_j\rangle-\langle\overline{Y_i}\rangle$, $\langle Z_j\rangle-\langle\overline{Z_i}\rangle$ – координати інтервальної направленої множини $\underline{U_{ij}=U_j-\overline{U_i}}$, $U_i=(\langle X_i\rangle,\langle Y_i\rangle,\langle Z_i\rangle)$, $i<j$, $\forall i,j\in J_n$, $\overline{\langle X\rangle}=\langle x,\nu_x\rangle=\langle x,-\nu_x\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ – спряжений до $\langle X\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

За інтервальне цільове відображення приймаємо «інтервальну висоту» $\langle H\rangle=\langle h,\nu_h\rangle$ зайнятої частини інтервального паралелепіпеда $\mathbf{P}_0(U_0)$ як результат розміщення в ньому інтервальних паралелепіпедів $\mathbf{P}_i(U_i)$, $i\in J_n$.

Очевидно,

$$\langle H\rangle=\max_{j\in J_n}\boldsymbol{\rho}(\mathbf{\Pi}_0,\mathbf{\Pi}_j),$$

де $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{\Pi}_0,\mathbf{\Pi}_j)$ – інтервальна відстань між інтервальною гіперплощиною виду $\mathbf{\Pi}_0:\mathbf{f}_0^6(U_0)=\mathbf{0}$, інтервальної паралельної координатній площині $\langle X\rangle O\langle Y\rangle$ і такої, яка приймає участь у формуванні інтервальної межі $\mathbf{fr}\,\mathbf{P}_0(U_0)$, і інтервальними гиперплощинами $\mathbf{\Pi}_j:\mathbf{f}_j^5(U_j)=\mathbf{0}$, $j\in J_n$, які приймають участь у формуванні $\mathbf{fr}\,\mathbf{P}_i(U_i)$.

Задача (7)–(8) є інтервальною оптимізаційною задачею з квазилінійними обмеженнями. Тому виконано занурення інтервальної математичної моделі в евклідів простір. Одержано математичну модель двохкритеріальної оптимізаційної задачі в просторі R^{2n}, яка відноситься до многовимірних многоекстремальних задач математичного програмування:

При побудові відображень інтервальних моделей в евклідові простори використовуються властивості інтервальних операцій, метрики та відношення порядку [31].

Здійснюється перехід [31], [32] від задачі (7)–(8) в інтервальному просторі до двохкритеріальної задачі в евклідовому просторі. Пропонується стратегія розв'язання, яка базується на використанні метода оптимізації за групами змінних і модифікованого методу околів, що звужуються. Рис. 1 ілюструє результат розв'язання задачі оптимального розміщення паралелепіпедів з урахуванням похибок метричних характеристик та параметрів розміщення.

Аналіз результатів дослідження та порівняння з аналогами ідеалізованих задач [32] доводять доцільність та ефективність застосування інтервальної математичної моделі поставленої задачі та ефективність запропонованих модифікацій методів оптимізації.

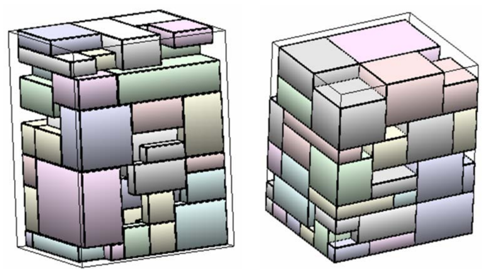

Рис. 1. Ілюстрація в R^3 розміщення паралелепіпедів: *а* — з урахуванням похибок; *б* — без урахування похибок

6. 2. Комбінаторна оптимізаційна задача розміщення інтервальних паралелепіпедів

Особливості метричних характеристик (довжина та ширина паралелепіпедів є однаковою, але з різними похибками) геометричних об'єктів, що розміщуються, та обмеження на їх кольори дає можливість розглядати оптимізаційну задачу розміщення таких інтервальних паралелепіпедів як комбінаторну і приводять до понять інтервальних комбінаторних множин [6, 32].

Область допустимих розв'язків задачі промодельована як підмножини образів $\mathbf{E}_{nq}(\mathbf{G})$ множини всіх інтервальних переставлень $\mathbf{P}_{nq}(\mathbf{G})$ після її занурення в евклідів простір, тобто $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}_{nq}(\mathbf{G}) \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$, досліджено її властивості, $\mathbf{E}_{nq}(\mathbf{G})$ – інтервальна комбінаторна множина, породжена множиною $\mathbf{G} = \{\langle G_1\rangle, ..., \langle G_n\rangle\}$, $\langle G_i\rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i \in J_n$.

Інтервальна математична модель задачі набуде вигляду

$$\langle H^*\rangle = \langle h^*, \nu_h^*\rangle = \min_{\langle U\rangle \in \mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G})} \langle H\rangle ,$$

$$\langle H^*\rangle = \langle h^*, \nu_h^*\rangle = \min_{\langle U\rangle \in \mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G})} \langle H\rangle \ \langle H\rangle = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le k} \langle H_{ij}\rangle ,$$

$$\langle H_{ij}\rangle = \sum_{t=1}^{q_{ij}} \langle X_{ij}^t\rangle + \sum_{t=1}^{q_{ij-1}} \left\langle \left| \nu_{x_{ij}^t} + \nu_{x_{ij}^{t+1}} \right|, \left| \nu_{x_{ij}^t} - \nu_{x_{ij}^{t+1}} \right| \right\rangle ,$$

$$i \in J_k, j \in J_m, t \in \{q_{11}, q_{12}, ... q_{km}\},$$

$$\langle U\rangle = (\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, ..., \langle X_n\rangle) =$$
$$= (\langle X_{11}^1\rangle, ..., \langle X_{11}^{11}\rangle, ..., \langle X_{km}^1\rangle, ..., \langle X_{km}^{r_{km}}\rangle) \in \mathbf{I}_s^n\mathbf{R},$$

$\mathbf{E}_{ng}(\mathbf{G}) = \theta(\mathbf{P}_{ng}(\mathbf{G})) \subset \mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$ – образ множини усіх інтервальних перестановок [ ] при зануренні в n- вимірний інтервальних простір $\mathbf{I}_s^n\mathbf{R}$

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, ..., \boldsymbol{\pi} \ ),$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\langle H_{11}^1\rangle, \langle H_{11}^2\rangle, ..., \langle H_{11}^{r_{11}}\rangle, ..., \langle H_{12}^1\rangle, \langle H_{12}^2\rangle, ..., \langle H_{12}^{r_{12}}\rangle, ..., \langle H_{km}^1\rangle, ..., \langle H_{km}^{r_{km}}\rangle),$$

$$\langle H_{ij}^t\rangle \in \mathbf{G}, \ i \in J_k, j \in J_m, t \in \{r_{11}, r_{12}, ... r_{km}\}$$

$$\boldsymbol{\theta} : \pi \to U, \ \langle X_j\rangle = \langle \pi_j\rangle .$$

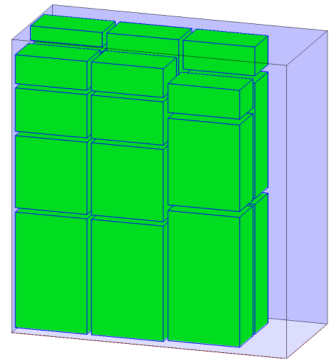

Рис. 2. Зображення в R^3 розв'язку інтервальної комбінаторної задачі оптимального розміщення інтервальних паралелепіпедів

Одержана інтервальна математична модель реалізована в евклідовому просторі модифікованими методами меж та гілок, околів, що звужуються, що забезпечує прогнозування отриманих результатів, та може використовуватися при розв'язанні інженерних, економічних, дослідницьких, в системах автоматизованого проектування, діагностиці програмного забезпечення і т. п.

6. 3. Оптимізаційна задача розміщення інтервальв них циліндрів в інтервальній призмі

Виходячи з особливостей постановки задачі, використаємо інтервальну математичну модель (7)–(8), виконавши деякі побудови [33]:

$$\boldsymbol{\Phi}_{ij}(U_i, U_j) = \boldsymbol{\varphi}(U_i - \overline{U_j}) = \boldsymbol{\varphi}(U_{ij}) ,$$

де $U_{ij} = U_i - \overline{U_j}$, $\overline{U} = (\overline{\langle X\rangle}, \overline{\langle Y\rangle}, \overline{\langle Z\rangle}) \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$, $\langle R\rangle = \langle R_i'\rangle + \langle R_j'\rangle$, $\langle H\rangle = \langle H_i'\rangle + \langle H_j'\rangle$,

$\langle R_k'\rangle = \langle r_k + \nu_{r_k}, \nu_{r_k}\rangle, k = 1,2$, $\langle H_k'\rangle = \langle h_k + \nu_{h_k}, \nu_{h_k}\rangle, k = 1,2$.

Доповнення інтервальної призми $\boldsymbol{\Omega}(U_0)$ до $\mathbf{I}_s^3\mathbf{R}$ можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{\Omega}^*(U_0) = (\mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \setminus \mathrm{cl}\,\boldsymbol{\Omega}(U_0)) \cup \mathbf{fr}\,\boldsymbol{\Omega}(U_0)) ,$$

$$\mathrm{int}\,\boldsymbol{\Omega}^*(U_0) = \{U \in \mathbf{I}_s^3\mathbf{R} \mid \boldsymbol{\psi}(U) = \langle \psi, \nu_\psi\rangle > \langle 0, \nu_\psi\rangle\} ,$$

$$\boldsymbol{\psi}(U) = \min\{\boldsymbol{\eta}_1(U), \boldsymbol{\eta}_2(U), ..., \boldsymbol{\eta}_m(U), \boldsymbol{\chi}_1(U), \boldsymbol{\chi}_2(U)\} ,$$

$$\boldsymbol{\chi}_1'(U) = -\overline{\boldsymbol{\chi}_1(U)} = \overline{\langle Z\rangle - \overline{\langle H_0\rangle}} = -\overline{\langle Z\rangle} + \langle H_0\rangle ,$$

$$\boldsymbol{\chi}_2'(U) = -\overline{\boldsymbol{\chi}_2(U)} = -\overline{(-\overline{\langle Z\rangle} - \overline{\langle H_0\rangle})} = \langle Z\rangle + \langle H_0\rangle$$

$$\boldsymbol{\eta}_i(U) = \varphi(a_i \cdot \langle X\rangle) + \varphi(b_i \cdot \langle Y\rangle) + \langle C_i\rangle , \ i \in J_m .$$

Інтервальне $\boldsymbol{\Phi}$-відображення об'єктів $\boldsymbol{\Omega}^*(U_0)$ и $\mathbf{C}_k(U_k)$ набуде вигляду:

$$\boldsymbol{\Phi}(U_0, U_k) = \boldsymbol{\psi}(U_k - \overline{U_0}) = \boldsymbol{\psi}(U) = \boldsymbol{\psi}(U_{0k}) ,$$

$$\boldsymbol{\psi}(U) = \min\{\boldsymbol{\eta}_1'(U), \boldsymbol{\eta}_2'(U), ..., \boldsymbol{\eta}_m'(U), \boldsymbol{\chi}_1(U), \boldsymbol{\chi}_2(U)\} ,$$

$$\boldsymbol{\chi}_1'(\mathrm{U}) = -\overline{\boldsymbol{\chi}_1(\mathrm{U})} = \overline{\langle \mathrm{Z}\rangle - \overline{\langle \mathrm{H}\rangle}} = -\overline{\langle \mathrm{Z}\rangle} + \langle \mathrm{H}\rangle,$$

$$\boldsymbol{\chi}_2'(\mathrm{U}) = -\overline{\boldsymbol{\chi}_2(\mathrm{U})} = -(\overline{-\overline{\langle \mathrm{Z}\rangle} - \overline{\langle \mathrm{H}\rangle}}) = \langle \mathrm{Z}\rangle + \langle \mathrm{H}\rangle,$$

$$\boldsymbol{\eta}_i'(\mathrm{U}) = \varphi(a_i \cdot \langle \mathrm{X}\rangle) + \varphi(b_i \cdot \langle \mathrm{Y}\rangle) + \langle \mathrm{C}_i'\rangle - \overline{\langle \mathrm{R}_k\rangle},\ i \in J_m,$$

$$\langle \mathrm{C}_i'\rangle = \left\langle \left|\nu_{c_i} + \nu_{r_r}\right|, \left|\nu_{c_i} - \nu_{r_r}\right| \right\rangle,\ \langle \mathrm{H}\rangle = \langle \mathrm{H}_0\rangle - \overline{\langle \mathrm{H}_k'\rangle},$$

де $\mathbf{U}_{0k} = (\langle \mathrm{X}\rangle - \overline{\langle \mathrm{X}_k\rangle}, \langle \mathrm{Y}\rangle - \overline{\langle \mathrm{Y}_k\rangle})$ – інтервальна направлена множина.

Здійснюється [33] перехід до двохкритеріальної задачі в евклідовому просторі. Запропоновано стратегію розв'язанні задачі, що базується на використанні комбінації модифікованого метода околів, що звужуються, і метода можливих напрямків.

6. 4. Застосування інтервального моделювання в порошковій металургії

Побудовано інтервальну математичну модель [34, 35] задачі оптимізації кількості порошку, потрібного для досягнення певного рівня пористості сплаву при виготовленні виробу з антифрикційних матеріалів.

Розглядається задача оптимізації упакування великого числа інтервальних куль в інтервальний циліндричний контейнер. Будується інтервальна математична модель задачі. Розв'язання задачі зводиться до розв'язання послідовності задач упаковки з фіксованим числом куль. Пропонується підхід до їх розв'язання на основі занурення інтервальної математичної моделі в евклідів простір.

Інтервальна математична модель інтервальної оптимізаційної задачі розміщення великого числа інтервальних куль в інтервальну циліндричну трубу має вигляд (3)–(8), якщо в співвідношення (3) розглядати максимум інтервального цільового відображення і за цільове інтервальне відображення взяти таке відображення:

$$\mathbf{F}(\langle \mathrm{U}\rangle, \langle \Theta\rangle) = \boldsymbol{\Gamma}(\langle \mathrm{U}^*\rangle) = \langle \gamma^*, \nu_{\gamma^*}\rangle,\ \gamma \in \mathbb{k},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\langle \mathrm{U}\rangle) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\langle \mathrm{U}_k\rangle) = \left\langle \sum_{k=1}^{n} f_1(u_k), \sum_{k=1}^{n} f_2(\nu_{u_k}) \right\rangle,$$

$$f_1(u_k) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \mathbf{p}_3(\mathbf{S}_k(\langle \mathrm{U}_k\rangle)) \subset \mathbf{p}_3(\mathbf{D}), \\ 0, \text{ якщо } \mathbf{p}_3(\mathbf{S}_k(\langle \mathrm{U}_k\rangle)) \not\subset \mathbf{p}_3(\mathbf{D}), \end{cases}$$

$$f_2(\nu_{u_k}) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \mathbf{r}_3(\mathbf{S}_k(\langle \mathrm{U}_k\rangle)) \subset \mathbf{r}_3(\mathbf{D}), \\ 0, \text{ якщо } \mathbf{r}_3(\mathbf{S}_k(\langle \mathrm{U}_k\rangle)) \not\subset \mathbf{r}_3(\mathbf{D}), \end{cases}$$

де

$$\langle \mathrm{U}\rangle = (\langle \mathrm{U}_1\rangle, \ldots, \langle \mathrm{U}_n\rangle) \in \mathbf{I}_s^{3n}\mathbf{R},$$

$$\langle \mathrm{U}_k\rangle = \langle u_k, \nu_{u_k}\rangle = (\langle \mathrm{X}_k\rangle, \langle \mathrm{Y}_k\rangle, \langle \mathrm{Z}_k\rangle) \in \mathbf{I}_s^{3}\mathbf{R},$$

$\forall k \in J_n$, $\gamma^* \in \mathrm{N}$ – максимальне число упакованих куль, $\nu_{\gamma^*} \in \mathrm{N}$ – похибка цього числа, $\mathbf{D} \subset \mathbf{I}_s^{3n}\mathbf{R}$ – інтервальна область допустимих розв'язків.

Здійснено декомпозицію задачі до послідовності задач розміщення з фіксованим числом куль, які сформульовано як задачі математичного програмування з нелінійними обмеженнями та інтервальним цільовим відображенням "інтервальна висота" зайнятої частини інтервальної циліндричної області:

$$\boldsymbol{\kappa}_k(\langle \tilde{\mathrm{U}}\rangle) = \inf_{(\langle \mathrm{U}\rangle, \langle \mathrm{H}\rangle) \in \tilde{\mathbf{D}} \subset \mathbf{I}_s^{3n+1}\mathbf{R}} \langle \mathrm{H}_k\rangle,\ \forall k \in J_n,$$

де $\langle \mathrm{H}_k\rangle$ – інтервальна висота зайнятої частини області $\boldsymbol{\Omega}$ після розміщення в ній $\mathbf{S}_k(\langle \mathrm{U}_k\rangle)$, $\forall k \in J_n$. Кожна з k інтервальних оптимізаційних задач виду перетворюється на двохкритеріальну оптимізаційну задачу через її занурення у евклідів простір відповідної вимірності.

Запропоновано стратегію пошуку оптимального розв'язку задачі, що базується на використанні генерації початкових точок на основі решіткової упаковки методом імітаційного моделювання, модифікованого методу меж та гілок та методу можливих напрямків. Проведено числові експерименти.

В результаті розв'язання одержано інтервал, в який гарантовано попадає значення цільової функції. Даний підхід дозволяє обчислити межі кількості порошку при заданих межах вхідних параметрів задачі. Комп'ютерна програма [35] застосовується на ділянці порошкової металургії Полтавського державного підприємства «Виробниче об'єднання «Знамено», що підтверджено відповідним актом впровадження.

Аналіз результатів дослідження та порівняння з аналогами ідеалізованих задач доводять доцільність та ефективність застосування інтервальної геометрії при моделюванні та розв'язанні оптимізаційних задач розміщення геометричних об'єктів, метричні характеристики та параметри розміщення яких задані з похибками.

При розв'язанні запропонованих задач використовуються математичне і програмне забезпечення, розроблене під керівництвом професора Стояна Ю. Г. у відділі математичного моделювання та оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України.

7. Результати дослідження щодо подальшого розвитку інтервального моделювання в геометричному проектуванні

Наукові результати роботи є подальшим розвитком теорії геометричного проектування і служать теоретичною основою інтервальної оптимізації, методології розв'язання оптимізаційних задач розміщення з урахуванням похибок. Результати дослідження дозволяють будувати та аналізувати адекватні математичні моделі оптимізаційних задач розміщення завдяки використанню інтервальної геометрії та методів локальної та глобальної оптимізації при їх розв'язанні.

Ефективність запропонованих засобів математичного моделювання підтверджується порівнянням отриманих результатів за критеріями існування, адекватності і конструктивності побудови математичних моделей з аналогічними результатами вітчизняних і зарубіжних дослідників.

Створено програмні продукти у вигляді комп'ютерних програм, що реалізують розроблені засоби математичного моделювання та методи оптимізації, та розраховані на розв'язання двовимірних та трьохвимірних задач упакування в різних галузях науки та техніки:

– розміщення інтервальних паралелепіпедів "Packing of Interval Parallelepipeds" [33];

– розміщення інтервальних многокутників “Packing of Interval Polygons” [36],

– імітаційне моделювання властивостей сплаву в залежності від розмірів гранул “Імітаційне моделювання властивостей сплава” [35].

8. Висновки

Результати даного дослідження є подальшим розвитком теорії інтервальної геометрії та теорії геометричного проектування: побудовано інтервальну математичну модель основної інтервальної оптимізаційної задачі розміщення геометричних об'єктів, здійснено класифікацію множини її реалізацій по вигляду цільового інтервального відображення та основних інтервальних геометричних обмежень.

Побудовано інтервальну математичну модель оптимізаційної задачі упаковки інтервальних паралелепіпедів. Виконане занурення інтервальної математичної моделі в евклідів простір. Розроблено метод розв'язання задачі як двухкритеріальної оптимізаційної задачі розміщення. Запропоновано стратегію, що базується на використанні метода оптимізації по групах змінних і модифікованого метода околів, що звужуються. Виконані тестові експерименти по розміщенню 60 паралелепіпедів.

Побудовано інтервальну математичну модель комбінаторної оптимізаційної задачі упаковки паралелепіпедів, яка дозволяє з одного боку, – раціонально врахувати похибки початкових даних, з іншого, – в подальшому, при її реалізації використовувати відомі методи комбінаторної оптимізації, таким чином, строго визначаючи інтервал, якому буде належати значення цільової функції. Може бути використана при тестуванні програмного забезпечення, при моделюванні задач компоновки складних технічних систем, які можна апроксимувати з наперед заданою точністю об'єднанням паралелепіпедів, метричні характеристики яких задані з похибками.

Щодо задачі розміщення великої кількості куль в область циліндричної форми, пропонується підхід до її розв'язання на основі занурення її інтервальної математичної моделі в евклідів простір. Розроблено стратегію пошуку її оптимального розв'язку, що базується на основі решіткової упаковки методом імітаційного моделювання, модифікованого методу меж та гілок та методу можливих напрямків.

Таким чином, розроблено методологію моделювання та розв'язання оптимізаційних задач геометричного проектування з урахуванням похибок метричних характеристик та параметрів розміщення.

Практичне значення результатів підтверджується їх впровадженням. Результати роботи впроваджено в держбюджетні науково-дослідні роботи, в навчальний процес. Результати дослідження були використані на Полтавському державному підприємстві “Виробниче об'єднання “Знамено” (м. Полтава, Україна) для прогнозування властивостей сплаву в порошковій металургії, на державному науково-виробничому підприємстві „Демітекс» (м. Полтава, Україна) при вирішенні проблеми упакування виготовленої продукції.

Сукупність розроблених застосувань інтервальних математичних моделей, модифікованих методів локальної та глобальної оптимізації і програмних комплексів забезпечує підвищення точності отриманих результатів, може використовуватися при розв'язанні інженерних, економічних, дослідницьких, конструкторських і дизайнерських задач, в системах автоматизованого проектування генеральних планів підприємств, діагностиці програмного забезпечення, системах автоматичного протипожежного захисту, агротехнічних і екологічних системах, при створенні ресурсозберігаючих технологій, у вугільній і металургійній промисловості, при розробці апаратно-технологічного компонування, задачі досягнення певних властивостей сплаву в порошковій металургії тощо.

9. Благодарность и признательность

Представленная работа является результатом сотрудничества, поддержки и помощи многих людей. Искренняя благодарность моему Учителю и научному консультанту, Ю. Г. Стояну, всем сотрудникам отдела математического моделирования и оптимального проектирования, соавторам по публикациям. Наши совместные работы, семинары, научные дискуссии во многом определили результаты данной работы. Особая благодарность ведущему специалисту отдела Т. Е. Романовой за неоценимую помощь в выполнении исследований и моральную поддержку.

Література

1. Стоян, Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования [Текст] / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – Киев: Наукова думка, 1986. – 268 с.
2. Канторович, Л. В. Расчет рационального раскроя промышленных материалов [Текст] / Л. В. Канторович, В. А. Залгаллер. – Лениздат, 1951 – 197 с.
3. Канторович, Л. В. Математические методы организации и планирования производства [Текст] / Л. В. Канторович. – в сб. «Применение математики в экономических исследованиях». – Изд-во ЛГУ, 1939. – 68 с.
4. Канторович, Л. В. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных задач [Текст] / Л. В. Канторович // Доклады АН СССР. – 1940 – Т. 23, J5 3. – С. 212–215.
5. Stoyan, Yu. G. Local Optimization Method in Placement Problems of Polygons [Text] / Yu. G. Stoyan, A. V. Pankratov // Доповіді НАН України. – 2001. – № 9. – P. 98–103.
6. Yemets, O. A. A Mathematical Interval Model of a Combinatorial Problem of Packing of Color Rectangles [Text] / O. A. Yemets, L.-G. Yevseeva, N. G. Romanova // Cybernetics and Systems Analysis. – 2001. – Vol. 37, Issue 3. – P. 408–414.

7. Чугай, А. М. Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей [Текст] / А. М.Чугай // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 1. – С. 58–63.
8. Stoyan, Y. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip [Text] / Y. Stoyan, G. Yas'kov // European Journal of Operational Research. – 2004. – Vol. 156, Issue 3. – P. 590–600. doi: 10.1016/s0377-2217(03)00137-1
9. Stoyan, Y. Mathematical model and solution method of optimization problem of placement of rectangles and circles taking into account special constraints [Text] / Y. Stoyan, G. Yaskov // International Transactions in Operational Research. – 1998. – Vol. 5, Issue 1. – P. 45–57. doi:10.1016/s0969-6016(98)00003-3
10. Dowsland, K. A. A local search approach to a circle cutting problem arising in the motor cycle industry [Text] / K. A. Dowsland, M. Gilbert, G. Kendall // Journal of the Operational Research Society. – 2006. – Vol. 58, Issue 4. – P. 429–438. doi: 10.1057/palgrave.jors.2602170
11. Dowsland, K. A. Using tree search bounds to enhance a genetic algorithm approach to two rectangle packing problems [Text] / K. A. Dowsland, E. A. Herbert, G. Kendall, E. Burke // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 168, Issue 2. – P. 390–402. doi: 10.1016/j.ejor.2004.04.030
12. Burke, E. K. A new placement heuristic for the orthogonal stock-cutting problem [Text] / E. K. Burke, G .Kendall, G. Whitwell // Operations Research. – 2004. – Vol. 52, Issue 4. – P. 655–671. doi: 10.1287/opre.1040.0109
13. Hellier, R. Irregular Packing Using the Line and Arc No-Fit Polygon [Text] / R. Hellier, G .Kendall, G. Whitwell // Operations Research. – 2010. – Vol. 58, Issue 4. –P. 948–970. doi: 10.1287/opre.1090.0770
14. Milenkovic, V. J. Translational polygon containment and minimal enclosure using mathematical programming [Text] / V. J. Milenkovic, K. Daniels // International Transactions in Operational Research. – 1999. – Vol. 6, Issue 5. – P. 525–554. doi:10.1111/j.1475-3995.1999.tb00171.x
15. Oliveira, J. F. TOPOS – A new constructive algorithm for nesting problems [Text] / J. F. Oliveira, A. M. Gomes, J. S. Ferreira // OR Spektrum. – 2000. – Vol. 22, Issue 2. – P. 263–284. doi: 10.1007/s002910050105
16. Scheithauer, G. Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects [Text] / G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova // Cybernetics and Systems Analysis. – 2005. – Vol. 41, Issue 3. – P. 332–342. doi: 10.1007/s10559-005-0067-y
17. Moore, R. E. Interval analysis [Text] / R. E. Moore. – N.Y.: Prentice-Hall, 1966. – 400 p.
18. Kaucher, E. Interval Analysis in the Extended Interval Space IR [Text] / E. Kaucher // Fundamentals of Numerical Computation (Computer-Oriented Numerical Analysis). Computing Supplementum. – 1980. – Vol. 2. – P. 33–49. doi:10.1007/978-3-7091-8577-3_3
19. Markov, S. M. Extended interval arithmetic involving infinite intervals [Text] / S. M. Markov // Mathematica Balkanika. – 1992. – Vol. 6. – P. 269–304.
20. Hansen, E. Bounding the solution of interval linear equations [Text] / E. Hansen // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1992. Vol. 29, Issue 5. P. 1493–1503. doi: 10.1137/0729086
21. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
22. Калмыков, С. А. Методы интервального анализа [Текст] / С. А. Калмыков, Ю. И. Шокин, З. Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, 1986. – 224 с.
23. Shary, S. P. Solving the tolerance problem for interval linear equations [Text] / S. P. Shary // Interval Computations. – 1994. – Vol. 2. – P. 6–26.
24. Стоян, Ю. Г. Введення в інтервальну геометрію [Текст]: навч. пос. / Ю. Г. Стоян. – Х.: ХНУРЕ, 2006. – 98 с.
25. Стоян, Ю. Г. Метрическое пространство центрированных интервалов [Текст] / Ю. Г. Стоян // Доклады НАН Украины. Сер. А. – 1996. – № 7. – С. 23–25.
26. Стоян, Ю. Г. Интервальные отображения [Текст] / Ю. Г. Стоян // Доповіді НАН України. – 1996. – № 10. – С. 57–63.
27. Стоян, Ю. Г. Account of errors in optimization placement problem [Текст] / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова // Проблемы машиностроения. – 1998. – Т. 1, № 2. – С. 31–41.
28. Романова, Т. Е. Интервальное пространство InsR [Текст] / Т. Е. Романова // Доклады НАН Украины. – 2000. – № 9. – С. 36–41.
29. Євсеєва, Л. Г. Засоби побудови математичних моделей задач оптимізаційних розміщення в інтервальних просторах [Текст] / Л. Г. Евсеева // Технологический аудит и резервы производства. – 2014.– Т. 6, № 3 (20). –С. 66–73.
30. Гребенник, И. В. Основная оптимизационная задача геометрического проектирования в интервальном виде [Текст] / И. В. Гребенник, Л. Г. Евсеева, Т. Е. Романова // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. – 2004. – № 2. – С. 68–72.
31. Евсеева, Л. Г. Математическая модель и метод решения задачи упаковки интервальных параллелепипедов [Текст] / Л. Г. Евсеева // Доклады НАН Украины. – 2008. – № 2. – С. 48–53.
32. А. с. № 24827 Україна. Комп'ютерна програма "Packing of Interval Parallelepipeds" [Текст] / Стоян Ю. Г., Панкратов О. В., Євсеєва Л. Г. – заявл. 01.04.08; опубл. 25.06.08.
33. Евсеева, Л. Г. Задача упаковки интервальных цилиндров в интервальную призму [Текст] / Л. Г. Евсеева, А. Н. Чугай // Системи управління, навігації та зв'язку. – Київ, 2007. – С. 121–128.
34. Евсеева, Л. Г. Применение интервального моделирования в порошковой металлургии [Текст] / Л. Г. Евсеева, Г. Н. Яськов // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 7 (48). – С. 95–98.
35. А. с. № 27362 Україна. Комп'ютерна програма "Имитационное моделирование свойств сплава" [Текст] / Стоян Ю. Г., Євсеєва Л. Г., Яськов Г. Н. – заявл. 30.12.08; опубл. 23.01.09.
36. А. с. № 25506 Україна. Комп'ютерна програма "Packing of Interval Polygons" [Текст] / Панкратов О. В., Євсеєва Л. Г. – заявл. 12.07.08; опубл. 28.08.08.