УДК 519.624;51-72: 531/533

И.Н. БЕЛЯЕВА, Н.А. ЧЕКАНОВ
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Н.Н. ЧЕКАНОВА
Харьковский учебно-научный институт государственного высшего учебного заведения "Университет банковского дела"

РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛИНДСТЕДТА-ПУАНКАРЕ И ИХ КВАНТОВАНИЕ

В работе методом Линдстедта-Пуанкаре найдены решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений со степенной нелинейностью, выполнено их квантование и получены энергетические спектры. Согласно этому методу решение нелинейных уравнений $x'' + x + \alpha\,\mu \cdot x^{\mu-1} = 0,$ $\mu = 4, 6, 8$, *ищется в виде разложения по степеням некоторого параметра. В результате получена система связанных обыкновенных дифференциальных уравнений. Все ее решения содержат величину, играющую роль частоты и в решениях, кроме ограниченных слагаемых возникают секулярные члены, которые неограниченно растут во времени. Поэтому сама частота представляется также в виде разложения по параметру, как и решения. При этом частота выбирается так, чтобы аннулировать секулярные члены. Используя закон сохранения энергии, в решение вводится полная энергия рассматриваемых систем* $x'' + x + \alpha\,\mu \cdot x^{\mu-1} = 0,\quad \mu = 4, 6, 8$. *В итоге получается ограниченное во времени решение. Для так полученных классических решений выполняется квантование при помощи известного правила Бора-Зоммерфельда и определяются энергетические спектры каждой системы* $x'' + x + \alpha\,\mu \cdot x^{\mu-1} = 0,$ $\mu = 4, 6, 8$, *при их квантово-механическом рассмотрении.*

Для этих же систем выполнена процедура нормализации, получены классические нормальные формы Биркгофа-Густавсона и их квантовые аналоги. Для квантовых аналогов найдены решения уравнений Шредингера и получены формулы для энергетических спектров.

Из-за трудоемкости все расчеты проведены с использованием компьютерных систем символьно-численных вычислений REDUCE, Maple.

Проведено сравнение полученных спектров с аналогичными результатами, которые вычислены при помощи метода нормальных форм и обнаружено очень хорошее согласие результатов, вычисленных в обоих подходах.

Ключевые слова: метод Линдстедта-Пуанкаре, нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы со степенной нелинейностью, квантование, энергетический спектр.

I.N. BELYAEVA, N.A. CHEKANOV
Belgorod National Research University
N.N. CHEKANOVA
Kharkov Institute of Education and Science of the State Higher Educational Institution "University of Banking"

THE SOLUTION TO THE CLASSICAL EQUATIONS OF MOTION FOR THE ANHARMONIC OSCILLATORS WITH A POWER-LAW NONLINEARITY BASED ON THE OF LINDSTEDT-POINCARE METHOD AND THEIR QUANTIZATION IS

In this work, the Lindstedt-Poincaré method has found solutions of nonlinear ordinary differential equations with power nonlinearity, their quantization and energy spectra have been obtained. According to this method, the solution of nonlinear equations is sought in the form of an expansion by degrees of a certain parameter. The result is a system of coupled ordinary differential equations. All its solutions contain a quantity that plays the role of frequency and in solutions, except for limited terms, there are secular terms that grow infinitely in time. Therefore, the frequency itself is also represented as a parameter expansion, as a solution. The frequency is chosen so as to cancel secular terms. Using the law of energy conservation, the total energy of the systems under consideration is introduced into the solution. The result is a time-limited solution. For the so-obtained classical solutions, quantization is performed using the known Bohr-Sommerfeld rule and the energy spectra of each system are determined by their quantum mechanical consideration.

For the same systems the normalization procedure is performed, classical normal forms of Birkhoff-Gustavson and their quantum analogues are obtained. For the quantum analogues of the solution of Schrödinger equations and the formulas for the energy spectra.

Because of the complexity of all calculations performed with standard computer systems symbolic-numeric computations REDUCE, Maple.

The spectra obtained are compared with similar results calculated using the normal form method and a very good agreement of the results calculated in both approaches is found. about

Because of the complexity of analytical transformations all calculations are carried out using computer systems, symbolic-numeric computations.

Keywords: Lindstedt-Poincare Method, ordinary differential equations with power nonlinearity, quantization, energy spectra.

Постановка проблемы

Хорошо известно, что большинство, особенно нелинейных дифференциальных уравнений не допускают решения в точном явном виде [1–5]. Поэтому разработаны различные приближенные, как аналитические [5, 6–15], так и численные методы [16] для нахождения решений дифференциальных уравнений. Одним из классических методов является метод Линдстедта-Пуанкаре, который в настоящей работе применяется к исследованию следующих нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$x'' + x + \alpha\,\mu \cdot x^{\mu-1} = 0, \tag{1}$$

где α – параметр, $\mu = 4, 6, 8$; штрихи означают вторую производную по времени.

Уравнение (1) при $\mu = 4$ описывает известное уравнение Дюффинга, а также одномерные гамильтоновы системы с функциями Гамильтона:

$$H_\mu = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right) + \alpha\, x^\mu = E,\ \mu = 4, 6, 8, \tag{2}$$

где $x(t)$, $p(t)$ – канонически сопряженные координата и импульс. Заметим, что функции Гамильтона (2) описывают ангармонические осцилляторы со степенной нелинейностью $\mu = 4, 6, 8$. Уравнение Дюффинга, ангармонические осцилляторы, достаточно часто используют в качестве тестовой модели для проверки различных приближенных методов, а также данные уравнения представляют и самостоятельный интерес.

Цель исследования

По методу Линдстедта-Пуанкаре найти решения уравнений (1), выполнить квантование полученных классических траекторий (найти допустимые значения энергии E, то есть энергетический спектр). Для функций Гамильтона (2) найти классическую нормальную форму. построить квантовый аналог нормальной формы, с помощью которой также найти энергетический спектр. Провести сравнение спектров, полученных в обоих подходах квантования.

Изложение основного материала исследования

Основная идея метода Линдстедта-Пуанкаре заключается во введении новой независимой переменной:

$$t = \tau(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots), \tag{3}$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots$ – постоянные, которые можно выбрать таким образом, чтобы избавиться от секулярных членов.

Решение уравнения (1) следует искать в виде асимптотического ряда

$$x \equiv x(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau), \tag{4}$$

в котором все функции $x_k(\tau)$ являются периодическими с периодом $2\pi/\omega$, где $\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots$.

Далее перейдем в уравнении (1) к переменной τ. Тогда получаем:

$$\left(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots\right)^{-2} \frac{d^2x}{d\tau^2} + \omega^2 x = \varepsilon\, f\left(x, (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots)^{-1} \frac{dx}{d\tau}\right). \tag{5}$$

Обе части полученного уравнения разложим в ряд по степеням α. Затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра. Тогда получим рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_0'' + x_0 = 0, \\ x_1'' + 2x_0''\omega_1 + x_1 = -4\alpha x_0^3, \\ x_2'' + 2x_1''\omega_1 + \left(\omega_1^2 - 2\omega_2\right)x_0'' + x_2 = -12x_0^2 x_1, \\ x_3'' + 2x_2''\omega_1 + \left(\omega_1^2 + 2\omega_2\right)x_1'' + 2\left(\omega_3 + \omega_1\omega_2\right)x_0'' + x_3 = -12\left(x_0 x_1^2 + x_0^2 x_2\right), \end{cases} \tag{6}$$

в которой неизвестные числа $\omega_1, \omega_2, \ldots$ найдутся из условия отсутствия секулярных членов.

Первое уравнение данной системы (6) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \omega^2 x_0 = 0\,. \tag{7}$$

Решая его, находим $x_0(\tau) = a\cos\omega(\tau - \tau_0)$.

В поставленной задаче имеем следующие начальные условия:

$$x(0) = a\,,\ \dot{x}(0) = 0\,. \tag{8}$$

Исходя из которых, получаем решение: $x_0(\tau) = a\cos\omega\tau$.

Второе уравнение рассматриваемой системы (6) будет содержать функцию $f(x) = -12x_0^2 x_1$ и будет иметь следующий вид:

$$f\,\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \omega^2 x_1 = -2\,\omega_1\omega^2\,x_0 + f\left(x_0, \frac{dx_-}{d\tau}\right) \tag{9}$$

Функция f в правой части будет периодична по τ и иметь период $2\pi/\omega$. Разложим функцию f в ряд Фурье:

$$f\left(x_0, \frac{dx_0}{d\tau}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(f_{n1}\cos n\omega\tau + f_{n2}\sin n\omega\tau\right). \tag{10}$$

Очевидно, что второе уравнение системы (6) будет иметь периодическое решение в том случае, когда правая часть не содержит гармоник $\cos\omega\tau$ и $\sin n\omega\tau$. Следовательно, должны выполняться следующие условия:

$$-2\,\omega_1\,\omega^2 a + f_{n1}(a) = 0, \quad f_{n_2}(a) = 0. \tag{11}$$

Из условий (11) найдем a, ω_1. Далее можно найти $x_1(\tau)$. Затем из системы уравнений последовательно находим $x_0(\tau)$, $x_1(\tau)$, $x_2(\tau), \ldots$ решая второе уравнение системы (6) с начальными условиями $\dot{x}_1(0) = 0, x_1(0) = 0$.

В результате решения системы уравнений (6) для $\mu = 4$ получаем решение:

$$\begin{aligned} x_{\mu=4}(t) = A\cos(t - t_0) + \alpha\left(A\cos(t - t_0) + \frac{1}{8}A^3\cos(3(t - t_0))\right) + \\ + \alpha^2\left(A\cos(t - t_0) + \left(-\frac{21}{64}A^5 + \frac{3}{8}A^3\right)\cos(3(t - t_0)) + \frac{1}{64}A^5\cos(5(t - t_0))\right) + \\ + \alpha^3\left(A\cos(t - t_0) + \left(\frac{417}{512}A^7 - \frac{105}{64}A^5 + \frac{3}{4}A^3\right)\cos(3(t - t_0)) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{43}{512}A^7 + \frac{5}{64}A^5\right)\cos(5(t - t_0)) + \frac{1}{512}A^7\cos(7(t - t_0))\right) + \end{aligned}$$

$$+\alpha^4\left(\left(-\frac{7}{512}A^7-\frac{65}{4096}A^9\right)\cos(7(t-t_0))+\frac{1}{4096}A^9\cos(9(t-t_0))+\right.$$
$$+A\cos(t-t_0)+\left(\frac{2919}{512}A^7-\frac{7797}{4096}A^9+\frac{5}{4}A^3-\frac{315}{64}A^5\right)\cos(3(t-t_0))+$$
$$\left.+\left(\frac{15}{64}A^5-\frac{301}{512}A^7+\frac{335}{1024}A^9\right)\cos(5(t-t_0))\right)+\alpha^5\left(\frac{1}{32768}A^{11}\cos(11(t-t_0))+\right.$$
$$+\left(\frac{7}{128}A^7-\frac{585}{4096}A^9+\frac{2747}{32768}A^{11}\right)\cos(7(t-t_0))+\frac{1}{4096}A^9\cos(9(t-t_0))+A\cos(t-t_0)+$$
$$+\left(\frac{2919}{128}A^7-\frac{70173}{4096}A^9+\frac{15}{8}A^3-\frac{735}{64}A^5+\frac{136113}{32768}A^{11}\right)\cos(3(t-t_0))+$$
$$\left.+\left(\frac{35}{64}A^5-\frac{301}{128}A^7+\frac{3015}{1024}A^9-\frac{35853}{32768}A^{11}\right)\cos(5(t-t_0))\right)+\ldots \quad (12)$$

Используя найденную классическую траекторию (12) производим ее квантование при помощи условия квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{T}{4}}\left(x'(\tau)\right)^2 d\tau=n+\frac{1}{2}, \quad (13)$$

где T – период колебаний, $n=0,1,2,\ldots$.

Получаем уравнение относительно E. В результате находится энергетический спектр:

$$E_n^{(\mu=4)}=n+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\alpha\left(n^2+n+\frac{1}{4}\right)-\frac{51}{8}\alpha^2\left(\frac{3}{2}n+n^2+\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)+$$
$$+\frac{375}{16}\alpha^3\left(n^4+2n^3+\frac{1}{2}n+\frac{1}{16}\right)-\frac{10689}{2048}\alpha^4\left(32n^5+48n^4+48n^3+24n^2+6n+1\right)+$$
$$+\alpha^5\left(\frac{87549}{64}n^6+\frac{267647}{64}n^5+\frac{1313235}{356}n^4+\frac{437745}{128}n^3+\frac{1313235}{1024}n^2+\frac{262647}{1024}n+\frac{87549}{4096}\right)-$$
$$-\alpha^6\left(\frac{3132399}{256}n^7+\frac{21926793}{512}n^6+\frac{65780379}{1024}n^5+\frac{109633965}{2048}n^4+\frac{109633965}{4096}n^3+\frac{65780379}{8192}n^2+\right.$$
$$\left.+\frac{21926793}{16384}n+\frac{3132399}{32768}\right)+\alpha^7\left(\frac{238225977}{2048}n^8+\frac{238225977}{512}n^7+\frac{1667581839}{2048}n^6+\frac{16677581839}{2048}n^5+\frac{8337909195}{16384}n^4+\right.$$
$$\left.+\frac{1667581839}{8192}n^3+\frac{16677581839}{32768}n^2+\frac{238225977}{32768}n+\frac{238225977}{524288}\right). \quad (14)$$

Полученные значения энергетических уровней $E_n^{\mu=4}$ (14) сравниваются с решением этого уравнения методом нормальных форм Биркгофа-Густавсона E_{B-G}, вычисленным в работе [17], а также с решением этой же задачи группой индийских математиков [18]. Сравнение результатов для $\mu=4$ при $\alpha=0{,}001$ приведено в табл. 1. Погрешности относительно результатов работы [18] вычисляются по формулам: $\varepsilon[LINDA]=\dfrac{E_n^{\mu=4}}{E_{Banerjee}}100\%$, $\varepsilon[B-G]=\dfrac{E_{B-G}}{E_{Banerjee}}100\%$. Полученные формулы для энергетических спектров, найденные методом нормальных форм и на основе метода Линдстедта-Пуанкаре полностью совпадают до седьмого порядка по параметру α.

Таблица 1

Сравнение результатов энергетического спектра $E_n^{\mu=4}$ ангармонического осциллятора со степенной нелинейностью (2) для $\mu = 4$ при $\alpha = 0{,}001$, который был вычислен на основе метода Линдстедта-Пуанкаре с результатами E_{B-G}, найденными с использованием нормальных форм Биркгофа-Густавсона [17], а также с известными результатами $E_{Banerjee}$, вычисленными в работе Banerjee [18]

№	$E_n^{\mu=4}$	E_{B-G}	$E_{Banerjee}$	ε_{LINDA},%	ε_{B-G},%
0	1,0007489	1,0007484	1,0007486	0,0000299	0,000027
1	3,0033678	3,0037389	3,0037397	0,0123793	0,000027
2	5,0093420	5,0097105	5,0097118	0,0073811	0,000027
3	7,0182847	7,0186507	7,0186525	0,0052394	0,000027
4	9,0301837	9,0305471	9,0305495	0,0040504	0,000026
5	11,0450267	11,0453877	11,0453905	0,0032936	0,000026
6	13,0628016	13,0631602	13,0631635	0,0027700	0,000026
7	15,0834965	15,0838527	15,0838565	0,0005961	0,000025
8	17,1070996	17,1074534	17,1074577	0,0020928	0,000025
9	19,1335992	19,1339507	19,1339554	0,0018614	0,000025
10	21,1629837	21,1633329	21,1633381	0,0016745	0,000024

Выводы

Показано, что метод Линдстедта-Пуанкаре можно успешно применить для нахождения решений нелинейных классических уравнений движения и последующего квантования полученных таким образом классических траекторий для нахождения энергетического спектра соответствующей квантовой системы.

Список использованной литературы

1. Борисов А.В. Современные методы теории интегрируемых систем / А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 296 с.
2. Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, М.В. Федорюк // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. – 1969. – –5-73 с.
3. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли / А.М. Переломов. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
4. Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 2013. – 596 с.
6. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1978. – 457 с.
7. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / Г.Е.О. Джакалья. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
8. Красильников П.С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний / П.С. Красильников. М. – Ижевск.: АНО НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2015. – 528 с
9. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды в трех томах. Т. 1 / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1971. – 772 с.
10. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды в трех томах. Т. 2 / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1972. – 998 с.
11. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
12. Найфе А. Методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1976, – 456 с.

13. Найфе А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
14. Власова Е.А. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 700 с.
15. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний / В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1977, – 260 с.
16. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978, – 512с.
17. Chekanov N.A. A symbolic-numeric approach for solving the eigenvalue problem for the one-dimensional Shroedinger equation / N.A. Chekanov, I.N. Belyaeva, A.A. Gusev, V.A. Rostovtsev, S.I. Vinitsky // Lecture Notes in Computer Science. – 2006. – V. 4194. – P. 23-32.
18. Banerjee K. The anharmonic oscillator / K. Banerjee, S.P. Bhatnagar, V. Choudhry, S.S. Kanval // Proc. R. Soc. Lond., 1978. – A. 360. – P. 575-586.