

## СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕТОДОМ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

*Выполнен сравнительный анализ применения алгоритмов стохастической аппроксимации для решения задач глобальной и локальной оптимизации (обучения) искусственных нейронных сетей. Показано, что для решения задач локальной настройки применение методов стохастической аппроксимации является предпочтительным с точки зрения вычислительных затрат на обучение искусственных нейронных сетей по сравнению алгоритмами второго порядка.*

**Ключевые слова:** искусственная нейронная сеть, стохастическая аппроксимация, генетические алгоритмы, обучение.

Эта работа является продолжением работы авторов [2], в которой настройка синаптических весов нейронов выполнялась на основе оптимизационных алгоритмов второго порядка. В данной работе описаны алгоритмы первого порядка, в частности, алгоритмы стохастической аппроксимации в нескольких вариантах их применения в зависимости от специфики решаемых задач.

Методом стохастической аппроксимации называют последовательный способ улучшения оценки, минимизирующей функционал среднего риска

$$f(x) = M_w \{F(w, x)\} = \int_{R^p} F(w, x) P_w(dw),$$

использующий на каждом шаге новые наблюдения и предшествующую оценку. Если штрафная функция  $F(w, x)$  дифференцируема по  $x$ , то минимизирующие этот функционал векторы  $\theta$  находятся среди решений уравнения регрессии

$$g(x) = \int \nabla_x F(w, x) P_w(dw) = 0.$$

Пусть распределение вероятностей  $P_w(\cdot)$  неизвестно, но задана обучающая последовательность  $w^1, w^2, \dots$ , им порожденная, и в каждый момент времени  $n$  доступны измерению величины  $y_n$ , являющиеся при определенном выборе точек  $x^n$  либо значениями функции  $F(w^n, x^n)$ , либо значениями ее градиента  $\nabla_x F(w^n, x^n)$ , измеримыми, может быть с помехами. В такой ситуации для поиска решений уравнения регрессии можно использовать рекуррентную процедуру типа

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \alpha_n \hat{g}^n(\theta^{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\{\alpha_n\}$  -- специальным образом подбираемая последовательность неотрицательных чисел, называемых величинами рабочего шага, а

$$\hat{g}^n(\theta^{n-1}) = \hat{g}^n(y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, x^n, x^{n-1}, \dots, x^1, \theta^{n-1})$$

-- некоторая "хорошая" аппроксимация в точке  $\theta^{n-1}$  для вектора-градиента функции  $f(\cdot)$ . Алгоритмы такого типа являются типичными для метода стохастической аппроксимации. Иногда формальное определение метода стохастической аппроксимации опирается именно на последнюю формулу, в которой часто предполагается, что  $\{\alpha_n\}$  -- заданная детерминированная последовательность неотрицательных чисел.

### Поиск корня неизвестной функции. Алгоритм Роббинса--Монро

Первой по рекуррентным стохастическим алгоритмам была работа Роббинса и Монро, в которой исследовалась задача о нахождении корня вещественной функции  $g(x)$  от вещественного аргумента  $x$ . Предполагалось, что функция не известна, но для экспериментатора доступны наблюдения ее значения в выбираемых им точках, может быть, с помехами.

Если функция  $g(x)$  нам известна и непрерывно дифференцируема, то задача превращается в классическую из численного анализа. Для ее решения можно воспользоваться методом Ньютона, который генерирует последовательность оценок  $\{\hat{\theta}^n\}$  корня  $\theta$  функции  $g(x)$ .

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - [g'(\hat{\theta}^{n-1})]^{-1} g(\hat{\theta}^{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

или более простой, но менее эффективной, процедурой

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \alpha g(\hat{\theta}^{n-1})$$

с фиксированным достаточно малым коэффициентом  $\alpha > 0$ , которая не требует умения вычислять производную функции. Если начальное значение  $\hat{\theta}^0$  выбрано достаточно близко к  $\theta$ , то она гарантирует сходимость оценок к корню  $\theta$  функции  $g(x)$  при предположениях о том, что  $g(x) < 0$  при  $x < \theta$ ,  $g(x) > 0$  при  $x > \theta$ .

Теперь предположим, что точные значения функции  $g(x)$  и ее производной не известны, а доступны только значения функции в выбранных точках  $x$ , но искаженные помехами. Более точно, пусть каждому вещественному  $x$  соответствует некоторая вещественная случайная величина  $G(w, x)$  с неизвестным распределением вероятностей и средним значением

$$g(x) = M_w \{G(w, X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(w, x) P_w(dw).$$

Требуется найти значение  $\theta$ , при котором  $g(\theta) = 0$ , на основании наблюдений реализованных значения случайных величин  $G(w^1, x^1), G(w^1, x^2), \dots$  при выборе параметров испытаний  $x^1, x^2, \dots$ . Для

упрощения будем считать, что функция  $g(x)$  -- неубывающая и имеет единственный корень. При наблюдениях с помехами метод Ньютона не применим, но второй (упрощенной) процедурой воспользоваться можно, заменив, к примеру, значения функции на их ``хорошие" приближения, получаемые усреднением нескольких наблюдений. На самом деле, как установили Г. Роббинсон и С. Монро, нет необходимости производить серию наблюдений для каждого ранее выбранного параметра испытаний  $\hat{\theta}^{n-1}$ , поскольку величины  $\hat{\theta}^{n-1}$  играют в вычислениях промежуточную роль и значения функции в этих точках представляют интерес не сами по себе, а только в той мере, насколько они ведут нас в направлении к корню функции. Был представлен новый алгоритм

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \alpha_n Y^n$$

некоторой выбираемой пользователем последовательностью положительных чисел  $\{\alpha_n\}$ , стремящихся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и удовлетворяющей условиям

$$\sum_n \alpha_n = \infty, \quad \sum_n \alpha_n^2 < \infty.$$

Этот алгоритм использует на  $n$ -шаге наблюдение  $Y^n$ , представляющее собой зашумленное значение  $g(\hat{\theta}^{n-1})$ , равное  $G(w^n, \hat{\theta}^{n-1})$ . В многомерном случае  $X \in R^r$  алгоритм имеет такой же вид и  $Y_n \in R^r$ . Он получил общепризнанное название *процедура Роббинса--Монро*.

Рассмотрим задачу минимизации функции  $f(x) = M_w\{F(w, x)\}$ , зависящей от векторного  $r$ -мерного аргумента  $x$ . Предположим, что  $w$  -- случайный вектор и  $M_w\{\cdot\}$  -- операция усреднения по его распределению. Пусть  $f(\cdot)$  -- непрерывно дифференцируемая функция. Необходимым условием того, что  $\theta$  -- точка минимума функции  $f(\cdot)$ , является равенство нулю в этой точке ее вектор-градиента  $\nabla f(\theta) = 0$ .

Предположим, что известны значения вектор-градиента функции  $f(\cdot)$  и ее матрицы-гессиана. Для нахождения точки минимума можно воспользоваться классической схемой вычислений по методу Ньютона

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - [\nabla^2 f(\hat{\theta}^{n-1})]^{-1} \nabla f(\hat{\theta}^{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Если матрица-гессиан  $\nabla^2 f(\hat{\theta}^{n-1})$  в некоторой окрестности точки  $\theta$  задает строго положительный ограниченный оператор и начальное значение  $\hat{\theta}^0$  выбрано достаточно близко к точке локального минимума  $\theta$ , то последовательность оценок  $\{\hat{\theta}^n\}$  сходится к  $\theta$ . недостатком этого алгоритма является необходимость обращать матрицу-гессиан на каждом шаге, что может представлять собой определенную трудность при большой размерности. Для упрощения алгоритма матрицы  $[\nabla^2 f(\hat{\theta}^{n-1})]^{-1}$  иногда обоснованно заме-

няют на положительные числа  $\alpha_n$ , получая в результате алгоритм типа процедуры Роббинса--Монро.

Если значения градиента функции  $f(\cdot)$  неизвестны, то стандартным подходом к решению задачи является использование конечных разностей для аппроксимации градиента. Пусть  $\{\beta_n\}$  -- некоторая последовательность положительных чисел. Обозначим  $e^j$  -- стандартный единичный вектор в направлении  $j$ -й координаты. В качестве аппроксимации  $j$ -й компоненты вектор-градиента можно использовать

$$\nabla f(\hat{\theta}^{n-1}) \approx \frac{1}{2\beta_n} [f(\hat{\theta}^{n-1} + \beta_n e^j) - f(\hat{\theta}^{n-1} - \beta_n e^j)].$$

Этот стандартный подход к аппроксимации вектора-градиента требует на каждом шаге алгоритма оценивания выполнить  $2r$  измерений значений минимизируемой функции при размерности искомого минимизирующего вектора

### Процедура Кифера--Вольфовица

Если нет возможности использовать в алгоритме не только градиент функции, но и ее точные значения, в задачах оптимизации достаточно часто можно воспользоваться только зашумленной информацией о значениях функции  $F(w, x)$  в выбираемых точках  $x$  с неконтролируемыми при этом значениями случайной величины  $w$ .

Дж. Кифер и Дж. Вольфовиц при  $r = 1$  и Дж. Блум в многомерном случае для построения последовательности оценок предложили использовать процедуру следующего вида:

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \alpha_n \frac{Y_+^n - Y_-^n}{2\beta_n},$$

где обозначено:

$$Y_{\pm}^n = \begin{bmatrix} F(w^{2r(n-1)+(3\pm 1)/2}, \hat{\theta}^{n-1} \pm \beta_n e^1) \\ F(w^{2r(n-1)+(7\pm 1)/2}, \hat{\theta}^{n-1} \pm \beta_n e^2) \\ \vdots \\ F(w^{2rn-(1\pm 1)/2}, \hat{\theta}^{n-1} \pm \beta_n e^r) \end{bmatrix}.$$

Они обосновали состоятельность оценок при определенных предположениях о распределениях соответствующих случайных величин, свойствах функции  $F(\cdot)$  и числовых последовательностей  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$ . Из накладываемых условий обычно следует, что в среднем по всевозможным реализациям  $w$  значение  $(Y_+^n - Y_-^n)/(2\beta_n)$  совпадает со значением градиента функции  $f(\cdot)$  в точке  $\hat{\theta}^{n-1}$  и асимптотическое поведение оценок, получаемых с помощью процедуры Кифера--Вольфовица, характеризуется свойствами решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\hat{\theta} = -\nabla f(\theta).$$

В более широком смысле алгоритмы такого типа принято называть *псевдоградиентными*. При внешней простоте оригинальная процедура Кифера–Вольфовица имеет ряд существенных недостатков. Для доказательства состоятельности оценок приходится накладывать достаточно ограничительные условия на неконтролируемые возмущения: при измерении значений функции с почти произвольными помехами состоятельность оценок не получается; и даже в тех случаях, когда ограничения на неконтролируемые возмущения можно пренебречь, на каждом шаге алгоритма приходится делать  $2r$  наблюдений, что в многомерном случае при достаточно большом  $r$  может оказаться трудно осуществимым.

### **Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации**

Классическую процедуру Кифера–Вольфовица (ПКВ) часто называют алгоритмом стохастической аппроксимации с фиксированными направлениями. Существенно улучшить характеристики ее оценок позволяет включение одновременно в канал наблюдения, через выбранный параметр, и в направление вектора измерения очередной оценки, так называемого пробного одновременного возмущения. В отличие от ПКВ при выборе очередной точки измерения функции случайному возмущению подвергаются одновременно все координаты.

Пусть  $\{\Delta_n\}$  -- последовательность наблюдаемых, одинаково симметрично расположенных случайных векторов с матрицей ковариаций

$$\text{cov}\{\Delta_n \Delta_n^T\} = \delta_{nj} \sigma_\Delta^2 I, \quad \sigma_\Delta > 0$$

и ограниченным вторым статистическим моментом. Например, для задания пробного одновременного возмущения удобно использовать бернуллиевские случайные векторы (координаты вектора  $\Delta_n$  независимы друг от друга и принимают с равной вероятностью значения плюс/минус единица). Оказывается, что при зашумленных наблюдениях без существенных потерь в скорости сходимости для построения состоятельной последовательности оценок можно воспользоваться алгоритмом, похожим на ПКВ, но использующим всего два зашумленных измерения функции  $F(\cdot)$  на каждой итерации:

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \alpha_n \Delta_n \frac{y_n^+ - y_n^-}{2\beta_n}, \quad y_n^\pm = F(w_\pm^n, \hat{\theta}^{n-1} \pm \beta_n \Delta_n) + v_n^\pm.$$

Более того, аналогичными свойствами обладает алгоритм с одним зашумленным наблюдением на каждой итерации:

$$\hat{\theta}^n = \hat{\theta}^{n-1} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \Delta_n y_n, \quad y_n = F(w^n, \hat{\theta}^{n-1} + \beta_n \Delta_n) + v_n.$$

Эти рекуррентные процедуры будем называть *рандомизированными алгоритмами стохастической аппроксимации*, так как в их структуру неотъемлемой частью ходит случайное пробное одновременное по всем координатам возмущение, которое также одновременно используется и в задании направления очередного изменения оценки и при выборе новой точки

измерения. В англоязычной литературе широко используется название одновременно возмущаемая стохастическая аппроксимация (simultaneous perturbation stochastic approximation, SPSA).

### Критерии оптимальности

Любая задача оптимизации может быть сведена к выбору лучшего в некотором смысле варианта из большого их числа.

Наилучший вариант соответствует экстремуму принятого критерия оптимальности. Далее будем рассматривать критерии оптимальности в виде математического ожидания

$$R(\alpha) = \int_{\Omega(x)} Q(x, \alpha) P(x) dx = M_x \{Q(x, \alpha)\}, \quad (1)$$

где  $R(\alpha)$  -- функционал, зависящий также от вектора случайных последовательностей  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , плотность распределения которого равна  $P(x)$ ,  $\Omega(\alpha)$  -- область определения  $x$ ,  $Q(x, \alpha)$  -- некоторая функция качества.

Рассмотрим задачу о приближении функций. Допустим, что нужно найти аппроксимацию неизвестной функции  $z = f(y)$  по случайным наблюдениям  $z$  и  $y$ . Примем функцию, приближающуюся к  $f(y)$ , в виде некоторого выражения с точностью до параметров:

$$z = f(y) \approx \hat{f}(y, \alpha),$$

где  $\alpha$  -- вектор параметров,  $\hat{f}(y, \alpha)$  -- оценка функции  $f(y)$  с точностью до параметра. Естественно  $\alpha$  подобрать так, чтобы

$$M_{(y,z)} \{(z - \hat{f}(y, \alpha))^2\} \rightarrow \min_{\alpha}.$$

Обозначая в последнем выражении  $(z, y)$  совокупным вектором  $x$  и полагая с учетом этого

$$Q(x, \alpha) = [z - \hat{f}(y, \alpha)]^2,$$

приходим к выражению  $M \{Q(x, \alpha)\} = R(\alpha)$ .

Наряду с критерием (1) можно рассмотреть критерий типа

$$R(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Q(x[j], \alpha), \quad (2)$$

либо

$$R(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q(x[t], \alpha) dt, \quad (3)$$

где  $\{x[j]; j = \overline{1, n}\}$  представляет собой случайную последовательность, а  $\{x[t]; 0 \leq t < \infty\}$  -- случайный процесс. Критерии типа (1) отличаются от критериев (2),(3) способом усреднения. Первый тип критериев формируется путем усреднения  $Q(x, \alpha)$  по множеству, а второй -- по времени. Для эргоди-

ческих случайных последовательностей рассматриваемые типы критериев эквивалентны.

Проблема оптимальности в значительной мере потеряла бы смысл, если бы  $\alpha$  и  $x$ , входящие в критерий оптимальности, не были бы стеснены какими-либо условиями. Ограничивающие условия выражаются неравенствами, равенствами или логическими соотношениями, или их системами.

Конкретный вид таких ограничений зависит от характера и особенностей рассматриваемой задачи. Часто они характеризуют ограниченность ресурсов, энергии или иные величины, которые в силу своей физической сущности не могут превосходить некоторых пределов.

Ограничения могут иметь форму равенств

$$g_i(x, \alpha) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad m < N \quad (4)$$

или неравенств

$$g_i(x, \alpha) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где  $g_i(x, \alpha)$  -- некоторые функции,  $N$  -- суммарная размерность пространства переменных и параметров модели.

Иногда ограничения могут иметь смысл не мгновенных значений, а средних. Тогда (4),(5) примут вид

$$M_x \{g_i(x, \alpha)\} = 0, \quad M_x \{g_i(x, \alpha)\} \leq 0 \quad i = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Таким образом, проблема оптимальности сводится к решению задачи

$$R(\alpha) = M_x \{Q(x, \alpha)\} \rightarrow \min_{\alpha \in \Omega(\alpha)} \quad (7)$$

при ограничениях (6).

### **Генетические алгоритмы**

Генетические алгоритмы [1] манипулируют популяциями -- конечным множеством хромосом. Хромосомы представляют собой упорядоченные последовательности генов, каждый из которых кодирует какой-либо параметр искусственной нейронной сети (ИНС). Структура, содержащая набор хромосом конкретной особи, называется генотипом.

$G$  -- пространство генотипов в выбранной схеме кодирования, которое может быть задано напрямую перечислением или косвенно грамматикой  $\Gamma$  с языком  $L(\Gamma) = G$ . Фенотип -- это декодированный генотип, то есть одно из решений в пространстве поиска. Аллель 00 это значение гена, размещенного в конкретной позиции (локусе) хромосомы.

Функция декодирования  $D$  для формирования фенотипа  $p$  определяется по формуле

$$p = D(g, E_D),$$

где  $D$  -- функция декодирования фенотипа  $p$ , соответствующего генотипу  $g$  в окружающей среде  $E_D$ , в случае, если среда влияет на параметры функции.  $D$  может быть стохастической функцией с соответствующим вероятностным распределением на пространстве фенотипов.

$p_2 = L(p_1, E_L)$  -- функция обучения, преобразующая под влиянием среды фенотип  $p_1$  в фенотип  $p_2$ . Среда может включать в себя обучающую выборку и множество дополнительных параметров (например, скорость обучения).

$P$  -- пространство всех возможных в данной схеме кодирования фенотипов:

$$(\forall p \in P)(\exists g \in G)((p_1 = D(g, E_D) \cap (p = L(p_1, E_L))),$$

$\pi$  -- функция приспособленности (функция оценки, фитнес-функция), которая представляет меру приспособленности каждой особи в популяции.

$S$  -- множество решений: структуры нейросетей, то есть фенотипы (подмножество  $P$ ), которые удовлетворяют критериям, заданным функцией  $\pi$  в среде  $E_\pi$ . В нейроэволюционной системе с представлением  $R$  существует решение в случае, если  $S \subseteq P$ , или хотя бы  $S \cap P \neq \emptyset$ . Таким образом, данная схема кодирования должна генерировать по крайней мере одно решение.

$A$  -- множество приемлемых решений, также называемых "хорошими". Для практического использования нейроэволюционная система должна отвечать критерию

$$A \cap S \neq \emptyset.$$

Нейроэволюционный процесс в общем случае состоит из этапов, представленных на рис.1.

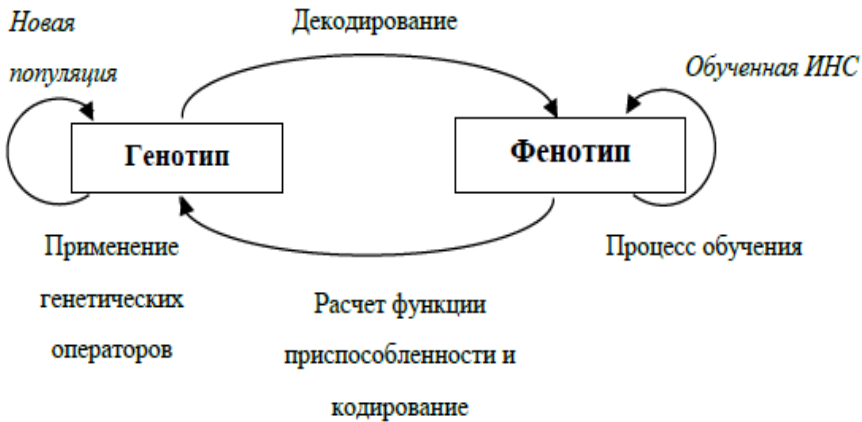


Рис.1. Основные этапы нейроэволюции

Очевидно, процессы кодирования и декодирования хромосом играют важную роль в процесс нейроэволюции. А так как эффективность их реализации во многом определяется схемой кодирования, то от нее во многом зависит пространственная и временная сложность метода.

Рассмотрим метод эволюции нейронных систем путем стохастического синтеза. ENS (Evolution of Neural Systems by Stochastic Synthesis).



Метод ENS применим для ИНС, состоящих из нейронов, использующих сигмоидную функцию активации, но не накладывает ограничений на количество нейронов и топологию. Он одновременно оптимизирует топологию нейросети и ее параметры: пороги активации, весовые коэффициенты. Метод основан на поведенческо-ориентированном подходе к проектированию нейронных систем.

Метод ENS состоит из шести шагов:

1. Генерация начальной популяции  $P(0)$ , состоящей из  $n(0)$  нейросетей.

2. Создание следующей популяции  $P'(0)$  путем репродукции начальной популяции  $P(t)$ .

3. Изменение структуры и параметров особей популяции  $P'(t)$  с последовательным применением стохастических операторов  $S, E, V$ . Оператор  $V$  -- стохастический аналог мутации, реализующий добавление и удаление нейронов, связей и корректировку параметров. Результат его применения зависит от вероятностей, постоянных для отдельных нейронов и связей. Оператор расчета  $E$  определяется решаемой задачей и в общем случае задается в терминах функции приспособленности. Оператор селекции  $S$  определяет количество особей, попадающих в новую популяцию.

4. Оценка каждой особи исходной и производной популяций  $P(t)$  и  $P'(t)$ , расчет функций приспособленности их особей.

5. Генерация популяции  $P'(t+1)$  с использованием ранговой селекции особей популяций  $P(t)$  и  $P'(t)$  в соответствии с их значениями приспособленности.

6. Проверка достижения критериев остановки (по достижению максимального количества эпох или заданной точности нейросетевого вывода).

Если ни один из критериев не достигнут, осуществляется переход к шагу 2.

### **Генетический алгоритм глобального поиска**

В реализованном методе нейроэволюции используются два пула:

1. Пул входных параметров, составляющих множество потенциальных входов ИНС. В процессе эволюции на основе данного пула формируются входные векторы особей. Пул входных параметров предназначен для оптимизации производительности ИНС при сохранении качества вывода.

2. Пул доступных в процессе нейроэволюции функций активации, который хранится в отдельном списке и содержит такие функции как сигмоида

$$\text{sigm}(S) = \frac{1}{1 + e^{-aS}},$$

функция Гаусса

$$g(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\delta}\right)^2},$$

модифицированный гипертангенс

$$mth(S) = \frac{e^{s/a} - e^{-s/b}}{e^{s/c} + e^{-s/d}}$$

и другие. Пул необходим для тонкой настройки параметров каждого нейрона и, соответственно, повышения точности нейросетевого вывода. На эффективность нейроэволюции непосредственно влияют подбор генетических операторов и вид функции приспособленности, описанные в рамках соответствующих этапов эволюционного алгоритма.

Рассмотрим эти этапы подробно.

1. Инициализация. Формирование начальной популяции  $P^0$  с достаточным разнообразием особей Проблемы начального размера и топологических инноваций решаются ограничением на количество нейросетей нулевой эпохи. Для списка смежности реализована операция удаления нейронов, а функция приспособленности, накладывающая штраф на размер ИНС, гарантирует, что в ходе эволюции количество узлов нейросети не будет строго возрастающим.

2. Преобразование генотипов в фенотип: декодирование хромосом особей во множество ИНС.

3. Оценка приспособленности. Для функции приспособленности  $F(x)$  в пространстве поиска  $X$  требуется найти такое значение аргумента  $x^*$ , при котором  $F(x)$  достигает своего максимума

$$x^* = \operatorname{argmax}_{x \in X} F(x). \quad (8)$$

Приспособленность  $F_i^t$  особи  $i$  в эпоху  $t$ ,  $t \in [0, \infty)$ , рассчитывается исходя из оценки работы ИНС, штрафа на размер ИНС, штрафа для схожих генотипов и продолжительности существования особи в популяции.

Если в рамках решаемой задачи присутствует возможность составления выборок данных, подающихся на вход ИНС, для которых известны требуемые выходы, функция оценки рассчитывается на основании среднеквадратичных ошибок на обучаемом и валидационном множествах прецедентов. Среднеквадратичная ошибка на обучающем множестве  $E_i^t$ , необходимая для расчета точности вывода ИНС, вычисляется следующим образом:

$$(E_i^t)^2 = \sum_{q=1}^Q (y_q^i - d_q)^2, \quad (9)$$

где  $y_q^i$  -- выход нейросети  $i$  при подаче на вход  $q$ -го образа обучающего множества;  $d_q$  -- требуемое значение выходного сигнала;  $q \in \overline{1, Q}$ .

Аналогичным образом определяется  $V_i^t$  -- среднеквадратичная ошибка на валидационном множестве, характеризующая способность ИНС к обобщению:

$$(V_i^t)^2 = \sum_{q=1}^Q (z_q^i - g_q)^2, \quad (10)$$

где  $z$  выход нейросети  $i$  при подаче на вход  $q$ -го образа обучающего множества;  $g_q$  -- требуемое значение выходного сигнала;  $q = \overline{1, Q}$ .

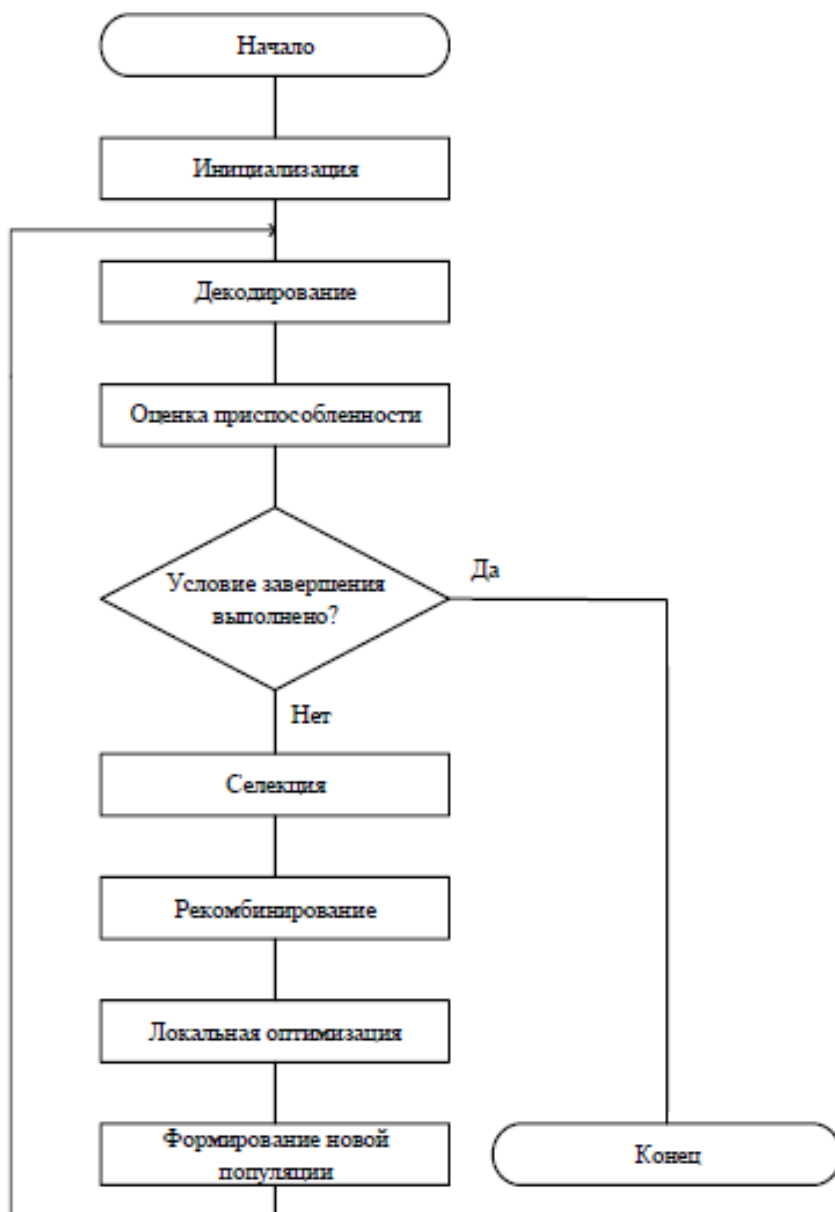


Рис.2. Схема организации процесса нейроразвития

Штраф на розмір нейросети  $\Phi_i^t$  вичисляється исходя з кількості її нейронів і зв'язей:

$$\Phi_i^t = \frac{N_i^t}{N_{\max}^t} + \frac{M_i^t}{M_{\max}^t}, \quad (11)$$

де  $N_i^t$  -- кількість нейронів даної особи;  $N_{\max}^t$  -- максимальне кількість нейронів особей епохи  $t$ ;  $M_i^t$  -- кількість зв'язей між нейронами даної особи;  $M_{\max}^t$  -- максимальне кількість зв'язей між нейронами.

Штраф для схожих генотипів  $\rho_i$  розраховується на основі  $\rho_{\min}(i, j)$  -- мінімального відстані між  $i$ -й хромосомою і іншими хромосомами популяції:

$$\rho_i = \frac{\rho_{\min}(i, j)}{1 + \rho_{\min}(i, j)}, \quad (12)$$

Учет  $\rho_i$  необхідний для підтримання різноманітності популяції і запобігання преждевременної збіжності. На значення пристосованості також впливає величина  $k_i$ , обернена тривалості періоду існування особи в популяції:

$$k_i = \frac{1}{1 + T_i}, \quad (13)$$

де  $T_i$  -- кількість епох еволюції даної особи.

Існування  $k_i$  з значенням пристосованості сприяє розв'язанню проблеми незахищеності інновацій за рахунок суттєвого зниження ризику видалення особи на початкових епохах існування. При цьому на наступних епохах  $k_i$  не здійснює суттєвого впливу на пристосованість.

З урахуванням обчислених середньоквадратичних помилок функція пристосованості  $F_i^t$  вираховується за формулою

$$\tilde{F}_i^t = \frac{\varpi_E(1 - ET_i) + \varpi_V(1 - V_i^t)}{\Phi_i^t + \rho_i} + k_i, \quad (14)$$

де  $\varpi_E, \varpi_V$  -- вагові коефіцієнти, що відображають відносну значущість середньоквадратичних помилок виводу на навчальному і валідаційному множинстві і необхідні для контролювання здатності ІНС до запам'ятовування і узагальненню:

$$\varpi_E = \frac{1 - V_i^T}{2 - V_i^T - E_i^T}; \quad \varpi_V = 1 - \varpi_E. \quad (15)$$

Таким образом, формулу 14 для расчета приспособленности можно представить в развернутом виде

$$\tilde{F}_i^t = \frac{1 - V_i^T}{1 - V_i^T - E_i^T} \left( 1 - \sqrt{\sum_{q=1}^Q (y_q^i - d_q)^2} \right) + (1 - \varpi_E) \left( 1 - \sqrt{\sum_{q=1}^Q (z_q^i - g_q)^2} \right) + \frac{1}{1 + T_i} \cdot (16)$$

$$\frac{N_i^t}{N_{\max}^t} + \frac{M_i^t}{M_{\max}^t} + \frac{\rho_{\min}(i, j)}{1 + \rho_{\min}(i, j)}$$

4. Проверка условия завершения эволюции. Независимыми друг от друга условиями завершения могут быть следующие: по количеству эпох; по исчерпанию времени эволюции (или количества обращений к функции оптимизации); по достижению наилучшей комбинации генов; по выходу функции приспособленности на "плато", то есть по отсутствию ее изменения в течение заданного количества эпох. Если выполнено любое из этих условий, то алгоритм завершает работу. Иначе выполняется следующий шаг.

5. Селекция. Стратегию поиска составляют механизмы селекции и рекомбинирования. Это вероятностные процессы, лежащие в основе процесса нейроэволюции.

Оператор отбора хромосом SL (selection) для новой популяции реализован вероятностным методом: наиболее удачные особи заносятся в пул "хороших" решений, остальные особи отбираются для рекомбинирования с вероятностью  $P_{SL}$ :

$$P_{SL}(i) = \frac{F_i}{\sum_{j=1}^N F_j},$$

где  $i, j$  -- индексы особей.

Пул "хороших" решений необходим для поддержания разнообразия популяции и предотвращения быстрой сходимости алгоритма к неоптимальному решению (локальному оптимуму). Хромосома для фенотипа  $p^*$  сохраняется в пуле при выполнении условия

$$(\forall p \in P)((\rho(p, p^*) = \rho_{\max})) \cap (F(p^*) = F_{\max}),$$

где  $\rho_{\max}$  -- максимальное в данную эпоху расстояние между особями;  $F_{\max}$  -- максимальная приспособленность в данную эпоху.

6. Рекомбинирование -- применение генетических операторов кроссинговера и мутации к отобраным на предыдущем шаге особям.

Кроссинговер -- генетический оператор, влияющий на размер популяции. В данной реализации нейроэволюции предложен двухэтапный многоточечный кроссинговер CR (crossingover).

Первый этап кроссинговера заключается в определении количества  $D$  и координат  $d_k$ ,  $k \in [1, D]$  точек пересечения с последующим скрещиванием исходных генотипов по заданным точкам. В общем случае для  $D$  точек

Серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика

результатом скрещивания особей  $p_i^t = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $p_j^t = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in P^t$  эпохи  $t$  являются два генотипа эпохи  $t+1$ :

$$p_i^{t+1} = \{a_1, \dots, a_{d_1}, b_{d_1+1}, \dots, b_{d_2}, a_{d_2+1}, \dots, a_{d_D}, \dots\},$$

$$p_j^{t+1} = \{b_1, \dots, b_{d_1}, a_{d_1+1}, \dots, a_{d_2}, b_{d_2+1}, \dots, b_{d_D}, \dots\} \in P^{t+1},$$

где  $d_k$ ,  $k \in [1, D]$  -- точки пересечения генотипов;  $D$  -- количество точек пересечения.

Количество точек пересечения определяется как случайное число на отрезке  $[1, \min\{N_1, N_2\}]$ , где  $N_1$  и  $N_2$  -- соответственно количество нейронов в первом и втором генотипе, отобранных для кроссинговера. Точки  $d_k$  выбираются в соответствии с условием:

$$d_k = j : (IN_1(j) = IN_2(j) \cup (OUT_1(j) = OUT_2(j))),$$

где  $j$  -- индекс, позиционирующий нейрон в первом и втором генотипах;  $IN_1(j)$ ,  $IN_2(j)$  и  $OUT_1(j)$ ,  $OUT_2(j)$  -- соответственно значения параметров IN и OUT для  $j$ -го нейрона в данных генотипах.

В случае, если индексов с равными значениями параметров несколько, выбираются индексы с наиболее близкими значениями. Таким образом, индексация нейронов в генотипе в совокупности с использованием параметров IN и OUT снижает риск конкуренции представлений и предотвращает скрещивание участков генотипов, несущих различную функциональную нагрузку.

Второй этап кроссинговера состоит в корректировке синаптических связей, сформированных у результате применения оператора генотипов, а именно в удалении и перераспределении связей, соотнесенных с отсутствующими в новой конфигурации ИНС нейронами.

Мутация МТ (mutation) -- генетический оператор, реализованный в восьми модификациях. Вероятность применения мутации для отдельного гена  $P_{MT}(g_i)$  в эпоху  $t$  рассчитывается по формуле

$$P_{MT}(g_i) = \sqrt{\alpha/L} / N e^{-\beta t/2},$$

где  $\alpha, \beta = const$ ;  $L$  -- длина хромосомы;  $N$  -- размер популяции.

Выбор формулы данного вида обусловлен тем, что для эффективной эволюции вероятность мутации должна быть обратно пропорциональна размеру популяции. При этом вероятность мутации с течением времени понижается. Одной из основных целей применения оператора мутации является поддержание разнообразия особей, но в маленьких популяциях частые мутации негативно сказываются на сходимости у оптимума. Хромосомы большой длины обеспечивают вариативность популяции, поэтому значение  $P_{MT}$  тем выше, чем меньше параметров содержит хромосома. Параметры  $\alpha, \beta$

выбираются до начала эволюции и необходимы для тонкой настройки процесса мутации.

7. Локальный поиск. Данный этап оптимизации особей популяции наделает алгоритм свойствами меметичности и обосновывает использование прямого метода кодирования хромосом. Этап реализуется при помощи алгоритма локального поиска.

8. Генерирование популяции  $P^{t+1}$  и переход на новую эпоху эволюции  $t + 1$ :

$$P^{t+1} = MT(CR(SL(P^t, F^t))).$$

### Генетический алгоритм локального поиска

Этап локального поиска состоит из следующих шагов: эволюционная донастройка весов параметров функций активации нейронов особей популяции, на предыдущем шаге преобразованных в фенотипы; пересчет функций приспособленности, возврат к предыдущим значениям параметров в случае снижения приспособленности. Данные шаги проиллюстрированы схемой рис. (3).

Для реализации описанного алгоритма локальной оптимизации разработана соответствующая программа на языке С применительно к настройке нейронной сети для прогнозирования поведения ЭЕГ. Результаты приведены на рис. 4.



Рис. 3. Схѐма этапа локальной оптимизации

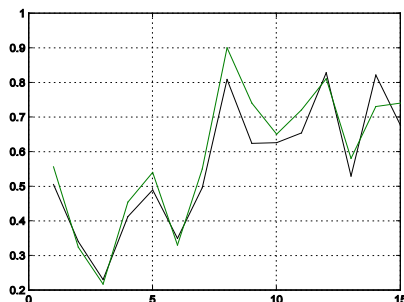


Рис. 4 Прогнозирование поведения EEG

### **Вывод.**

Анализ применения алгоритмов стохастической аппроксимации для прогнозирования временных рядов показал, что эти алгоритмы, по сравнению с алгоритмами второго порядка (Левенберга—Марквардта) отличаются простотой в реализации, но сходимость их – первого порядка, поэтому их применение целесообразно при решении задач локальной оптимизации.

### **Бібліографія**

1. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации//Финансы и статистика, 2002.—344 с.
2. Gerasimova D, Serdakovsky V. ALGORITHM OF CONSTRUCTING EXPERT SYSTEM, BASED ON ANN TECHNOLOGY//Electronics and Control Systems 2017. N 1(51): pp. 24-26.
3. Moriarty D. Forming neural networks through efficient and adaptive coevolution/D. Moriarty, R/ Miikkulainen//Evolutionary computation, 1997.-N 5.--pp. 373—399.