УДК 004.942

В.Ф. МИРГОРОД
АО"Элемент"
И.М. ГВОЗДЕВА
Национальный университет "Одесская морская академия"
Е.В. ДЕРЕНГ
Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

Предлагается и обосновывается подход к исследованию свойств динамических объектов, представленных математическими моделями в виде систем интегральных уравнений Вольтерры II-го рода. Подход основан на нахождении резольвентных решений систем интегральных уравнений с сепарабельными ядрами. Рассмотрено преобразование системы интегральных уравнений к системе эквивалентных дифференциальных уравнений. Установлена взаимосвязь резольвентных решений интегральных уравнений и фундаментальных решений эквивалентных дифференциальных уравнений. Построена математическая модель газотурбинного двигателя в виде системы интегральных уравнений Вольтерры II-го рода.

Ключевые слова: математическая модель, система интегральных уравнений, эквивалентное преобразование, резольвента.

В.Ф. МИРГОРОД
ВАТ"Елемент"
І.М. ГВОЗДЕВА
Національний університет "Одеська морська академія"
Є.В. ДЕРЕНГ
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України

АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ З СЕПАРАБЕЛЬНИМИ ЯДРАМИ

Пропонується і обґрунтовується підхід до дослідження властивостей динамічних об'єктів, представлених математичними моделями у вигляді систем інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду. Підхід заснований на встановленні резольвентних рішень систем інтегральних рівнянь із сепарабельними ядрами. Розглянуто перетворення системи інтегральних рівнянь до системи еквівалентних диференціальних рівнянь. Встановлений взаємозв'язок резольвентних рішень інтегральних рівнянь і фундаментальних рішень еквівалентних диференціальних рівнянь. Побудована математична модель газотурбінного двигуна у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду.

Ключові слова: математична модель, система інтегральних рівнянь, еквівалентне перетворення, резольвента.

V.F.MYRHOROD
Limited Company "Element"
I.M.HVOZDEVA
National university "Odessa maritime academy"
E.V. DERENH
Pukhov's Institute of Simulation Problems in Power NAS Ukraine

ANALYTICAL SOLUTIONS OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS SYSTEMS WITH SEPARABLE KERNELS

There is offered and grounded the approach to investigation of properties of dynamic objects, presented by mathematical models as systems of Volterra integral equations of the second kind. The approach is based on finding the resolvent solutions of systems of Volterra integral equations of the second kind with separable kernels. The transformation of integral equations system to the system of equivalence differential equations is considered. The interconnection of resolvent solutions of integral equations and fundamental solutions of equivalent differential equations is determined. The mathematical model of gas turbine engine as a system of Volterra integral equations of the second kind is developed.

Keywords: mathematical model, the system of integral equations, equivalent transformation, resolvent.

Введение

Проблемным вопросом построения математических моделей (ММ) динамических объектов, предназначенных для реализации в системах управления и диагностики реального времени, является отыскание компромисса между необходимой точностью и вычислительной сложностью. Важная научно-прикладная задача состоит в расширении возможных форм математического описания процессов изменения управляемого состояния динамических объектов для отыскании таких из них, которые при сохранении адекватности реальным процессам позволили бы упростить их численную реализацию.

Известные преимущества интегральных моделей, в частности интегральных уравнений Вольтерры II-го рода и их систем, определяют необходимость и практическую значимость рассмотрения методов отыскания различных форм их аналитических решений на основе решения соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

Постановка проблемы и цель исследования

Теории интегральных уравнений (ИУ) посвящены ряд фундаментальных работ [1–3]. В справочной литературе [3,4] детально рассмотрены методы и алгоритмы вычислительной реализации, соответствующие программные средства. Аналитические решения уравнения для резольвенты описаны только для ряда частных случаев [1–3]. Обобщения решения уравнения для резольвенты [5,6] предложены для ряда важных прикладных задач. Необходимость численной реализации ММ непосредственно в составе систем реального времени требует систематического рассмотрения вопросов отыскания аналитических решений интегральных уравнений, применяемых в качестве математических моделей исследуемых объектов. В первую очередь это касается интегральных уравнений Вольтерры II-го рода, имеющих широкую область применения в прикладных задачах и для которых разработаны эффективные методы численного решения [3].

Целью настоящего исследования является разработка методов аналитического решения систем интегральных уравнений Вольтерры II-го рода с сепарабельными ядрами на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

Основные результаты

Рассмотрим систему ИУ Вольтерры II-го рода с сепарабельным ядром

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x) + \int_a^x K(x,s)\,\vec{y}(s)\,ds = \vec{f}(x) + C(x)\int_a^x B(s)\,\vec{y}(s)\,ds, \qquad (1)$$

где $dim\left(\vec{y}(x)\right) = dim\left(\vec{f}(x)\right) = n,$ строки матрицы $C(x)$ и столбцы матрицы $B(x)$ являются системами линейно независимых функций [1,3]. Эквивалентная (1) система дифференциальных уравнений устанавливается введением вектор-функции

$$\vec{\omega}(x) = \int_a^x B(s)\,\vec{y}(s)\,ds, \qquad (2)$$

и соответствующего линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx} = B(x)\,\vec{y}(x), \qquad (3)$$

с нулевыми начальными условиями.

Из (1) получим

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x) + C(x)\vec{\omega}(x).$$

Согласно (3)

$$\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx} = B(x)\left[C(x)\vec{\omega}(x) + \vec{f}(x)\right] = B(x)C(x)\vec{\omega}(x) + B(x)\,\vec{f}(x).$$

Из приведенных выражений следует, что система ИУ (1) при условии (2) эквивалентно матричному дифференциальному уравнению в виде математической модели пространства состояний (ММПС)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}(x)}{dx} &= A(x)\vec{\omega}(x) + B(x)\vec{f}(x) \\ \vec{y}(x) &= C(x)\vec{\omega}(x) + D(x)\vec{f}(x), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $A(x) = B(x)C(x)$, и $D(x) = E.$

Из (1) и (4) следует, что для обеспечения существования и единственности решения (4) матрицы $C(x)$ и $B(x)$ должны быть квадратными при дополнительном условии, что строки матрицы $C(x)$ и столбцы матрицы $B(x)$ являются системами линейно независимых функций. Проведенные преобразования дают основание сформулировать следующее утверждение.

Утверждение. Если в системе интегральных уравнений Вольтерры II-го рода (1) матричное ядро является сепарабельным вида

$$K(x,s)=C(x)B(s),$$

и, кроме того, строки матрицы $C(x)$ и столбцы матрицы $B(x)$ являются системами линейно независимых функций, то решением уравнения для резольвенты

$$R(x,s)=K(x,s)+\int_s^x K(x,\lambda)R(\lambda,s)\,ds, \tag{5}$$

является функция

$$R(x,s)=C(x)F(x,s)B(s),$$

где $F(x,s)$ представляет собой фундаментальную матрицу – решение следующего дифференциального уравнения

$$\frac{dF'(s,x)}{dx}=-B(x)C(x)F(s,x)=-A(x)F(s,x) \tag{6}$$

с начальным условием, равным единичной матрице.

Необходимость приведенных утверждений следует из подстановки ядра и резольвенты в (5)

$$C(x)F(x,s)B(s)=C(x)B(s)+C(x)\int_s^x B(\lambda)C(\lambda)F(\lambda,s)d\lambda B(s). \tag{7}$$

Необходимым условием для выполнения равенства (6) является следующее условие

$$F(x,s)=E+\int_s^x B(\lambda)C(\lambda)F(\lambda,s)d\lambda=0. \tag{8}$$

Выражения (6) и (8) являются эквивалентными формами уравнения для фундаментальной матрицы, что и устанавливает необходимость представленного Утверждения.

Таким образом, эквивалентной формой системы интегральных уравнений Вольтерры II-го рода (1) с сепарабельными ядрами являются дифференциальные уравнения динамической системы с векторным входом и векторным выходом в пространстве состояний (4), решение которых, и, следовательно, решение системы (1) имеет вид

$$\vec{y}(x)=\vec{f}(x)+\int_a^x R(x,s)\vec{f}(s)ds=\vec{f}(x)+C(x)\int_a^x F(x,s)B(s)\vec{y}(s)ds,$$

где матрица $F(x,s)$ определяется решением (6).

Достаточность в общем случае следует из единственности решения системы интегральных уравнений (1). Если решение (5) не единственно, а имеется два решения $R_1(x,s)$ и, $R_2(x,s)$ то они оба должны удовлетворять уравнению (5)

$$R_1(x,s)=K(x,s)+\int_s^x K(x,\lambda)R_1(\lambda,s)ds,$$

$$R_2(x,s)=K(x,s)+\int_s^x K(x,\lambda)R_2(\lambda,s)ds,$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем следующее интегральное уравнение

$$R_1(x,s)-R_2(x,s)=K(x,s)+\int_s^x K(x,\lambda)\left[R_1(x,s)-R_2(x,s)\right]ds,$$

Полученное уравнение является интегральным уравнением Вольтерры I-го рода, которое, как известно [1], имеет только нулевое решение, следовательно, $R_1(x,s)=R_2(x,s)$.

Пример. Исходной гипотезой для построения ММ установившихся режимов газотурбинного двигателя (ГТД) является предположение, согласно которому энергетический параметр двигателя в виде степени повышения давления, определяющей тяговые характеристики ГТД, связан с оборотами его турбин зависимостью вида

$$\pi_k(G_t) = \sum_{i=1}^{N} a_{1i}(G_t) n_i(G_t), \tag{9}$$

а градиенты оборотов турбин по расходу топлива, в свою очередь, определяются этим энергетическим параметром

$$\frac{dn_i(G_t)}{dG_t} = b_{1i}(G_t)\pi_k(G_t), i = \overline{1, N}. \tag{10}$$

где $\{a_{1i}(G_t)\}, \{b_{1i}(G_t),\}$ – системы линейно независимых функций.

Из соотношений (9) и (10) непосредственно следует эквивалентная ММ в виде интегрального уравнения Вольтерры II-го рода с сепарабельным ядром

$$\pi_k(G_t) = \sum_{i=1}^{N} a_{1i}(G_t) n_i(G_{nt}) + \sum_{i=1}^{N} a_{1i}(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} b_{1i}(s)\pi_к(s)\,ds \tag{11}$$

Идентификация ММ (11) выполнена по статическим характеристикам и базам данных испытаний трехвального двигателя и дала приемлемые результаты [7]. Среднеквадратическое отклонение по основным параметрам (переменным) двигателя не превышает 1.5 %.

Преимущества ММ (11) представляются достаточно значительными: основные характеристики двигателя определяются небольшой совокупностью линейно независимых функций, которые имеют ясное физическое содержание и довольно несложно определяются по экспериментальным данным.

Сформируем аналогичную ММ по температурному режиму ГТД.

$$T_g(G_t) = \sum_{i=1}^{N} a_{2i}(G_t) n_i(G_{nt}) + \sum_{i=1}^{N} a_{2i}(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} b_{2i}(s) T_g(s)\,ds \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) являются независимыми, что не отражает физическую сущность явлений в исследуемом объекте. Уточнение приведенных ММ предлагается в виде системы ИУ Вольтерры II-го рода

$$\left.\begin{aligned} \pi_k(G_t) &= \sum_{i=1}^{N} a_{1i}(G_t) n_i(G_{nt}) + \sum_{i=1}^{N} a_{1i}(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} b_{1i}(s)\pi_к(s)\,ds + \alpha_1(G_t)\int_{G_{nt}}^{G_t} \beta_1(s) T_g(s)\,ds, \\ T_g(G_t) &= \sum_{i=1}^{N} a_{2i}(G_t) n_i(G_{nt}) + \sum_{i=1}^{N} a_{2i}(G_t) \int_{G_{nt}}^{G_t} b_{2i}(s) T_g(s)\,ds + \alpha_2(G_t)\int_{G_{nt}}^{G_t} \beta_2(s)\pi_к(s)\,ds, \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

которая отражает взаимозависимость степени повышения давления и температурного режима двигателя.

Заключение. Предлагаемый подход к установлению решений некоторых типов систем интегральных уравнений Вольтерра II-го рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту, дает возможность исследовать новые классы решений таких уравнений с различной правой частью.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением класса возможных типов систем интегральных уравнений Вольтерры II-го рода, для которых могут быть получены аналитические решения уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

Список использованной литературы

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т. 4. – Ч. 1. – 336 с.
2. Забрейко П.П. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
3. Верлань А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Техника, 1986. – 700 с.
4. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К.: Наук. Мысль, 1986. – 584 с.
5. Миргород В.Ф. Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода / В.Ф. Миргород // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 68–80.
6. Миргород В.Ф. Эквивалентные преобразования интегральных и дифференциальных математических моделей / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // Матер. междунар. научн. конф. “Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта”. – 18-22 мая 2009. – 2009. – Евпатория – Т. 1. – С. 88–91.
7. Миргород В. Ф. Модальная и интегральная формы математических моделей газотурбинных двигателей / В.Ф. Миргород, В.М. Грудинкин // Вестник двигателестроения. – 2008. – № 3. – С. 185-189.