УДК 532.522

П. М. Таланчук,
К. Х. Зеленський,
В. М. Болховітін

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ІЗОЛЯЦІЙНОГО ПОКРИТТЯ

Сформульовано повну математичну модель нелінійних процесів полімерної маси при екструдированій ізоляції у виробництві кабелів, що враховує нелінійну залежність в'язкопластичних властивостей полімерної маси від температури одношарового покриття. Запропоновано числово-аналітичний ітераційний метод розв'язання системи нелінійних диференційних рівнянь у частинних похідних. Отримано розв'язання задачі у першому наближенні.

Ключові слова: інтегральні перетворення, кабельні вироби, крайова задача, функції Бесселя, полімерна маса, теплопровідність, екструдер.

Вступ

Виробництво кабелів із полімерною екструдованою ізоляцією у наш час займає важливе місце у будь-якій енергосистемі, оскільки такі кабелі дозволяють передавати суттєві потужності за мінімальних витрат на виготовлення кабелю та його експлуатацію. Головним способом переробленння полімерної сировини-грануляту у готове суцільне покриття є екструзія, що використовує шнековий агрегат (екструдер) у тому числі й для створення необхідного тиску розплаву полімера.

Оскільки фізико-хімічні властивості різних видів пластмас відрізняються суттєвим чином, а в'язкість має нелінійний характер залежності як від температури, так і від швидкості зсуву, підбір параметрів (робочої точки) екструдера для випуску продукції необхідної якості із достатньою продуктивністю є нетривіальна задача.

Математичне моделювання (замість коштовних натурних експериментів) надає можливість скоротити матеріально-сировинні і часові витрати, що виникають під час заміни сировини на випуск продукції іншого типорозміру.

Огляд

Найпростіші математичні моделі, що описують процес вулканізації кабельних вирбів, формулюються у вигляді системи нестаціонарних рівнянь теплопровідності для внутрішнього циліндру (метал) та зовнішнього (ізоляція), наприклад, [1].

$$c_1\rho_1 V_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}\right) + Q_p w_p, \tag{1}$$

$$c_2\rho_2 V_0 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2}\right) + Q_p w_p, \tag{2}$$

$$w_p = \rho_2 \frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = (1-\varphi)k_0 e^{-E/(RT)} \qquad (3)$$

Початкові умови:

$$T_1(r,0 = T_2(r,0) = T_0,\ \varphi_0 = 0.$$

Межові умови:

$$\frac{\partial T_1}{\partial r}|_{r=0} = 0,\ \left[\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}\right]|_{r=r_1},\ T_1 = T_2;$$

$$\left[\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \alpha(T_b - T_2) + \sigma\varepsilon_{pr}(T_b^4 - T_2^4)\right]|_{r=r_2},$$

$$T_2 = T_2 = 30^\circ C;\ T_b = 227^\circ C.$$

Тут E -- енергія активації хімічної реакції, $E = 66$ кДж/моль; R -- універсальна газова стала, $R = 8{,}31$ Дж/(моль К); α - коефіцієнт теплообміну із навколишнім середовищем $\alpha = 1$ Вт/($m^2 K$); $\varepsilon_{pr} = 0{,}5$ - приведений ступінь чорноти; $c_{iz} = c_2 = 1380$ Дж/кг$^\circ C$ - тепломісткість ізоляції; w_b - ступінь полімеризації; $\lambda_{iz} = \lambda_2 = 0{,}16$ Вт/м$\circ C$ - теплопровідність ізоляції; $c_p = c_1 = 385$ Дж/кг$^\circ C$ - тепломісткість жили; $\rho_p = \rho_1 = 8700$ Кг/м^3 - густина жили; $\lambda_p = \lambda_1 = 400$ Вт/м$^\circ C$; $V_0 = 0{,}08$ м/с – швидкість руху жил та ізоляції.

Така модель описує одновимірне температурне поле у металичній жилі і полімерній ізоляції. При цьому розглядається температурне поле одношарової полімерної маси із урахуванням фазового перехода жила--ізоляція, але зовсім не розглядаються нелінійні процеси у полімерній масі.

Вочевидь, така модель, можливо, може виявитися корисною при проектуванні конструкцій шнеків, але є безкорисною для дослідження нелінійних процесів (в'язкопластичності) полімерної маси.

Більш строга математична модель формування ізоляції кабеля полімерним покриттям розглядається в [2--4]. Математична модель процесу вулканізації описується такою системою дифференціальних рівнянь. Вважеться, що течія є ламінарна, ізотермічна та осесиметрична. У цьому разі система рівнянь, що описує процес заповнення вертикально розташованих пресформ реологічно складною рідиною у циліндричній системі координат (z, r, φ) із використанням безрозмірних змінних, представляєтсья у вигляді

$$Re\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r^2}{\partial r} + \frac{\partial v_r v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + B\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2}\right) + 2\frac{\partial B}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial z}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \qquad (4)$$

$$Re\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r v_r v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_z^2}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + B\Delta v_z + \frac{\partial B}{\partial z}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + 2\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{Re}{Fr}; \qquad (5)$$

$$\Delta p = -Re\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv_r^2)}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2(rv_r v_z)}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2 v_z^2}{\partial z^2}\right) +$$

$$+2\frac{\partial B}{\partial r}\Delta v_r + 2\frac{\partial B}{\partial z}\Delta v_z + 2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\frac{\partial v_r}{\partial r} + 2\frac{\partial^2 B}{\partial r\partial z}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + 2\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (6)$$

В якості безрозмірних змінних використовуються параметри:
$\bar{r} = r/L,\ \bar{z} = z/L,\ \bar{v}_z = v_z/U,\ \bar{v}_r = v_r/U,\ \bar{t} = tU/L,\ \bar{p} = (p - p_0)(L/(\mu U))^{n/m}$.
В (4), (6) $L = R$, R - радіус канала, що підводить; $U = Q/(\pi R^2)$ - середньо-розхідна швидкість; Q - об'ємний розхід рідини; p_0 - атмосферний тиск ; μ - - динамічна в'язкість рідини за нульової швидкості зсуву; n, m - константи у реологічній моделі; $Re = \rho L^{n/m} U^{2-n/m} / \mu^{n/m}$ – узагальнене число Рейнольдса; $Fr = U^2/(gL)$ - число Фруда; g - прискорення вільного падіння. Змінна B являє собою ефективну в'язкість:

$$B = (Se^{1/n} + I_2^{1/m})^n / I_2. \quad (7)$$

$Se = \tau_0 L^{n/m}/(U^{n/m}\mu^{n/m})$ - безрозмірний параметр нелінійної в'язкопластичності; τ_0 - границя плинності рідини.

Вираз для інтенсивності швидкостей деформації I_2:

$$I_2 = \left[2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Початкові і межові умови також записуються у безрозмірному вигляді. Вважається, що у момент $t = 0$ вільна поверхня міститься на рівні днища прес-форми і є пласка. На всіх нерухомих твердих межах Γ_1, Γ_2, Γ_3 виконується умова прилипання $v_z = v_r = 0$. На вхідній межі A задається профіль швидкості, що відповідає стабілізованій течії полімерної композиції у каналі, що розглядається

$$v_z = f(r),\ v_r = 0. \quad (8)$$

Вигляд функції $f(r)$ залежить від реологічних властивостей рідини і геометрії прес-форми, що заповнюється.

Оскільки у підсумку якість ізоляціїї залежить від температурного поля (його стабілізації із урахуванням в'язкопластичних властивостей полімерної маси), наведена система рівнянь має доповнитися рівнянням теплового балансу.

Постановка задач досідлження

Динаміка руху полімерної маси і температурне поле описується такою системою рівнянь:

-- рівняння нестискаємості:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}=0, \qquad (9)$$

-- рівняння руху::

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rr}r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{r\theta}r)-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+\rho\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{r\theta}r^2)+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}; \qquad (11)$$

-- рівняння енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+c\rho\left(v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rq_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial q_z}{\partial z}+q_w; \qquad (12)$$

$$q_r=-k\frac{\partial T}{\partial r},\quad q_\theta=-k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta},\quad q_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}. \qquad (13)$$

-- реологічне рівняння стану:

$$[\tau_{rr}=2\mu_e\frac{\partial v_r}{\partial r};\ \tau_{\theta\theta}=2\mu_e\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_r}{\partial r}\right);$$
$$\tau_{zz}=2\mu_e\frac{\partial v_z}{\partial z};\ \tau_{rz}=\mu_e\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right); \qquad (14)$$

$$\tau_{r\theta}=\mu_e\left(r\frac{\partial}{\partial r}(v_\theta/r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right);\ \tau_{z\theta}=\mu_e\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right), \qquad (15)$$

де μ_e -- ефективна в'язкість, що залежмть від швидкості зсуву:

$$\mu_e=\mu_0(I_2/2)^{(n-1)/2}e^{-\beta(T-T_0)}),$$

де μ_0 -- початкова в'язкість; I_2 - другий інваріант тензора швидкостей деформації, n - показник аномалії в'язкості; v_z, v_r, v_θ - компоненти вектора швидкості; τ_{ij} $(i, j = r, \theta, z)$ -- компоненти тензора напружень, T - температура, β - температурний коефіцієнт, T_0 - початкова температура.

Межові умови:

-- на вході -- температура полімера (T_b) і нульовий відносний тиск;

-- на поверхні шнека – окружна швидкість, що відповідає числу обертів шнека (N_s), температура поверхні шнека (T_p);

-- межові умови корпусу шнека -- температура корпуса (T_k);

-- межові умови на виході -- температура полімера на виході (T_{out}) та нульовий відносний тиск

Розв’язання задачі

В даній роботі математичне моделювання задачі виконується ітераційним числово-аналітичним моделюванням із використанням скінченних інтегральних перетворень за просторовими змінними [6,7].

Дотримуючись підходу, що викладений у [6], запишемо систему рівнянь (10)--(12), зі сталою густиною $\rho = const$, в «стандартизованому» вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_r\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\Phi\right) + v_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\Gamma_\Phi}{\rho}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right] + S_\Phi = \frac{\Gamma_\Phi}{\rho}\Delta\Phi + S_\Phi; \quad (16)$$

де $\Phi = [v_r, v_\theta, v_z, T]$, $\Gamma = [\mu_{ef}, \mu_{ef}, \lambda_t/c_V]$.

Позначимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta\Phi - N_\Phi. \quad (17)$$

Тоді

$$N_\Phi = v_r\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\Phi\right) + v_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} - S_\Phi. \quad (18)$$

Із урахуванням виразів для напружень (14)--(15) нелінійні частини S_Φ відображають вплив на потік турбулентних складових. У цій роботі ми не будемо враховувати вплив турбулентності (в’язкопластичних властивостей полімерної маси), тому не будемо наводити явні вирази для S_Φ, а обмежимося урахуванням конвективних складових потоку.

У рівняння (10)--(11) входять вирази для тиску p. Оскільки тиск можна визначити за розподілом температуры у відповідності із рівнянням стану $p = \rho RT$, перш за все знайдемо розв’язок рівняння (12), що описує розподіл температури у потці.

Розглядаються межові умови для полого (у даній работі температурне поле у циліндрі радіусу R_1 (металичний стрижень – жила) не розглядаюится. Розглядається полий циліндр радіусу $R_1 \le r \le R_2$.

Будемо для простоти розглядати осесиметричну течію рідини і, відповідно, температурне поле.

Межовими умовами за змінною z приймаємо мішаними тобто.

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \beta_\Phi \Phi\right]\Big|_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \beta_\Phi \Phi\right]\Big|_{z=L} = 0.$$

Зайдемо інтегральні перетворення від Лапласіана

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \quad (19)$$

У результаті застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними r, z замість рівняння (12) отримуємо звичайне диференційне рівняння відносно $\overline{\overline{T^{(0)}}}(t,\alpha,\delta)$, где α, δ -- власні значення, що відповідають власним функціям $Y_0(r,\alpha)$, $Z_k(z,\delta)$, [6].

$$\frac{d\overline{\overline{T^{(0)}}}(t,\alpha_{km},\delta_k)}{dt} = -\gamma_{km}^T\overline{\overline{T}}(t,\alpha,\delta) + \overline{R}_T. \quad (20)$$

$$\overline{\overline{T^{(0)}}}(t,\alpha,\delta) = \int_{R_1}^{R_2} Y_0(\alpha_m r) r dr \int_0^L Z_k(\delta z) T^{(0)}(r,z,t) dz. \quad (21)$$

$$\gamma_{km} = \lambda_T/(\rho c_v)(\alpha_{km}^2 + \delta_k^2).$$

Функція R_T визначається інтегральним перетовренням межових умов.

Власні функції отримано у такому вигляді.

$$Z_k(z,\delta) = \frac{1}{\| Z(z,\delta_k)\|^2}\left(\cos(\delta_k z) + \frac{\delta}{\beta_T}\sin(\delta_k z)\right). \quad (22)$$

Функції Бесселя другого роду:

$$Y_m(r,\alpha) = \left(I_m(\alpha R_2) J_m(\alpha r) - J_m(\alpha R_2) I_m(\alpha r)\right). \quad (23)$$

Розв’язок для температурного поля у нульовому наближенні набуває вигляду

$$T^{(0)}(r,z,t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}[Y_0(\alpha_{km} r) Z_k(\delta_k z)\left[e^{-\gamma_{km}^T t} + \overline{R}_T(1 - e^{-\gamma_{km}^T t}\right]. \quad (24)$$

Перед тим, як шукати розв’язок лінійних наближень для компонент швидкості руху полімерної маси, отримаємо вирази для похідних тиску.

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} = \rho R\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{dY_0(\alpha_{ij} r)}{dr} Z_j(\delta_j z) e^{-\gamma_{ij} t}. \quad (25)$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} = \rho R\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} Y_0(\alpha_{ij} r)\frac{dZ_j(\delta_j z)}{dz} e^{-\gamma_{ij} t}. \quad (26)$$

Застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними до виразіів (26), (27) дає:

$$\frac{\partial\overline{\overline{p^{(0)}}}}{\partial r} = \rho R\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} yr_m zr_k e^{-\gamma_{km} t}; \quad (27)$$

$$\frac{\partial \overline{\overline{p^{(0)}}}}{\partial r} = \rho R \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} yz_m zz_k e^{-\gamma_{km}t}; \tag{28}$$

$$yr_m = \frac{1}{\| Y_m \|^2} \sum_{i=1}^{N} \int_{R_1}^{R_2} Y_m(\alpha r)) \frac{d}{dr}(Y_i \alpha r) r dr; \tag{29}$$

$$yz_m = \frac{1}{\| Y_m \|^2} \sum_{i=1}^{N} \int_{R_1}^{R_2} Y_m(\alpha r) Y_i(\alpha r) r dr; \tag{30}$$

$$zr_k = \frac{1}{\| Z_k \|^2} \sum_{j=1}^{N} \int_0^L Z_k(\delta z) Z_j(\delta z) dz; \tag{31}$$

Алгоритм обчислення інегралів типу (30), (31) наведено у [8]. Тепер, маючи вирази для похідних від тиску, що наявні у рівняннях відносно компонент швидкості руху полімерної маси, можна отримати розв'язок у лінійному наближенні для v_r і v_z. Оскільки область розв'язання задачі і межові умови відносно компонент швидкості збігаються із межовими умовами відносно T, інтегральні перетворення за просторовими змінними, що застосованл до рівняння (16) при $\Phi = v_r$ і аналогічно при $\Phi = v_z$, призводить до звичайного диференційного рівняння

$$\frac{dV_r^{(0)}(t,\alpha,\delta)}{dt} = -\gamma_{m,k}^{v_r} V_r(t,\alpha,\delta) + R_{v_r} - \frac{\partial \overline{\overline{p^{(0)}}}}{\partial r}.$$

де $\gamma_{m,k}^{v_r} = \frac{\mu_{ef}}{\rho}(\alpha_m^2 + \delta_k^2)$.

$$V_r^{(0)}(t,\alpha,\delta) = \frac{1}{\| Y_m \|^2} \frac{1}{\| Z_k \|^2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L Y_m(\alpha r) Z_k(\delta z) v_r(r,z,t) r dr dz.$$

У просторі оригіналів маєо такий вираз

$$v_r^{(0)}(r,z,t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} Y_0(\alpha_{km} r) Z_k(\delta_k z) \left[e^{-\gamma_{km}^{v_r} t} + \left(\bar{v}_r - \frac{\partial \overline{\overline{p^{(0)}}}}{\partial r} \right)(1 - e^{-\gamma_{km}^{v_r} t}) \right]. \tag{32}$$

За аналогічним алгоритмом отримуємо розв'язок у лінійному наближенні для $v_z^{(0)}(r,z,t)$:

$$v_z^{(0)}(r,z,t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} Y_0(\alpha_{km} r) Z_k(\delta_k z) \left[e^{-\gamma_{km}^{v_z} t} + \left(\bar{v}_z - \frac{\partial \overline{\overline{p^{(0)}}}}{\partial z} \right)(1 - e^{-\gamma_{km}^{v_z} t}) \right]. \tag{33}$$

На другому етапі відшукуємо розв'язок задачі у першому та подальших наближеннях із урахуванням конвективних членів у рівняннях (16) відносно температрного поля і компонент швидкості потоку.

Висновки

У даній роботі зформульована математична модель процесів руху полімерної маси і температурного поля у циліндричному каналі, що описує процеси формування ізоляційнного покриття.

Із урахуванням суттєвої нелінійності процесів, що досліджуються, наведено алгоритми розв'язання системи нелінійних диференційных рівнянь у частинних похідних у лінійному наближенні. Запропоновано метод числово-аналітичного розв'язання системи рівнянь, підгрунттям якого є ітераційний метод із використанням інтегральних перетворень у скінченних межах за просторовими змінними.

Розв'язання повної системи такого типу рівнянь є предмет додактових досліджень.

Библиография

1. Мамбетова Е.А., Труфанова Н.М. Математическое моделирование температурных полей и степени вулканизации в процессе вулканизации типичных кабельных изделий. Пермь.
2. Бельков Д.В., Казаков А.В. Моделирование течения расплава полимера в винтовом канале.//Вестник ПНИПУ, Электротехника, информационные технологии, системы управления, 2015.--№16.--с. 88--95.
3. Шрагер Г.Р. Исследование режимов течения высоковязкой полимерной массы (ПМ), ограниченной свободной поверхностью.//Г.Р. Шрагер, А.Н. Козлобородов/Прикладная механика и теоретическая физика, 2008, №1.-- с. 81--89.
4. Ким В.С. Теория и практика экструзии полимеров. М.: Химия, 2005.--
5. Щербинин А.Г. Процессы движения и теплообмена нелинейных полимерных сред в условиях фазового перехода в каналах экструзионного оборудования. Автореф. дис. д.т.н, 2006.
6. Зеленський К.Х. Комп'ютерне моделювання повітряних сумішей у циклонних камерах./К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко, К.С. Бовсуновська// Респ. міжв. сб. АСАУ, №1 (22), 2013, С. 120--134.
7. Бутаков Г.О. Побудова моделі формування геометрії шва при зварюванні виробів неплавким електродом/Г.О. Бутаков, К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко// Респ. міжв. сб. АСАУ, №1 (21), 1998, С. 69--75.
8. 8.Зеленська Н.К. Аппроксимація циліндричних функцій дробово-раціональними виразами/Н.К. Зеленська, К.Х. Зеленський//Вісник Університету «Україна», серія: інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика, №1, 2016.—С.