**УДК 519.6**

**П.И. Гучек**

# АВТОМАТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ МОДЕЛЕЙ

**Постановка проблемы.** Конечно-элементный анализ получает все большее распространение в реальной инженерной практике и является наиболее подходящим для моделирования сложных физических процессов. В настоящее время этот метод заложен в основу подавляющего большинства систем автоматизированного проектирования во многих отраслях[1-3]. С его помощью рассчитываются напряжения, деформации, теплообмен, распределение магнитного поля, потоки жидкостей и другие задачи с непрерывными средами, решать которые другими методами оказывается затруднительно. Существующие программные системы, как правило, закрыты для пользователя, не позволяют вмешиваться в процесс расчета на уровне методов решения, а также исследовать задачи, решение которых не было предусмотрено разработчиками [3]. Эти недостатки приводят к необходимости разработки инструментальных программных средств, позволяющие расширить функциональные возможности, которые отсутствуют в существующих программных системах для более детального исследования как стандартных, так и новых альтернативных моделей [4-6,10].

**Анализ предшествующих публикаций.** Долгое время считалось, что на каждом серендиповом конечном элементе существует единственный базис – стандартный, который был получен алгебраическим способом [1,7]. В начале 80-х годов были предложены вероятностно-геометрические процедуры конструирования базисов конечных элементов различной конфигурации [8,9]. В [10] авторы показывают новый комбинированный алгебро-геометрический метод построения базисных функций на серендиповых конечных элементах. С помощью этого метода впервые удалось получить альтернативные базисы с управляющим параметром на биквадратичном серендиповом конечном элементе (СКЭ-8). Наличие параметра в функциях СКЭ-8 позволяет оптимизировать вычислительные качества полученных альтернативных моделей. Особый интерес представляют нестандартные серендиповы элементы, обеспечивающие физически адекватные интегральные характеристики.

***Цель работы*** – разработка алгоритма и реализация в Maple решения задачи о кручении стержня некругового сечения с использованием альтернативных серендиповых моделей биквадратичного КЭ и сравнение полученных результатов.

**Основная часть**. Рассмотрим задачу о кручении стержня квадратного сечения, которая приведена в [16]. Пусть даны: модуль сдвига $\mu = 0{,}8 \cdot 10^7 \, Н/см^2$; относительный угол закручивания (угол крутки) $1^0 \, на \, 100см$; площадь поперечного сечения $1см^2$; $K_{xx} = K_{yy} = 1$. Найти поверхность напряжений и крутящий момент, возникающие при свободном кручении стержня.

В математической физике эта задача известна как задача Дирихле для уравнения Пуассона [13]:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -2\mu\theta, \quad \varphi\big|_{\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Вариационная формулировка задачи о кручении стержня связана с минимизацией функционала:

$$\chi = \int_V \left( \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - (2\mu\theta)\varphi \right) dV. \tag{2}$$

Функционал может быть записан в виде:

$$\chi = \int_V \left( \frac{1}{2}\{g\}^T [D]\{g\} - (2\mu\theta)\varphi \right) dV, \tag{3}$$

где $\{g\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{Bmatrix}$, $\qquad [D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}$.

Минимизация $\chi$ по $\{\Phi\}$ приводит к системе линейных уравнений:

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{V^{(e)}} \left[g^{(e)}\right]^T \left[D^{(e)}\right]\left[g^{(e)}\right] dV = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^{(e)}} \left[N^{(e)}\right]^T (2\mu\theta) dV, \tag{4}$$

где $\left\{g^{(e)}\right\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \ldots \\ \Phi_r \end{Bmatrix}$,

$\left[N_i, N_j, \ldots, N_r\right]$ – функции формы КЭ,

$\left\{\Phi_i, \Phi_j, \ldots, \Phi_r\right\}$ – узловые значения функции напряжений.

Сдвиговые напряжения, возникающие в стержне в результате действия крутящего момента $M$ относительно оси $z$, могут быть вычислены в произвольной точке по формулам:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{5}$$

Крутящий момент пропорционален объему, охватываемому поверхностью напряжений:

$$M = 2\iint_{\Omega} \varphi\, dxdy, \tag{6}$$

где $\Omega$ – сечение стержня.

В силу симметрии области, решение выполняется на 1/4 части квадрата, заштрихованной на рис. 1. Разбиение заштрихованной области проводится на биквадратичные КЭ (рис. 2)[14].

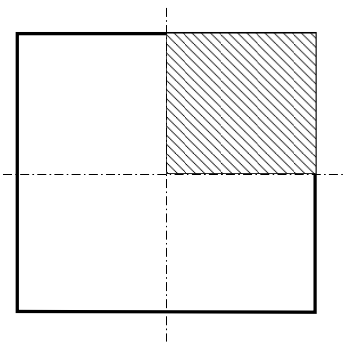

Рис. 1. Сечение стержня квадратного сечения

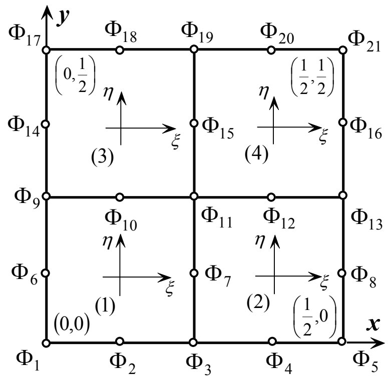


Рис. 2. Разбиение сечения на биквадратичные КЭ

Для биквадратичного КЭ комбинированным алгебро-геометрическим методом получены альтернативные базисные функции с управляющим параметром $p$ [ 10]:

$$N_i = \frac{1}{16}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\left[(36p-1)(1-\xi_i\xi-\eta_i\eta)+(36p+3)\xi_i\xi\eta_i\eta\right], \tag{7}$$

$$i = 1,3,5,7; \qquad \xi_i, \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{16}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta_i\eta)\left[(5-36p)+(36p+3)\eta_i\eta\right], \tag{8}$$

$$i = 2,6; \qquad \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{16}\left(1-\eta^2\right)(1+\xi_i\xi)\left[(5-36p)+(36p+3)\xi_i\xi\right], \tag{9}$$

$$i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1.$$

Для разработки соответствующего алгоритма и процедур реализации будем придерживаться основных этапов решения задач в системах, реализующих МКЭ[15]. Все пакеты, реализующие метод конечных элементов, состоят из информационной и вычислительной частей (рис. 3).

Информационная часть - *база данных (БД) пакета* - содержит описания используемых данным пакетом типов элементов (библиотеку элементов), библиотеку материалов, справочную систему. Физически представляет собой набор файлов, расположенных в том каталоге, куда был установлен пакет.

Вычислительная часть пакетов МКЭ представляет собой набор модулей (называемых обычно *процессорами),* выполняющих определенные функции и объединенных общей оболочкой (реализация этой идеи различна в разных пакетах - модули могут представлять собой отдельные EXE-файлы, либо входить в единый файл в виде подпрограмм). Среди процессоров обычно выделяют *препроцессор (preprocessor)* - модуль подготовки исходных данных, вычислительный процессор - *solver* (или вычислительные процессоры - для пакетов, решающих широкий круг задач) и *постпроцессор (postprocessor)* - средство визуализации и анализа результатов расчета.

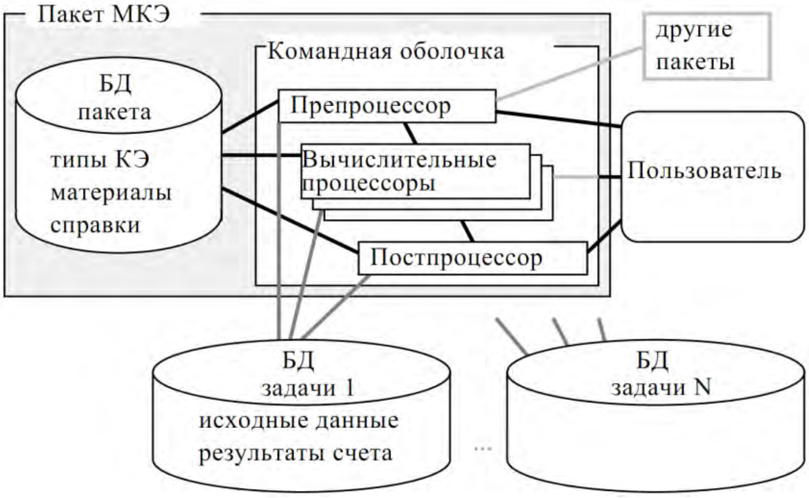


Рис.3. Пакет МКЭ. Общая структура

Блок схему решения задачи о кручении стержня представим на рис.4

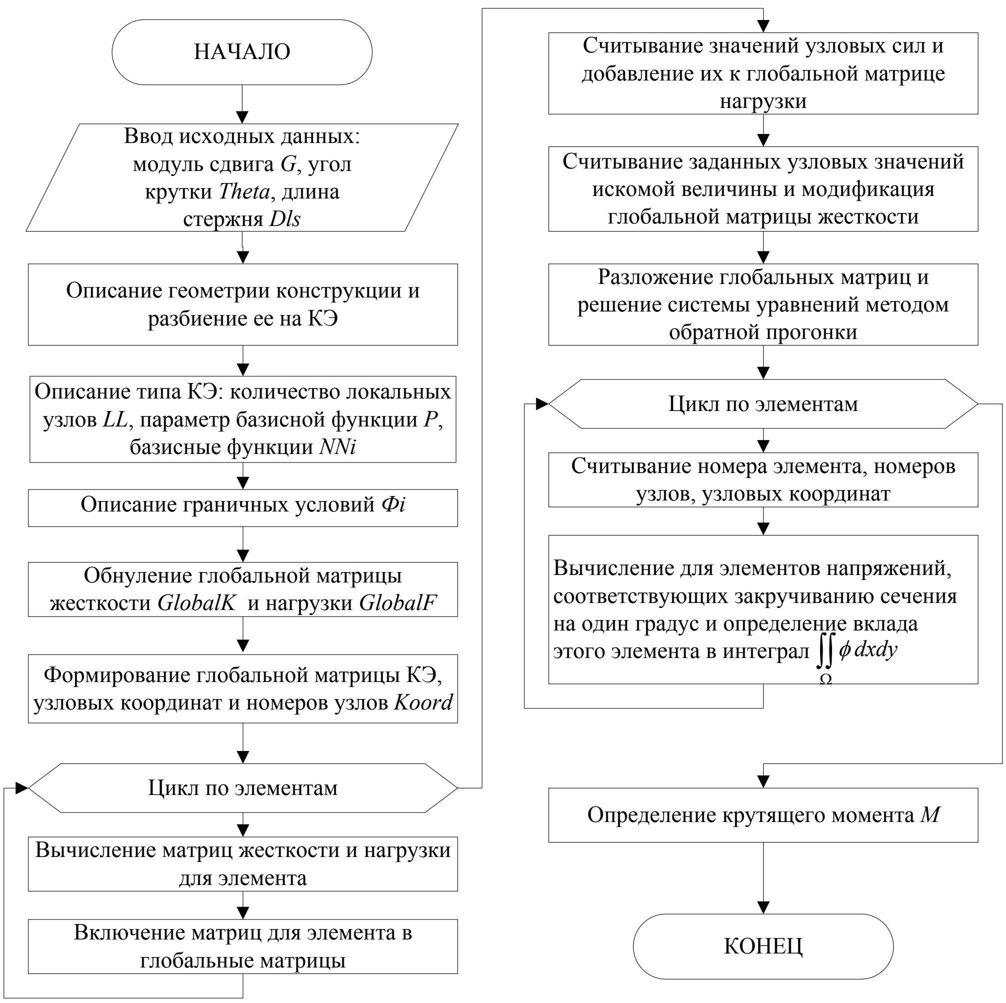


Рис.4. Блок–схема решения задачи о кручении стержня

Для регулирования сетки разбиения области на КЭ введем параметр Rek указывающий количество КЭ на одной стороне заштрихованой области сечения:

```
> restart : with(linalg) : with(LinearAlgebra) :

            Решение задачи о кручения стержня

> G := 0.8·10^7 :                   #Модуль сдвига
  Dls := 100 :                      #Длина стержня
  Theta := 1/Dls · 3.14/180 :       #Угол закручивания на единицу длины
  a := 1 :                          #Длина стороны квадратного сечения
> Rek := 2 :                        #Кол. КЭ на одной стороне области сечения
  LL := 8 :                         #Количество локальных узлов КЭ
  p := 1/18 :                       #Параметр для базисных функций
  K := Rek^2 :                      # Кол. КЭ в области сечения
  if LL = 4 then
    FF := (Rek + 1)^2               #Кол. глобальных узлов Ф
  elif LL = 8 then
    FF := (Rek·2 + 1)^2 − Rek^2
  end if:
```

Базисные функции для биквадратического КЭ с управляющим параметром представим в виде:

$$> NN1 := \left(\frac{-1}{16} + \frac{9}{4}\cdot p\right)\cdot(1-x)\cdot(1-y)\cdot\left(1 + x + y + \frac{3\cdot(1+12\cdot p)}{36\cdot p-1}\cdot x\cdot y\right):$$

$$NN2 := \left(\frac{5}{16} - \frac{9}{4}\cdot p\right)\cdot(1-x^2)\cdot(1-y)\cdot\left(1 + \frac{3\cdot(1+12\cdot p)}{36\cdot p-5}\cdot y\right):$$

$$NN3 := \left(\frac{-1}{16} + \frac{9}{4}\cdot p\right)\cdot(1+x)\cdot(1-y)\cdot\left(1 - x + y - \frac{3\cdot(1+12\cdot p)}{36\cdot p-1}\cdot x\cdot y\right):$$

$$NN4 := \left(\frac{5}{16} - \frac{9}{4}\cdot p\right)\cdot(1-y^2)\cdot(1+x)\cdot\left(1 - \frac{3\cdot(1+12\cdot p)}{36\cdot p-5}\cdot x\right):$$

$$NN5 := \left(\frac{-1}{16} + \frac{9}{4}\cdot p\right)\cdot(1+x)\cdot(1+y)\cdot\left(1 - x - y + \frac{3\cdot(1+12\cdot p)}{36\cdot p-1}\cdot x\cdot y\right):$$

$$NN6 := \left(\frac{5}{16} - \frac{9}{4}\cdot p\right)\cdot(1-x^2)\cdot(1+y)\cdot\left(1 - \frac{3\cdot(1+12\cdot p)}{36\cdot p-5}\cdot y\right):$$

$$NN7 := \left(\frac{-1}{16} + \frac{9}{4}\cdot p\right)\cdot(1-x)\cdot(1+y)\cdot\left(1 + x - y - \frac{3\cdot(1+12\cdot p)}{36\cdot p-1}\cdot x\cdot y\right):$$

$$NN8 := \left(\frac{5}{16} - \frac{9}{4}\cdot p\right)\cdot(1-y^2)\cdot(1-x)\cdot\left(1 + \frac{3\cdot(1+12\cdot p)}{36\cdot p-5}\cdot x\right):$$

Произведем обнуление глобальных матриц жесткости и нагрузки:

```
> GlobalK := array(1..FF, 1..FF) :      #Глобальная матрица жесткости
  LokalK := array(1..LL, 1..LL) :       #Локальная матрица жесткости
  GlobalF := array(1..FF) :             #Глобальная матрица нагрузки
  SDVIG := array(1..2, 1..K) :          #Матрица сдвиговых напряжений
  T := 0 :
  for i to FF do
    for j to FF do
      GlobalK[i, j] := 0 :
    end do:
    GlobalF[i] := 0 :
  end do:
```

Сформируем глобальную матрицу КЭ Koord[x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4,x5, y5, x6, y6, x7, y7, x8, y8, Фn1, Фn2, Фn3, Фn4,Фn5, Фn6, Фn7, Фn8]:

> kkk := matrix(Koord);

$$kkk := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 1 & 2 & 3 & 7 & 11 & 10 & 9 & 6 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 3 & 4 & 5 & 8 & 13 & 12 & 11 & 7 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 9 & 10 & 11 & 15 & 19 & 18 & 17 & 14 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 11 & 12 & 13 & 16 & 21 & 20 & 19 & 15 \end{bmatrix}$$

Расчет локальных матриц жесткости и нагрузки для каждого элемента с включение значений в глобальные матрицы представим в виде:

```
> for i to K do
  N(Koord[i, 17]) := NN1 :  N(Koord[i, 18]) := NN2 :  N(Koord[i, 19]) := NN3 :
  N(Koord[i, 20]) := NN4 :  N(Koord[i, 21]) := NN5 :  N(Koord[i, 22]) := NN6 :
  N(Koord[i, 23]) := NN7 :  N(Koord[i, 24]) := NN8 :
  MT4b := matrix([[diff(N(Koord[i, 17]), x), diff(N(Koord[i, 18]), x), diff(N(Koord[i, 19]), x), diff(N(Koord[i, 20]), x),
     diff(N(Koord[i, 21]), x), diff(N(Koord[i, 22]), x), diff(N(Koord[i, 23]), x), diff(N(Koord[i, 24]), x)],
    [diff(N(Koord[i, 17]), y), diff(N(Koord[i, 18]), y), diff(N(Koord[i, 19]), y), diff(N(Koord[i, 20]), y), diff(N(Koord[i, 21]),
    y), diff(N(Koord[i, 22]), y), diff(N(Koord[i, 23]), y), diff(N(Koord[i, 24]), y)]]) :
  KK := array(1 ..LL, 1 ..2, [[Koord[i, 1], Koord[i, 2]], [Koord[i, 3], Koord[i, 4]], [Koord[i, 5], Koord[i, 6]], [Koord[i, 7], Koord[i,
    8]], [Koord[i, 9], Koord[i, 10]], [Koord[i, 11], Koord[i, 12]], [Koord[i, 13], Koord[i, 14]], [Koord[i, 15], Koord[i, 16]]]) :
  R := expand(multiply(MT4b, KK)) :
  GG := inverse(R) :
  SS := expand(multiply(GG, MT4b)) :
  MT4btr := transpose(SS) :
  S := det(R) :
  fn := 2 · G·Theta·S :
  PR_SS_MT4btr := evalm(`&*`(MT4btr, SS)) :
  LokalKK := evalm(S·PR_SS_MT4btr) :
  for ii to LL do
   for jj to LL do
    LokalK[ii, jj] := int(int(LokalKK[ii, jj], x = -1 ..1), y = -1 ..1) :
   end do:
  end do:
  for ii to LL do
   for jj to LL do
    GlobalK[Koord[i, LL·2 + ii], Koord[i, LL·2 + jj]] := GlobalK[Koord[i, LL·2 + ii], Koord[i, LL·2 + jj]] + LokalK[ii, jj];
   end do:
    GlobalF[Koord[i, LL·2 + ii]] := GlobalF[Koord[i, LL·2 + ii]] + fn·(int(int(N(Koord[i, LL·2 + ii]), x = -1 ..1), y = -1 ..1)) :
  end do:

 end do:
```

Затем применив метод, разложение глобальных матриц, решим систему уравнений методом обратной прогонки[16] и произведем вычисления соответствующих напряжений для каждого КЭ.

```
> for i to K do
  N(Koord[i, 17]) := NN1 :  N(Koord[i, 18]) := NN2 :
  N(Koord[i, 19]) := NN3 :  N(Koord[i, 20]) := NN4 :
  N(Koord[i, 21]) := NN5 :  N(Koord[i, 22]) := NN6 :
  N(Koord[i, 23]) := NN7 : N(Koord[i, 24]) := NN8 :
  MT4b := matrix([[diff(N(Koord[i, 17]), x), diff(N(Koord[i, 18]), x), diff(N(Koord[i, 19]), x), diff(N(Koord[i, 20]), x),
     diff(N(Koord[i, 21]), x), diff(N(Koord[i, 22]), x), diff(N(Koord[i, 23]), x), diff(N(Koord[i, 24]), x)],
    [diff(N(Koord[i, 17]), y), diff(N(Koord[i, 18]), y), diff(N(Koord[i, 19]), y), diff(N(Koord[i, 20]), y), diff(N(Koord[i, 21]),
    y), diff(N(Koord[i, 22]), y), diff(N(Koord[i, 23]), y), diff(N(Koord[i, 24]), y)]]) :
  KK := array(1 ..LL, 1 ..2, [[Koord[i, 1], Koord[i, 2]], [Koord[i, 3], Koord[i, 4]], [Koord[i, 5], Koord[i, 6]], [Koord[i, 7], Koord[i,
    8]], [Koord[i, 9], Koord[i, 10]], [Koord[i, 11], Koord[i, 12]], [Koord[i, 13], Koord[i, 14]], [Koord[i, 15], Koord[i, 16]]]) :
  R := expand(multiply(MT4b, KK)) :
  GG := inverse(R) :
  MT4bm := matrix([[-diff(N(Koord[i, 17]), x), -diff(N(Koord[i, 18]), x), -diff(N(Koord[i, 19]), x), -diff(N(Koord[i, 20]), x),
    -diff(N(Koord[i, 21]), x), -diff(N(Koord[i, 22]), x), -diff(N(Koord[i, 23]), x), -diff(N(Koord[i, 24]), x)],
    [diff(N(Koord[i, 17]), y), diff(N(Koord[i, 18]), y), diff(N(Koord[i, 19]), y), diff(N(Koord[i, 20]), y), diff(N(Koord[i, 21]),
    y), diff(N(Koord[i, 22]), y), diff(N(Koord[i, 23]), y), diff(N(Koord[i, 24]), y)]]) :
  SS := expand(multiply(GG, MT4bm)) :
  MT4F := transpose(matrix([[FFF(Koord[i, 17]), FFF(Koord[i, 18]), FFF(Koord[i, 19]), FFF(Koord[i, 20]), FFF(Koord[i,
    21]), FFF(Koord[i, 22]), FFF(Koord[i, 23]), FFF(Koord[i, 24])]])) :
  SDVN := evalm(`&*`(SS, MT4F));
  SDVIG[1, i] := factor(SDVN[1, 1]) :
  SDVIG[2, i] := factor(SDVN[2, 1]) :
  S := 1/64 :
  for ii to LL do
   T := T + 2·S·FFF(Koord[i, LL·2 + ii])·int(int(N(Koord[i, LL·2 + ii]), x = -1 ..1), y = -1 ..1) :
  end do:

 end do:
```

И определим крутящий момент:

```
> M := 4 · T;    # Полный крутящий момент
                                M := 183.924059004674
```

С помощью разработанной процедуры проводилось тестирование альтернативных серендиповых моделей биквадратичного КЭ при разных значениях параметра $p$. Полученые результаты для функции напряжений и крутящего момента сравнивались с точным решением [12]. Относительные ошибки для функции напряжений и крутящего момента, которые получены МКЭ, с использованием альтернативных функций представлены в [14].

**Выводы**. В работе разработан алгоритм и программная реализация в Maple решения задачи о кручении стержня некругового сечения с использованием альтернативных серендиповых моделей биквадратичного КЭ. Разработанная процедура позволяет проводить исследования альтернативных моделей при решении практической задачи и сравнивать полученные результаты со стандартным базисом этого элемента.

ЛИТЕРАТУРА:


1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошной среды / О. Зенкевич, И. Чанг. – М.: Недра, 1974. – 238 с.
3. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / В. А. Толок, В. В. Киричевский, С. И. Гоменюк, С. Н. Гребенюк, Д. П. Бувайло. – К.: Наук. Думка, 2003. – 316 с.
4. Гучек П.И. Геометрическое моделирование и компьютерная визуализация базисов конечных элементов / П.И. Гучек // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сб. науч. тр. – К. : Ин-т математики НАНУ. – 1996. – С. 95-97.
5. Гучек П.И. Компьютерная визуализация функций формы конечных элементов / П.И. Гучек // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач – К. : Ин-т математики НАНУ. – 1997. – Вып. 14 – С. 79-81.
6. Гучек П.Й. Інтерактивна процедура візуалізації функцій форми на серендипових елементах / П.Й. Гучек, О.І. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2012. – Вып. 1 (44). – С. 274-280.
7. Taylor R. L. On the completeness of shape functions for finite element analysis / R. L. Taylor // Internat. J. Numer. Methods Eng. — 1972. —V.4. — № 1. — P. 17-22.
8. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А. Н. Хомченко // Ивано-Франковс. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск , 1982. — 5 с. — Деп. в ВИНИТИ 21.10.1982, №5264.
9. Хомченко А.Н. Геометрия серендиповых аппроксимаций / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек // Прикл. геом. и инж. графика. — К. : Будівельник, 1996. — Вып. 59. — С. 40-42.
10. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – 2009. – Вип. 23. – С. 90-95.
11. Попов Б.А. Приближение функций для технических приложений / Б.А. Попов, Г.С. Теслер. — Киев : Наукова думка, 1980. — 352 с.
12. Тимошенко С. П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко. – К. : Наукова думка, 1972. – 506 с.
13. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В.Карпов, А.М. Масленников. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 350 с.
14. Астионенко И.А. Применение альтернативных сирендиповых моделей при решении задачи о кручении призматических стержней / И.А. Астионенко, П.И. Гучек, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2013. – Вып. 1 (46). – С. 356-361.
15. Чернявский. А. О. Метод конечных элементов. Основы практического применения / А.О. Чернявский. – М.: Машиностроение, 2003. – 29 с.
16. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М. : Мир, 1979. — 392с.


ГУЧЕК Петр Иосифович – к.т.н., доцент кафедры информационных технологий Херсонского национального технического университета.

Научные интересы:

– методы восстановления функций, принцип барицентрического усреднения.