

УДК 532.593

А.П. ГОРОВЕНКО
Інститут геофізики НАН У**НАПРУЖЕННЯ В ПРУЖНОМУ ВКЛЮЧЕННІ В РІДИНІ ПІД ДІЄЮ ХВИЛІ
ТИСКУ**

Отримано рішення задачі дифракції хвилі тиску на включенні в рідині в вигляді рядів по сферичним функціям. Розраховані величини напружень у включенні для різних пружних матеріалів включення.

Ключові слова: дифракція хвилі, ряди по сферичним функціям, напруження.

А.П. ГОРОВЕНКО.
Институт геофизики НАН У**НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ ВКЛЮЧЕНИИ В ЖИДКОСТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ
ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ**

Получено решение задачи дифракции волны давления на включении в жидкости в виде рядов по сферическим функциям. Рассчитаны величины напряжений во включении для различных упругих материалов включения.

Ключевые слова: дифракция волны, ряды по сферическим функциям, напряжения.

A.P. GOROVENKO
Institute geophysical Acad. Science of Ukraine**THE STRESSES IN ELASTIC INCLUSION IN A LIQUID PRODUCED BY THE COMPRESSIONAL
WAVE**

The solution of the problem of pressure wave diffraction as rows of spherical functions is obtained. Value of stresses in inclusion for differences elastic materials of inclusion are calculated.

Keywords: wave diffraction, rows of spherical functions, stresses.

Постановка проблеми

Дифракція хвилі тиску на пружному включенні в рідині має важливе наукове та прикладне значення, зокрема для ряду задач геофізики та акустики.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідженню явища дифракції хвилі на включенні присвячено ряд робіт, зокрема, [1]-[3]; отримані результати відносяться, як правило, до далекої зони, для оцінки хвиль в ближній зоні та у включенні необхідні подальші дослідження.

Формулювання цілі дослідження

Виконати комп'ютерні розрахунки напружень у включенні в залежності від частоти хвилі. Дослідження провести в широкому діапазоні значень густин та швидкостей хвиль для різних пружних середовищ включення.

Виклад основного матеріалу дослідження

Більш детальний виклад досліджень наведений в роботі [4], далі розглянемо основні тези.

Отже нехай на пружну сферу радіусом a , розташовану в рідині набігає плоска акустична хвиля тиску $\tilde{p}_1 = p \exp(ik_1 r \cos \theta + \omega t)$, де r, θ – координати точки, відраховані від центра сфери. Напруження та зміщення залежать від скалярних потенціалів ϕ та ψ пов'язаних з хвилями тиску та зсуву, відповідно, [4]. Далі використаємо постійні розповсюдження $k_p = \omega/V_p$, $K_S = \omega/V_S$, це хвильові числа для хвиль тиску та зсуву, відповідно; ω – кругова частота, V_p – швидкість хвилі тиску, V_s – швидкість хвилі зсуву. Швидкості розповсюдження хвиль дорівнюють $V_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $V_s^2 = \mu/\rho$, де λ, μ – параметри Ляме, ρ – густина.

Введемо позначення: i – падаюча хвиля, S – розсіяна хвиля, f – хвиля у включенні, 1 – матриця, 2 – включення. Зовнішня хвиля тиску, яка падає на включення, може бути записана в сферичній системі координат у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) j_m(k_1 r) Y_m(\cos \theta), \\ \Psi_i &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $j_m(x)$ - сферична функція Бесселя, $Y_m(\cos \theta)$ – поліноми Лежандра.

В загальному вигляді в матриці будуть p та S хвилі з потенціалами

$$\begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Psi_s \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_m h_m(k_1 r) \\ B_m h_m(K_1 r) \end{pmatrix} Y_m(\cos \theta), \tag{2}$$

де $h_m^{(2)}(x)$ - сферична функція Ганкеля другого роду; A_m, B_m - коефіцієнти розкладу в ряди.

$$h_m^{(2)}(x) = j_m(x) - i N_m(x), \tag{3}$$

де $j_m(x)$ - сферична функція Бесселя, $N_m(x)$ – сферична функція Неймана.

Коли матриця рідина потенціал $\Psi_s = 0$, тобто $B_m = 0$.

У включенні хвиля тиску має потенціал

$$\Phi_f = \sum_{m=0}^{\infty} C_m j_m(k_2 r) Y_m(\cos \theta). \tag{4}$$

В пружному включенні також буде хвиля зсуву з потенціалом Ψ_f

$$\Psi_f = \sum_{m=0}^{\infty} D_m j_m(K_2 r) Y_m(\cos \theta). \tag{5}$$

Коефіцієнти розкладу в ряди A_m, C_m, D_m визначаються з граничних умов на поверхні включення ($r = a$). Наведемо граничні умови для $r = a$

1. Неперервність зміщень

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \text{ тобто } u_{ri} + u_{rs} = u_{rf}, \tag{6}$$

2. Неперервність компонент тензора напружень

$$\tau_r^{(1)} = \tau_r^{(2)}, \text{ тобто } \tau_{ri} + \tau_{rs} = \tau_{rf}, \tag{7}$$

$$\tau_{\theta}^{(1)} = \tau_{\theta}^{(2)}, \text{ тобто } \tau_{\theta i} + \tau_{\theta s} = \tau_{\theta f}. \tag{8}$$

Використовуючи рівняння теорії пружності та рівняння (1)-(8) знайдемо зміщення та компоненти тензора напруження, підставимо ці величини в граничні умови і визначимо коефіцієнти розкладу в ряди A_m, C_m, D_m [4].

Аргументом досліджуваних функцій була величина ka , де k - хвильове число, a - радіус включення. Величина k дорівнює $2\pi\nu/V_p$, де ν – частота в Гц, V_p – швидкість хвилі тиску в середовищі. Далі будуть наведені результати комп'ютерних розрахунків величин зміщення u_{rf} , нормованої компоненти $\tau_{rf}^* = \tau_{rf}/(\rho_2 \omega^2)$ та нормованої компоненти $\tau_{\theta f}^* = \tau_{\theta f}/(2\rho_2 \omega^2/K_2^2)$ тензора напруження у включенні на

відстані r від центра включення; також будуть наведені діаграми напрямку цих величин. Розрахунки були виконані для випадку матриця вода, включення вапняк, $a=0,01$.

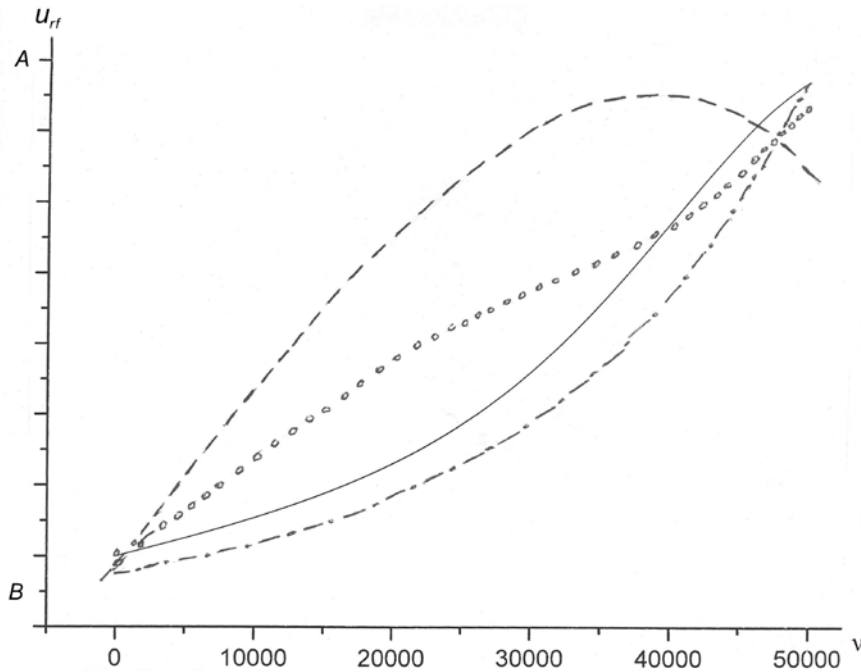


Рис.1. Залежність зміщення u_{rf} від частоти, θ та g -параметри.

— $AB=0-0,07$ $r=0,99a$ $\theta=180$, ... $AB=0-0,00023$ $r=0,1a$ $\theta=180$,
 --- $AB=0-0,00016$ $r=0,1a$ $\theta=0$, -.- $AB=0-0,1$ $r=0,99a$ $\theta=0$.

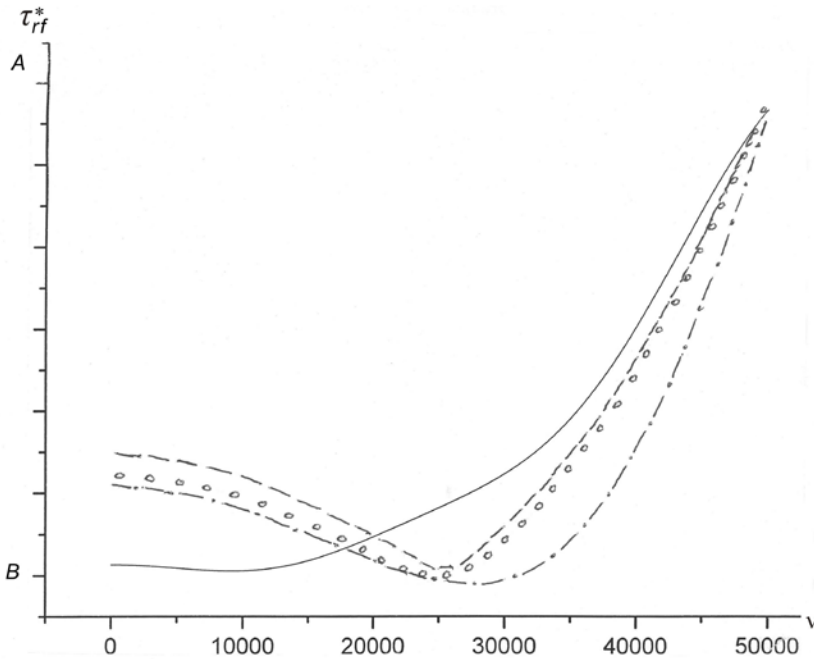


Рис.2. Залежність компоненти τ_{rf}^* тензора напруження від частоти, θ та g -параметри.

— $AB=0,4-1,0$ $r=0,99a$ $\theta=180$, ... $AB=0,1-1,5$ $r=0,1a$ $\theta=180$,
 --- $AB=0,005-1,6$ $r=0,1a$ $\theta=0$, -.- $AB=0,35-0,8$ $r=0,99a$ $\theta=0$.

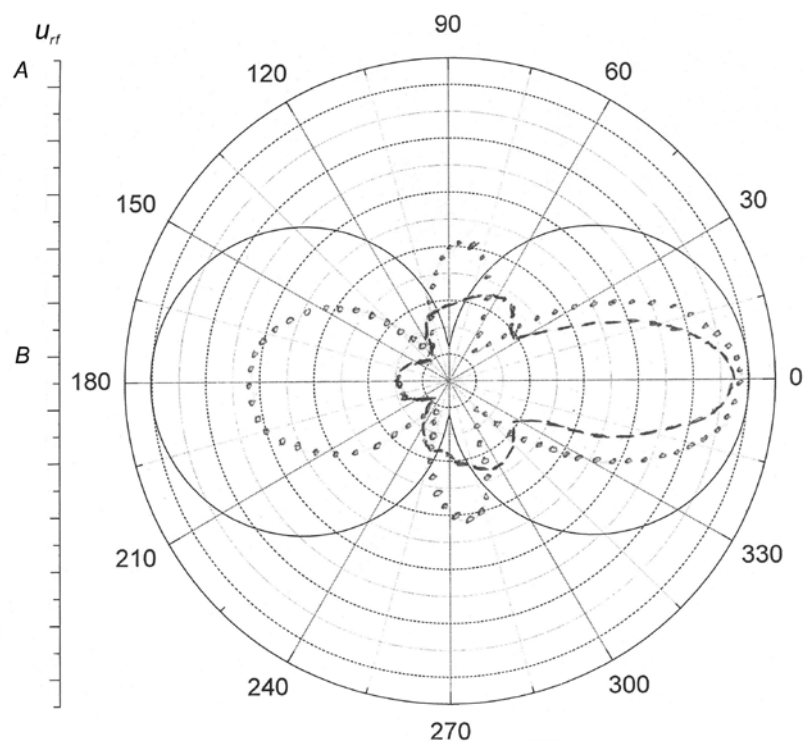


Рис.3. Діаграма напрямку зміщення u_{rf} для різних частот хвилі тиску, $r=0,99a$.
 — $AB=0-0,0005$ $V=1$ КГц, ... $AB=0,02-0,1$ $V=50$ КГц, --- $AB=0,05-0,35$ $V=100$ КГц.

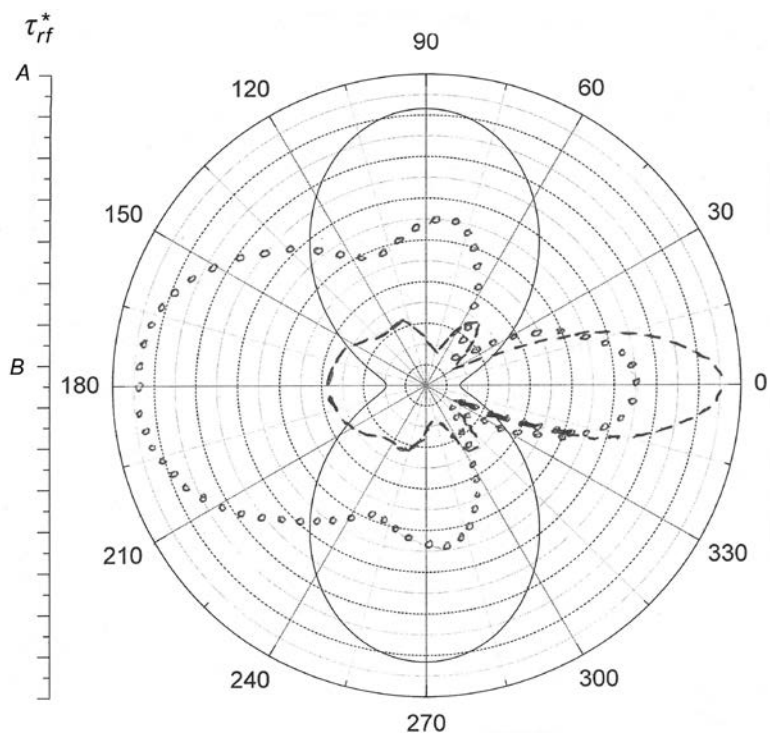


Рис.4. Діаграма напрямку компоненти τ_{rf}^* для різних частот хвилі тиску, $r=0,99a$.
 — $AB=0,41302-0,41309$ $V=1$ КГц, ... $AB=0,2-1,0$ $V=50$ КГц, --- $AB=0,4-2,0$ $V=100$ КГц.

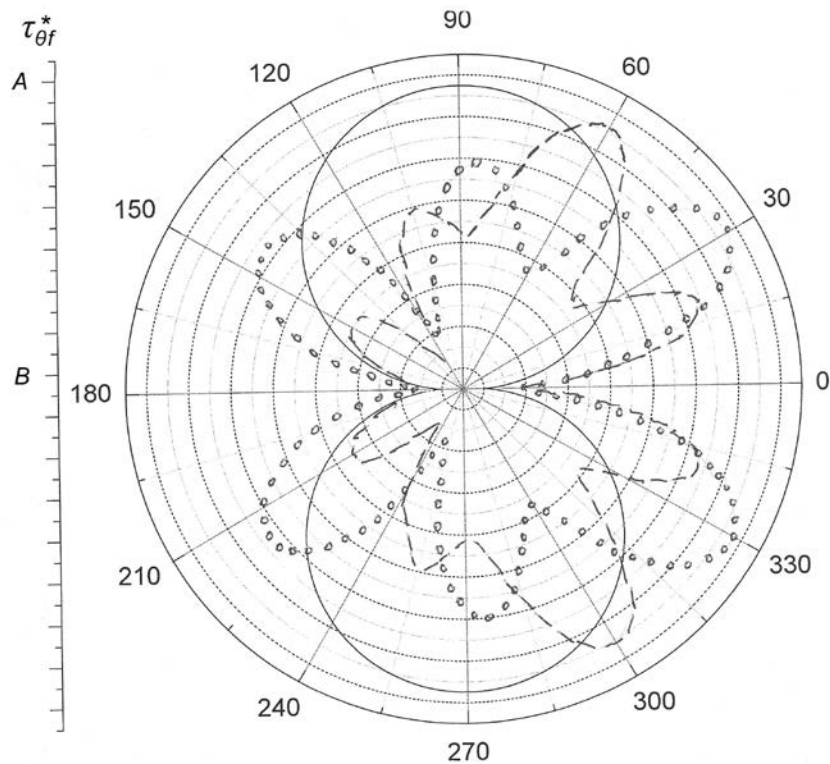


Рис.5. Діаграма напрямку компоненти $\tau_{\theta f}^*$ для різних частот хвилі тиску, $\gamma=0,99a$.
 — $AB=0-0,0014$ $\nu=1$ КГц, ... $AB=0-0,03$ $\nu=50$ КГц, --- $AB=0-0,08$ $\nu=100$ КГц.

Для $\gamma=0,99a$ компонента τ_{rf}^* майже однакова для частот до 10 КГц, а потім повільно росте до величини 1,0 для $\nu=50$ КГц та 2,0 для $\nu=100$ КГц; компонента $\tau_{\theta f}^*$ на два порядки менша за величиною в порівнянні з τ_{rf}^* для частот до 10 КГц, а потім росте, так для $\nu=50$ КГц вона зростає в 15 раз.

Для $\gamma=0,1a$ зміщення менші за величиною чим для $\gamma=0,99a$, поведінка τ_{rf}^* приблизно така ж, як і для $\gamma=0,99a$, а кутова компонента $\tau_{\theta f}^*$ більша по величині в порівнянні з радіальною компонентою τ_{rf}^* .

Висновки

1. Розглянуто точний розв'язок задачі дифракції хвилі тиску пружним включенням в рідині. Розв'язок представлений рядами по сферичним функціям Бесселя, Неймана, Ганкеля, поліномам та приєднаним функціям Лежандра. Розроблений алгоритм та створена програма для комп'ютерних розрахунків амплітуди дифрагованої хвилі, зміщень та компонент тензора напружень.
2. Нормовані компоненти тензора напружень τ_{rf}^* та $\tau_{\theta f}^*$ майже не залежать від частоти для ν до 10 КГц, а потім ростуть за величиною. Близько до поверхні включення ($\gamma=0,99a$) радіальна компонента значно більша кутової компоненти, в той час як близько до центра включення ($\gamma=0,1a$) навпаки, кутова компонента більша радіальної.

Список використаної літератури.

1. Mc.Mechan G.A. Resonant scattering by fluid-filled cavities. // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1982. 72.- №4.- P.1143-1153.
2. Gaunard G.C., Uberall H. Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media. // JASA. – 1978. 63.- p.1699-1712.
3. Brill D.G., Gaunard G.C., Uberall H. The response surface in elastic wave scattering. // J. Appl.Phys. – 1981. 52.- p.3205-3214.
4. Горovenko А.П. Дифракція хвилі тиску на сферичному пружному включенні в рідині. -Препринт. ІГФ НАНУ. Київ.2015.-23с.