УДК 511

М. Оразов, к.ф-м.н.

О ЧИСЛАХ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ СУММЫ СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Туркменский сельскохозяйственный университет имени С.А. Ниязова, г. Ашхабад

В статье рассмотрена аддитивная задача о представлении натуральных чисел, не превосходящих заданной границы, в форме суммы степеней простых чисел. Для случая, когда показатели степеней удовлетворяют некоторым условиям, получена асимптотическая формула для количества представлений.

Ключевые слова: *натуральное число, представление, сумма степеней, асимптотическая формула.*

Введение и постановка задачи

Работы ряда авторов [1], [2], [3] посвящены вопросу о представлении целых чисел в виде суммы степеней, когда показатели степеней попарно различны.

Целью настоящей работы является решение задачи о плотности последовательности чисел, представимых в форме $n_1^{k_1} + n_2^{k_2} + \cdots + n_{m1}^{k_m}$,

где $k_1, k_2, ..., k_m$ – натуральные показатели, удовлетворяющие некоторой системе неравенств, а $n_1, n_2, ..., n_m$ – произвольные натуральные числа.

Решение задачи

Теорема 1. Пусть $k_1, k_2, ..., k_m$ – натуральные числа, причем $k_1 > 1$ и

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k_m} < \dfrac{1}{k_{m-1}} \\ \dfrac{1}{k_m} + \dfrac{1}{k_{m-1}} < \dfrac{1}{k_{m-2}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{k_m} + \dfrac{1}{k_{m-1}} + \cdots + \dfrac{1}{k_2} < \dfrac{1}{k_1} \end{cases} \tag{1}$$

Тогда число чисел, не превосходящих x, представимых в форме $n_1^{k_1} + n_2^{k_2} + \cdots + n_{m1}^{k_m}$, где $n_1, n_2, ..., n_m$ натуральные числа, равно

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+1\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{k_m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_m}\right)} x^{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_m}} + O\left(x^{\beta_m(k_1,k_2,\dots,k_m)+\varepsilon}\right), \tag{2}$$

где ε – сколь угодно малое фиксированное положительное число; $\beta_m(k_1, k_2, \dots, k_m)$ – функция m переменных, определенная следующим образом: $\beta_1(k) = 0$ для любого k,

$$\beta_m(k_1, k_2, \dots, k_m) = \max\left(\frac{1}{k_1} + \beta_{m-1}(k_2, \dots, k_m), 2\left(\frac{1}{k_2} + \cdots \frac{1}{k_m}\right)\right) \tag{3}$$

при $m > 1$.

В частности при $m = 2$ получаем: число чисел, не превосходящих x, представимых в форме $n_1^{k_1} + n_2^{k_2}$ при условии $k_1 < k_2$, равно

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+1\right)}x^{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}++O\left(x^{\max\left(\frac{1}{k_1},\frac{1}{k_2}\right)+\varepsilon}\right).$$

Доказательство. При $m=2$ этот результат получен в работе[3].

Воспользуемся следующими вспомогательными предложениями, которые доказаны в работе[3].

Пусть U и V две возрастающие последовательности натуральных чисел, $N_U(x)$ и $N_V(x)$ − их подсчитывающие функции

$$M_U(x)=\max_{1\le a<x}\sum_{\substack{a<u\le x\\ u,u-a\in U}}1$$

Лемма.1. При $x\ge 0$

$$N\left(n\le x, n=u+\vartheta\right)=\int_0^x N_U(x-y)dN_V(y)-\theta M_U(x)N_V^2(x),$$

где $0\le\theta\le 1$ (здесь и в дальнейшем $N(\ldots)$ − означает число натуральных чисел, удовлетворяющих условиям, записанных в скобках; в данном случае речь идет о числе чисел не превосходящих x, представимых в форме $u+\vartheta$, где $u\in U$, $\vartheta\in V$).

Лемма 2. Если U − последовательность значений целочисленного многочлена степени ≥ 2, аргумент которого пробегает произвольную последовательность натуральных чисел, то $M_U(x)=O\left(x^{\varepsilon}\right)$ для каждого фиксированного $\varepsilon>0$.

Лемма.3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ − неотрицательные неубывающие функции при $x\ge 0$, $f_1(x)$ − неотрицательная неубывающая функция при, $x\ge x_1\ge 0$, $g_1(x)$ − неубывающая неотрицательная функция при $x\ge y_1\ge 0$. Тогда при $Z\ge x_1+y_1$ справедливо неравенство

$$\left|\iint\limits_{x+y\le Z}df(x)dg(y)-\iint\limits_{\substack{x+y\le Z\\ x\ge x_1,y\ge y_1}}df_1(x)dg_1(y)\right|\le 3\left(f(Z)+f_1(Z)\right)g_1(y_1)+\max_{y_1\le y\le Z}\left|g(y)-g_1(y)\right|+$$
$$+3\left(g(Z)+g_1(Z)\right)\left(f_1(x_1)+\max_{x_1\le x\le Z}\left|f(x)-f_1(x)\right|\right).$$

Пусть $m\ge 2$. Предположим, что утверждение теоремы уже доказано в случае сложения $m-1$ последовательности степеней. Применяя его к $m-1$ последовательностям $\left\{n^{k_2}\right\}$, $\left\{n^{k_3}\right\}, \ldots$, $\left\{n^{k_m}\right\}$ и, учитывая, что из условия (1) следует, в частности, выполнение аналогичного условия для этих $m-1$ последовательностей, имеем:

$$N\left(n\le x, n=n_2^{k_2}+n_3^{k_3}+\ldots+n_m^{k_m}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+1\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{k_m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}+1\right)}x^{\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}}+$$
$$+O\left(x^{\beta_{m-1}\left(k_2,\ldots,k_m\right)+\varepsilon}\right), \qquad (4)$$

где β_m − функция, определенная рекуррентными соотношениями (3).

Применяя лемму 1, взяв в качестве U последовательность $\left\{n_1^{k_1}\right\}$, а в качестве V −

последовательности натуральных чисел, представимых в форме
$n_2^{k_2} + n_3^{k_3} + \cdots + n_m^{k_m}$.

Тогда

$$N_U(x) = x^{\frac{1}{k_1}} + O(1),$$

$$N_V(x) = N\left(n \le x, n = n_2^{k_2} + n_3^{k_3} + \cdots + n_m^{k_m}\right)$$

и, таким образом, асимптотика $N_V(x)$ определяется формулой (4).

В силу лемм 1 и 2.

$$N\left(n \le x, n = n_1^{k_1} + n_2^{k_2} + \cdots + n_m^{k_m}\right) = N\left(n \le x, n = u + \vartheta\right) = \int_0^x N_U\left(x-y\right) dN_V\left(y\right) + O\left(x^{2\left(\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_m}\right)+\varepsilon}\right) \quad (5)$$

Для подсчета главного члена воспользуемся леммой 3, полагая в ней

$$x_1 = y_1 = 0, g(x) = N_U(x), f(x) = N_V(x),$$

$$f_1(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+1\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{k_m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}+1\right)} x^{\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}}, \qquad g_1(x) = x^{\frac{1}{k_1}}.$$

По лемме 1. получаем

$$\int_0^x N_U(x-y)dN_V(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+1\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{k_m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}+1\right)} \iint\limits_{\substack{y+z\le x \\ y,\,z\ge 0}} dy^{\frac{1}{k_1}} dZ^{\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}} +$$

$$+O\left(x^{\frac{1}{k_1}+\beta_{m-1}(k_2,\ldots,k_m)+\varepsilon}\right) + O\left(x^{\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{km}}\right).$$

Подставляя в (5) и учитывая, что

$$\iint\limits_{\substack{y+z\le x \\ y,\,z\ge 0}} dy^{\frac{1}{k_1}} dz^{\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}} = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right) \iint\limits_{\substack{y+z\le x \\ y,\,z\ge 0}} y^{\frac{1}{k_1}-1} z^{\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}-1} dydz =$$

$$= x^{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}} \left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right) \int_0^1 u^{\frac{1}{k_1}} \left(1-u\right)^{\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}-1} du =$$

$$= \left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right) x^{\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}} B\left(\frac{1}{k_1}+1; \frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right) =$$

$$=\left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)x^{\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}+1\right)}=x^{\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}+1\right)},$$

получаем

$$N\left(n\le x, n=n_1^{k_1}+\ldots+n_m^{k_m}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{k_2}+1\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{k_m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}+1\right)}x^{\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_m}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{1}{k_1}+\beta_{m-1}(k_2,\ldots,k_m)+\varepsilon}\right)+O\left(x^{2\left(\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_m}\right)+\varepsilon}\right). \tag{6}$$

Два остаточных члена можно заменить одним, взяв в качестве показателя максимальный из двух, то есть

$$\max\left(\frac{1}{k_1}+\beta_{m-1}\left(k_2,\ldots,k_m\right),2\left(\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_m}\right)\right)+\varepsilon$$

из (3) следует, что последнее выражение равно $\beta_m\left(k_1,\ldots,k_m\right)+\varepsilon$. Поэтому, из (6) вытекает утверждение теоремы.

Пример. Число натуральных чисел n, не превосходящих x, для которых уравнение $x_1^5+x_2^9+x_3^{13}=n$ имеет решение в натуральных числах, равно

$$cx^{\frac{227}{585}}+\mathrm{O}\left(x^{\frac{44}{117}+\varepsilon}\right),$$

где

$$c=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{1}{13}\right)}{227\ \Gamma\left(\frac{227}{585}\right)}.$$

Список литературных источников

1. Файнлейб А.С., Оразов М. Бинарные аддитивные задачи с показательной функцией.– Литовский матем. Сб. 18, Вильнюс 4 (1978).

2. Лаврик А.Ф. Сложение простого числа с простой степенью заданного простого.– ДАН СССР, 119, 6, 1998, 185–187

3. Оразов М. О числах вида $p+g^{x_1}+g^{x_2}+\cdots+g^{x_k}$.– Изв. АН Туркменской ССР, сер. Физ.-техн., хим. и геол. наук, 2(1977), 108–109.