УДК 981.3 Є.А. Настенко

ПРО ВИХРОВУ ПРИРОДУ ТЕЧІЇ КРОВІ У КОРЕНІ АОРТИ

Розглядається рух крові на виході із лівого шлуночка і вході в аорту. Математична модель цього процесу описується системою диференційних рівнянь Нав'є–Стокса у квазілінійному наближенні із відповідними початковими та межовими умовами. Для пошуку розв'язання цієї системи запропоновано сетод числово-аналітичний ітераційний сетод, що грунтцється на застосуванні інтенральних перетворнь за часом та просторовими змінними. Наведено резулььтати числово-аналітичного моделювання.

Ключові слова: Вихрові потоки, лівий шлуночок, корінь аорти, інтегральні перетворення, ітераційна процедура.

Вступ. Наявність вихрових процесів у корені аорти науковці виявили ще у кінці 20-го століття [ ]. Було зроблено припущення про розповсюдження вихрових явищ в аорті, які сприяють інтенсиффікації руху крові в аорті та прилеглих кровоносних судинах. У подальшому вирішення цієї проблеми набуло інтенсивного розвитку у иісленних публікаціях.

Огляд джерел. Назважаючи на чиленну їхню кількість, в усіх цих публікацціях для розв'язання системи рівнянь застосовуються числові методи, ефективність яких суттєво погішується із спробами вирішіти задау у трьохвимірному просторі. Це пов'язано із тим, що для релізації різницевих схем треба розв'язувати системи нелінійних алгебраїчнихї рівнянь високої розмірності, що навіть у найпростішому (одновирміному віфдносно просторових змінних) випадку складає нетривіальну задачу, що пов'язана зі біжнінстю та швидкодією відповідних алгоритмів.

Постановка задачі. Рух крові в аорті здійснюється під впливом пульсацій крові із лівого шлуночка серця.

На виході із лівого шлуночка складові швидкості потоку $U=(u(r,\varphi,t),v(r,\varphi,t))$ отримано у першому наближенні у вигляді

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n=1}^{N}\exp\left(-\frac{n^2(n+1)^2t}{Re}\right)n(n+1)R\ J_n(r/R)P_n^{(0)}(\cos z)$$

$$(d1\sin n\varphi)+d2\cos n\varphi);$$

$$v(r,\varphi,t)=\sum_{n=1}^{N}\exp\left(-\frac{n^2(n+1)^2t}{Re}\right)\left[J_{n-1}(r/R)-nJ_n(r/R)\right]P_n^{(1)}(\cos z)$$

$$(d1\sin n\varphi)+d2\cos n\varphi).$$

Функції $P_n^{(k)}(\cos z)$ — приєднані функції Лежандра. Для $n=\overline{1{,}5}$: маємо:

$$P_n^{(0)}(\cos z)=[1,\ (1+\cos 2z)/4,\ (3\cos z+5\cos 3z)/8,$$

$$(9+20\cos 2z+35\cos 4z)/64,\ (30\cos z+35\cos 3z+43\cos 5z)/128];$$

$$P_n^{(1)}(cosz) = [0, sinz, (3\sin 2z - \sin z)/2, 3/8(11\sin z - 5\sin 3z),$$
$$35/16(2\sin 3z - \sin 5z), 15/128(58\sin z - 14\sin 3z + 35\sin 5z).$$

$J_n(r/R)$ — функції Бесселя першого роду n-го порядку.

Коефіцієнти: $d1 = 14$; $d2 = -5$; $Re = 300$ — число Рейнольдса, що зв'язує швидкість потоку із в'язкістю рідини. $N = 5$. Координата z — напрямок вздовж осі, r — радіальна координата, φ — азимутальна координата (обертання навколо осі z. Змінюється від $-\pi$ до π. $r \in (0,1]$, тобто $R = 1$. На виході із лівого шлуночка приймаємо значення осьової координати $z = 2$. На рис. час зафіксовно у точців $t = 1$.

Вирішення задачі. Цей вплив враховується у системі рівнянь руху рідини в аорті

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad (3)$$

де $u = u(r,x,t)$ — радіальна компонента швидкості; t — час; $w = w(r,x,t)$ — поздовжня компонента швидкості; ρ — густина рідини; $P = P(r,x,t)$ — функція тиску; ν — кінематична вязкість рідини.

Оскільки ця система рівнянь містить три змінні, слушно, використовуючи рівняння неперервності руху шляхом диференціювання обох рівнянь руху звести цю систему до рівняння відносно тиску.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = -\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right). \qquad (4)$$

На вході в аорту наявний тиск $p(t)|_{x=0} = p_0$.

На вході в аорту задається межова умова, що пов'язана із періодичними викидами крові із лівого шлуночка із періодом $T = 1$ с, період систоли $\nu = 0.15T$. Розглядається спрощений опис цього процесу (наближений до фактичного), коли він описується у вигляді стрибків із частотою $k\nu$, $k = \overline{1,N}$.

Із вигляду рівнянь (1)–(3) випливає, що ця система — квазілінійна відносно компонент швидкості, а рівняння (4) має складову радіальної швидкості руху.

Для пошуку розв'язання цієї системи рівнянь у частинних похідних запропоновано ітераційний метод, що грунтується на застосуванні інтегральних перетворень до лінійної частини задачі із подальшою ітераційною схемою пошуку нелінійної задачі.

Лінійна частина задачі (1)–(3) має вигляд

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial r} - \frac{u^{(0)}}{r^2} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2}\right), \tag{6}$$

Межові умови мають вигляд

$$\left[u_r - h\frac{du_r}{dx}\right]|_{x=0} = \gamma_1(t),$$

$$\left[u_r + h\frac{du_r}{dx}\right]|_{x=L} = 0;$$

$$\left[u_x - h\frac{du_x}{dx}\right]|_{x=0} = \gamma_2(t),$$

$$\left[u_x + h\frac{du_x}{dx}\right]|_{x=L} = 0.$$

Стосовно межових умов за змінною r маємо умову рівності нулю функцій на осі $r = 0$ і умову обмеженості на межі $r = R$.

Розв'язання задачі (5)–(6) відшукується із застосуванням інтегральних перетворень за просторовими змінними r, x та часом t. у лінійному наближенні маємо

$$u^{(0)}(r,x,t) = \sum_{n,m}^{N,M} J_0(\beta_{n,m}r)[\sin(\lambda_m x) + \frac{\lambda_m}{h}\cos(\lambda_m x)]gu_{n,m}F_u(\gamma_1, \beta_{n,m}, t); \tag{7}$$

$$w^{(0)}(r,x,t) = \sum_{n,m}^{N,M} J_0(\beta_{n,m}r)[\sin(\lambda_m x) + \frac{\lambda_m}{h}\cos(\lambda_m x)]gw_{n,m}F_w(\gamma_2, \beta_{n,m}, t); \tag{8}$$

де $gu_{n,m}$, $gw_{n,m}$ — інтегральні перетворення від правих частин у межових умовах. Функція F отримана у результаті виконання інтегрального перетворення Лапласа (прямого і зворотного) від лівої межової умови, що відображає імпульсний (періодичний сигнал на вході в аорту. Ці перетворення виконуються за допомогою пргграмного коду, наведеному у доданку.

При пошуку розв'язання рівняння відносно w використовуються ті самі власні функції, що й випадку із u, оскільки межові умови збігаються для цих рівнянь із точністю до правих частин цих межових умов.

Для пошуку розв'язання рівняння відносно тиску $p(r,x,t)$ замістимо у рівняння (4) у правій частині у вираз $u^{(0)}(r,x,t)/r$ отриманий у лінійному наближенні вираз (7).

Отримуємо таке рівняння

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=$$

$$=-\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{n,m}^{N,M}(-J_1(\beta_{n,m}r))[\sin(\lambda_m x)+\frac{\lambda_m}{h}\cos(\lambda_m x)]gu_{n,m}F(\gamma_1,\beta_{n,m},t)\right). \quad (9)$$

Подальші наближення отримуємо за ітераційною схемою

$$u^{(1)}(r,x,t)=u^{(0)}(r,x,t)+\sum_{n,m}^{N,M}J_0(\beta_{n,m}r)[\sin(\lambda_m x)+\frac{\lambda_m}{h}\cos(\lambda_m x)]$$

$$\mathsf{L}_{r,x}^{-1}\left\{\mathsf{L}_{r,x}\left[u^{(0)}(r,x,t)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial r}+w^{(0)}(r,x,t)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x}\right]\right\}. \quad (10)$$

Замістимо у цей вираз отримані вирази для $u^{(0)}(r,x,t)$, $w^{(0)}(r,x,t)$. для скорочення запису позначимо $X(x)=\sin(\lambda_m x)+\frac{\lambda_m}{h}\cos(\lambda_m x)$.

Маємо

$$u^{(1)}(r,x,t)=u^{(0)}(r,x,t)+\sum_{n,m}^{N,M}J_0(\beta_{n,m}r)X(\lambda_m x)\{\int_0^R J_0(\beta_{n,m}r)J_0(\beta_{l,k}r)J_1(\beta_{i,j}r)$$

$$\int_0^L X(\lambda_m x)X(\lambda_k x)X(\lambda_j x)Fu_{l,k}(t)Fu_{i,j}(t)+$$

$$+\int_0^R J_0(\beta_{n,m}r)J_0(\beta_{l,j}r)J_0(\beta_{i,j}r)\int_0^L X(\lambda_m x)X(\lambda_k x)\frac{dX(\lambda_j x)}{dx}Fw_{l,k}(t)Fw_{n,j}(t)\}drdx.$$

Бачимо, що для визначення цього виразу необхідно обчислити інтеграли від добутку трьох функцій Бесселя та трьох функцій $X(\lambda x)$. Оскільки інтеграли від добутку функцій Бесселя не обчислюються у квадратурах, застосовується алгоритм, що базується на апроксимації функцій Бесселя ланцюговими дробами.

Для наочності наведемо кілька графіків, отриманих у результаті реалізації ітераційного процесу.

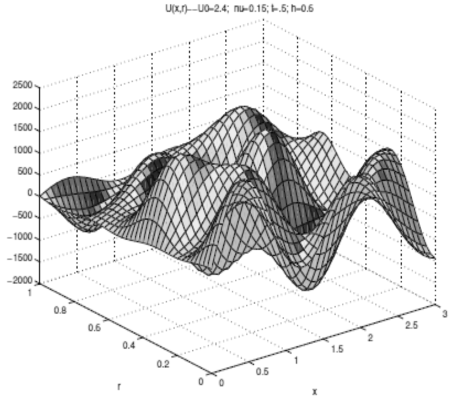

Рис. 1:

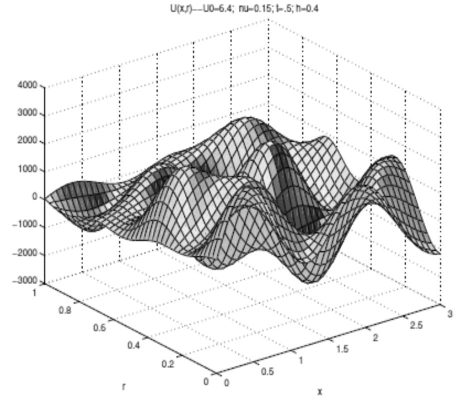

Рис. 2:

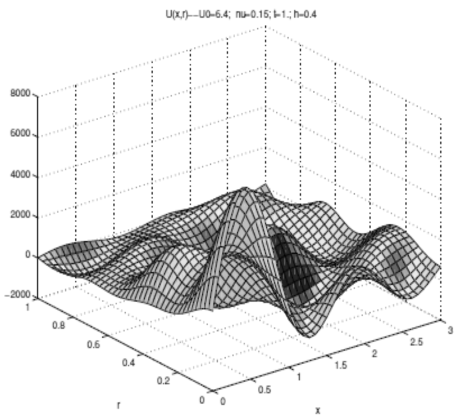

Рис. 3:

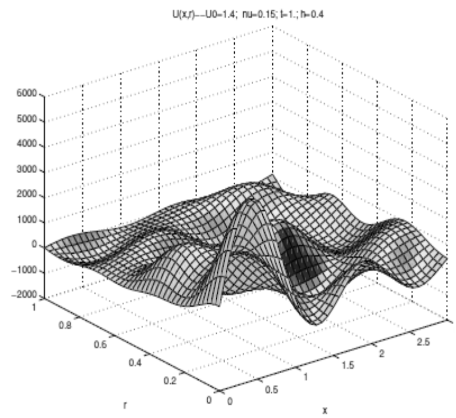

Рис. 4:

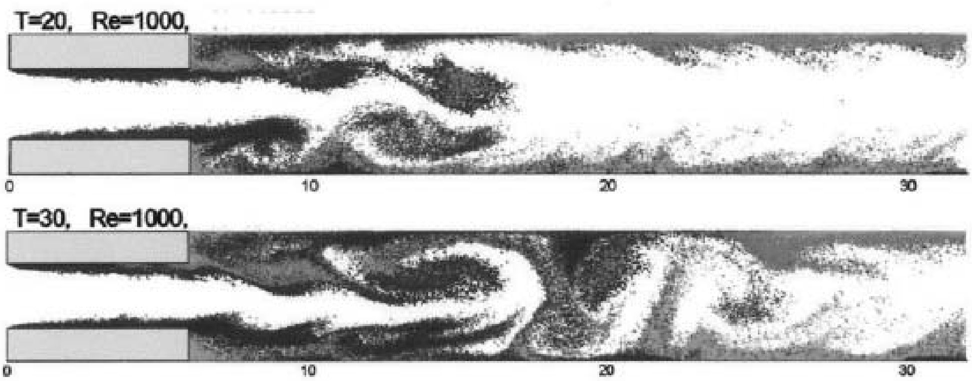

Рис. 5:

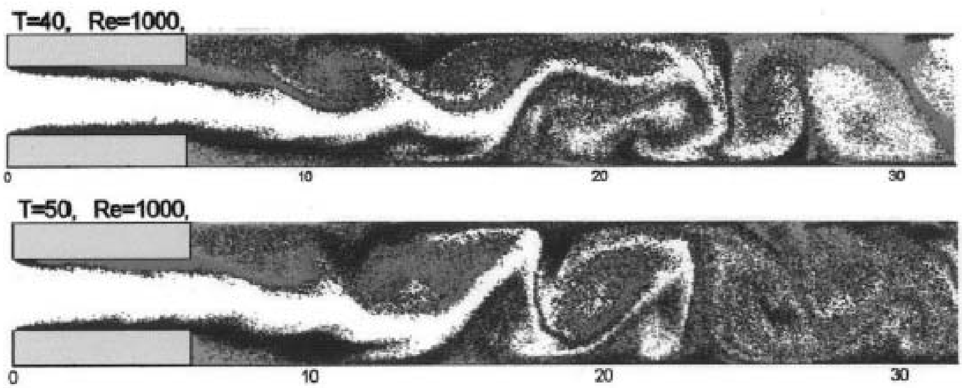

Рис. 6:

Висновки На грунті числово-пнплітичного розв'язання системи диференційних рівнянь Нав'є–Стокса, що описують динаміку розповсюдження потоку крові в аорті під впливом потоку крові із лівого шлуночка, отримано результати математичного та комп'ютерного моделювання, які свідчать про наявність вихрових потоків у корені аорти.

Список використаних джерел

1. Зеленський К.Х. Математичне моделювання динаміки лівого шлуночка // К.Х. Зеленський, Є.А. Настенко / Вісник Університету «Україна», серія Інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика, №1(18), 2016. — С. 27–38.