

УДК 519.6

РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ ПРОЦЕДУР ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ, ЯКІ МАЮТЬ АБЕЛЕВІ ГРУПИ СИМЕТРІЙ СКІНЧЕННИХ ПОРЯДКІВ

Л. Мочурад

Національний університет “Львівська політехніка”,
навчально-науковий інститут підприємництва та перспективних технологій,
вул. Горбачевського, 18, Львів, 79044, e-mail: lesiamo@i.ua

Розглянуто особливості розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики з абелевими групами симетрій скінченних порядків. Вдосконалено загальну методику, яка ґрунтується на інтегральному зображенні шуканих розв'язків. Специфіку сформульованої проблеми враховано на підставі апарата теорії груп. Для підтвердження доречності розпаралелення означеної процедури проведено чисельні експерименти з використанням популярного програмного засобу *OpenMP*.

Ключові слова: рівняння Лапласа, абелева група симетрії, метод інтегральних рівнянь, паралельні алгоритми, багатоядерність процесора, програмний засіб *OpenMP*, схеми наближених обчислень.

1. ВСТУП

Серед крайових задач математичної фізики в \mathbf{R}^2 на розімкнених контурах можна виділити класи задач, які мають абелеві групи симетрій скінченних порядків. Це дає змогу суттєво вдосконалити метод інтегральних рівнянь, який традиційно застосовують у процесі теоретичного та чисельного дослідження таких задач. Реалізуючи основну ідею методу, визначають, яку групу симетрії має розглядувана проблема. Це дає змогу перейти від сукупної системи інтегральних рівнянь до послідовності N незалежних інтегральних рівнянь, заданих лише по одній із конгруентних складових межі, де N – порядок групи симетрії відповідної крайової задачі [1]. Загальним результатом такого підходу є уникнення числової нестійкості, яка може виникати в процесі розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь, що апроксимують відповідні системи інтегральних за непомірного збільшення їхніх розмірностей.

Суттєве спрощення алгоритму наближеного розв'язування плоскої задачі електростатики, підтвержене чисельними експериментами, опирається на доведення того факту, що наявна в поданні розв'язку адитивна стала, яка забезпечує обмеженість шуканого розв'язку на нескінченності, дорівнює середньому арифметичному граничних значень потенціалів на електродах [2].

Очевидним є створення передумов для розпаралелення процедури розв'язування початкової задачі. Для реалізації паралельних алгоритмів можна у паралельному режимі використовувати декілька комп'ютерів або звернутись до так званої багатопотоковості. Перший спосіб допомагає, обираючи різну кількість процесорів, досягати або максимальної ефективності їхнього завантаження, або ж збільшувати швидкість обчислень. Другий спосіб дає змогу використати сучасні архітектури багатоядерних процесорів. На їхній підставі, застосовуючи популярний сьогодні програмний засіб *OpenMP* [3], експериментально виявити усі переваги розглядуваного алгоритму розпаралелення.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо математичну модель, яка описує плоске електростатичне поле.

Нехай $L := \bigcup_{j=1}^{\nu} L_j$ – об'єднання скінченної кількості простих, гладких, незамкнених і обмежених дуг L_j на площині \mathbf{R}^2 ; $L_i \cap L_j = \emptyset$ за умови $i \neq j$ ($i, j = \overline{1, \nu}$). Головне завдання – необхідно знайти функцію $U(x) \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{L})$, яка задовольняє:

- двовимірне рівняння Лапласа

$$\Delta U(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{L}, \quad x = (x_1, x_2)^T; \quad (1)$$

- крайові умови

$$U(x) = C_j, \quad x \in L_j, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad (2)$$

де C_j – довільні постійні граничні значення потенціалу на L_j і такі, що $|C_j| < +\infty$, $j = \overline{1, \nu}$;

- умову обмеженості на нескінченності

$$U(\infty) = C. \quad (3)$$

Доведено [2], що задача (1)–(3) еквівалентна такому інтегральному рівнянню першого роду зі слабкою особливістю в ядрі

$$(\Psi\mu)(x) \equiv \int_L \Psi(x, y)\mu(y)ds_y = \hat{C}_j, \quad x \in L_j, \quad (j = \overline{1, \nu}). \quad (4)$$

Тут $\hat{C}_j := C_j - C$, $\Psi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$ – фундаментальний розв'язок рівняння

Лапласа, а $\mu(x) = \{\mu_i(x): x \in L_i; i = \overline{1, \nu}\}$ – сукупна “густина розподілу зарядів” на L .

3. ВРАХУВАННЯ НАЯВНОЇ СИМЕТРІЇ

Для більшості сучасних електронно-оптичних систем, – електростатичні поля, які вони створюють, є предметом досліджень, – характерною є наявність великої кількості складових “дуги” L . Тому для ефективного чисельного розв'язування інтегрального рівняння (4) доцільно виявити класи задач, які мають абелеві групи симетрії певного скінченного порядку. Це дає підстави скористатись апаратом теорії груп [4]. Варто також зауважити, що значення наявної у поданні розв'язку адитивної сталої C можна знаходити просто без додаткових складних обчислень за формулою [2]

$$C = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} C_j.$$

Процедура розщеплення початкового інтегрального рівняння (4), коротко кажучи, відбувається за такою схемою. Припустимо, що межа L у цілому володіє абелевою групою симетрії N -го порядку ($N \geq \nu$). Тоді, використовуючи апарат теорії груп, спочатку отримаємо еквівалентну (4) систему інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^N \Psi'_{ij} \mu'_j(x) = C'_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in L_i. \quad (5)$$

Тут зроблено перехід від базису $\{\mu_i(z), z \in L_i; i = \overline{1, N}\}$ до базису $\{\mu'_j(x), x \in L_i; j = \overline{1, N}\}$ так, що $L_i \ni z = \tau^{-1}x$, причому $\tau \in \{\tau_j\}_{j=1}^N$ – елементи запроваджені групи перетворень N -го порядку, Ψ'_{ij} – звуження i -ї складової інтегрального оператора Ψ на $\mu'_j(x)$, а C'_i – узгоджені з поділом L на конгруентні складові граничні значення потенціалу.

Далі, використовуючи перетворення Фур'є, систему (5) зводимо до послідовності N незалежних інтегральних рівнянь, де інтегрування відбувається лише за конгруентною складовою L_1 межі L

$$\Psi_i \bar{\mu}'_j(x) = \bar{C}'_i, \quad x \in L_1, \quad i = \overline{1, N}, \quad (6)$$

де $\Psi_i := \sum_{k,m=1}^N F_{ik} \Psi'_{km} F_{mi}^{-1}$, $\bar{\mu}'_j(x) := \sum_{j=1}^N F_{ij} \mu'_j(x)$, $\bar{C}'_i := \sum_{j=1}^N F_{ij} C'_j$, $\|F_{ij}^{-1}\|_{i,j=1}^N$ – матриця

оберненого перетворення Фур'є. Таке перетворення забезпечує більшу стійкість процедури знаходження наближених розв'язків рівняння (4). Зменшується об'єм оперативної пам'яті комп'ютера при формуванні системи лінійних алгебричних рівнянь, яка апроксимує відповідне інтегральне рівняння, в N^2 разів. Отримавши N незалежних інтегральних рівнянь (6), створюються усі передумови до розпаралелення процесу розв'язування задачі в цілому.

4. ВИКОРИСТАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ КОМП'ЮТЕРІВ

Відомо, що одним із способів реалізації паралельних алгоритмів є використання багатопроекторних обчислювальних комплексів. Схема наближеного розв'язування одного інтегрального рівняння, в загальних рисах, полягає передусім у формуванні матриці системи лінійних алгебричних рівнянь, що апроксимує відповідний інтегральний оператор, і подальшому розв'язуванні отриманої системи. Систему розв'язуємо методом Гауса. За таких умов, використовуючи N процесорів ($p = N$), розв'язок N алгебричних систем, які апроксимують N незалежних інтегральних рівнянь, методом Гауса можна отримати за $T_p = M^3$ часових тактів, де M – кількість точок колокації, обраних на контурі інтегрування. Легко бачити, що у цьому разі коефіцієнт прискорення $R_p = N$, а коефіцієнт ефективності розпаралелення $E_p = 1$. Отже, використовуючи N процесорів для розв'язування N незалежних інтегральних рівнянь, ми досягаємо максимальної ефективності розпаралелення.

Для прискорення процесу розв'язування N рівнянь, враховуючи специфіку методу колокації, можна збільшити кількість процесорів до $p = NM^2$. Тоді $T_p = 3M$ – кількість часових тактів потрібних для розв'язування N алгебричних систем, які апроксимують N інтегральних рівнянь, на NM^2 процесорах методом Гауса. Далі легко бачити, що

$$R_p = \frac{NM^3}{3M} = \frac{NM^2}{3}, \quad \text{а} \quad E_p = \frac{NM^2}{3NM^2} = \frac{1}{3}.$$

Отже, збільшуючи кількість процесорів, ми прискорюємо процес розв'язування N незалежних інтегральних рівнянь. У цьому разі зменшується коефіцієнт завантаження. Отож, для найшвидшого отримання розв'язку в цілому,

незалежно від ефективності використання процесорів E_p та їхньої кількості p , треба максимізувати коефіцієнт прискорення R_p .

5. ПАРАЛЕЛЬНІ ОБЧИСЛЕННЯ НА БАГАТОЯДЕРНИХ ПЕРСОНАЛЬНИХ КОМП'ЮТЕРАХ

Сьогодні для більшості персональних комп'ютерів характерна наявність багатоядерних процесорів. Найпопулярніший засіб паралельного програмування на багатоядерних комп'ютерах із загальною пам'яттю – програмний засіб *OpenMP*. За його допомогою можна розпаралелити виконання програми так, що за наявності декількох ядер вона буде реалізована окремими потоками. У цьому випадку не потрібно описувати обмін інформацією.

У розглядуваному випадку, тобто при чисельному розв'язуванні крайової задачі теорії потенціалу з абелевою групою симетрії N -го порядку, отримано N незалежних інтегральних рівнянь (6). Для зменшення витрат комп'ютерного часу доцільно використовувати розпаралелення програми чисельного розв'язування (6) шляхом одночасного розв'язування відповідних інтегральних рівнянь у незалежних потоках. Кількість ядер може не збігатись з кількістю потоків, на які розпаралелюється програма. Зауважимо, що на однопроцесорних комп'ютерах паралельна програма виконується одним потоком.

Для проведення експериментів розглянуто задачі знаходження електростатичних полів плоских електронно-оптичних систем (ЕОС), зображених на рис. 1 - 4. Вони відображають класи задач з абелевими групами симетрій другого, четвертого, восьмого та шістнадцятого порядків.

Чисельні дослідження проведено на комп'ютерах різної конфігурації з різною кількістю ядер. Кількості рівнянь два відповідає рис. 1, чотири – рис. 2, вісім – рис. 3, шістнадцять – рис. 4. Час розв'язування подано в мікросекундах, M – кількість точок колокації. Використовуючи стандарт *OpenMP*, програмування реалізовано на мові C++. Результати обчислень наводимо далі.

1. Програми виконуються на комп'ютері з одноядерним процесором. Конфігурація системи: ADM Athlon(tm) XP 1700 + з 1.00 GB оперативної пам'яті та тактовою частотою процесора 1.46 GHz.

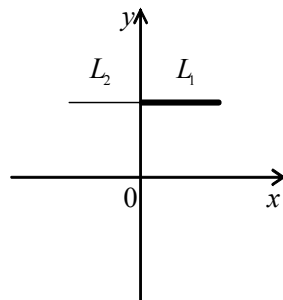


Рис. 1. ЕОС зі симетрією другого порядку

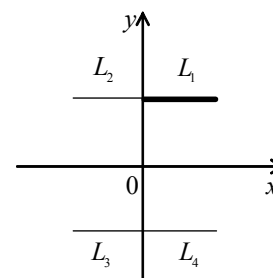


Рис. 2. ЕОС зі симетрією четвертого порядку

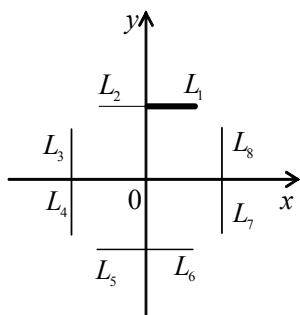


Рис. 3. ЕОС зі симетрією восьмого порядку

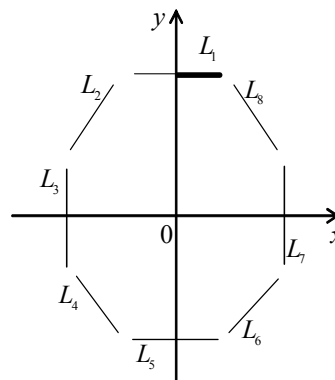


Рис. 4. ЕОС зі симетрією шістнадцятого порядку

Результати першого експерименту засвідчують, що на комп'ютері з одноядерним процесором час розв'язування задачі за програмою з застосуванням *OpenMP* не суттєво відрізняється від часу розв'язування без його використання, оскільки тут програмно відтворюються два, чотири, вісім, шістнадцять потоків, тоді як фізично комп'ютер має одне ядро (табл. 1).

Таблиця 1

Час виконання на одноядерному процесорі

| M | К-сть рівнянь | К-сть потоків | Час викон., мс | M | К-сть рівнянь | К-сть потоків | Час викон., мс |
|-----|---------------|---------------|----------------|-----|---------------|---------------|----------------|
| 250 | 2 | 1 | 341 | 500 | 2 | 1 | 2283 |
| | | 2 | 330 | | | 2 | 2283 |
| | 4 | 1 | 671 | | 4 | 1 | 4557 |
| | | 2 | 671 | | | 2 | 4546 |
| | | 4 | 661 | | | 4 | 4536 |
| | 8 | 1 | 1332 | | 8 | 1 | 9103 |
| | | 2 | 1322 | | | 2 | 9093 |
| | | 4 | 1322 | | | 4 | 9083 |
| | | 8 | 1332 | | | 8 | 9063 |
| | 16 | 1 | 2664 | | 16 | 1 | 18216 |
| | | 2 | 2663 | | | 2 | 18226 |
| | | 4 | 2654 | | | 4 | 18256 |
| | | 8 | 2664 | | | 8 | 18687 |
| | | 16 | 2674 | | | 16 | 18467 |

2. Програми виконуються на комп'ютері з двоядерним процесором. Конфігурація системи: Intel Core 2 Duo з 2.00 GB оперативної пам'яті та тактовою частотою процесора 3.00 GHz.

Таблиця 2

Час виконання на двоядерному процесорі

| M | К-сть рівнянь | К-сть потоків | Час викон., мс | M | К-сть рівнянь | К-сть потоків | Час викон., мс |
|-----|---------------|---------------|----------------|-----|---------------|---------------|----------------|
| 250 | 2 | 1 | 94 | 500 | 2 | 1 | 407 |
| | | 2 | 47 | | | 2 | 203 |
| | 4 | 1 | 187 | | 4 | 1 | 797 |
| | | 2 | 94 | | | 2 | 406 |
| | | 4 | 94 | | | 4 | 422 |
| | 8 | 1 | 375 | | 8 | 1 | 1625 |
| | | 2 | 188 | | | 2 | 844 |
| | | 4 | 187 | | | 4 | 844 |
| | | 8 | 188 | | | 8 | 828 |
| | 16 | 1 | 718 | | 16 | 1 | 3266 |
| | | 2 | 375 | | | 2 | 1672 |
| | | 4 | 375 | | | 4 | 1719 |
| | | 8 | 390 | | | 8 | 1688 |
| | | 16 | 375 | | | 16 | 1672 |

Таблиця 3

Час виконання на чотириядерному процесорі

| M | К-сть рівнянь | К-сть потоків | Час викон., мс | M | К-сть рівнянь | К-сть потоків | Час викон., мс |
|-----|---------------|---------------|----------------|-----|---------------|---------------|----------------|
| 250 | 2 | 1 | 47 | 500 | 2 | 1 | 249 |
| | | 2 | 31 | | | 2 | 141 |
| | 4 | 1 | 94 | | 4 | 1 | 483 |
| | | 2 | 62 | | | 2 | 250 |
| | | 4 | 23 | | | 4 | 122 |
| | 8 | 1 | 202 | | 8 | 1 | 983 |
| | | 2 | 141 | | | 2 | 546 |
| | | 4 | 54 | | | 4 | 248 |
| | | 8 | 54 | | | 8 | 242 |
| | 16 | 1 | 421 | | 16 | 1 | 1966 |
| | | 2 | 219 | | | 2 | 1045 |
| | | 4 | 105 | | | 4 | 500 |
| | | 8 | 106 | | | 8 | 500 |
| | | 16 | 105 | | | 16 | 503 |

Результати другого експерименту переконують, що час розв'язування задачі за паралельною програмою на комп'ютері з двоядерним процесором приблизно вдвічі зменшується порівняно з часом розв'язування за звичайною програмою. Часова оцінка у випадку збігання кількості потоків і кількості ядер мало відрізняється від часової оцінки, яку отримують, збільшуючи кількість потоків за умов незмінної

кількості розв'язуваних рівнянь. Це пояснюється тим, що фізично процесор залишається двоядерним.

3. Програми виконуються на комп'ютері з чотириядерним процесором. Конфігурація системи: Intel Core i5 з 4.00 GB оперативної пам'яті та тактовою частотою процесора 3.2 GHz.

За результатами третього експерименту час розв'язування задачі за паралельною програмою на комп'ютері з чотириядерним процесором приблизно в чотири рази зменшується порівняно з часом розв'язування за звичайною програмою. Очевидно, що зі збільшенням кількості ядер, ці показники будуть поліпшуватись. Отже, використання багатоядерності персонального комп'ютера доцільне для розв'язування задач великих розмірностей, щоб ефективніше затратити комп'ютерний час на їхнє виконання.

6. ВИСНОВОК

Проведено аналіз розпаралелення процедур чисельного розв'язування крайових задач теорії потенціалу з абелевими групами симетрій різних скінченних порядків. Проведені дослідження демонструють можливість ефективного використання багатоядерності персонального комп'ютера для розв'язування задач великого об'єму обчислень. Час розв'язування задачі на багатоядерних персональних комп'ютерах, у тім числі на багатопроцесорних системах з загальною пам'яттю, значно скорочується при автоматичному розпаралелюванні програм за допомогою інтерфейсу *OpenMP*.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Захаров Е.В.* Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала / Е.В. Захаров, С.И. Сафронов, Р.П. Тарасов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1992. – Т. 32, № 1. – С. 40–58.
2. *Mochurad L.I.* Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 98–110.
3. *Voss M.J.* OpenMP share memory parallel programming / M.J. Voss. – Toronto, Canada, 2003. – 270 p.
4. *Сеpp Ж.-П.* Линейные представления конечных групп / Ж.-П. Сеpp. – М.: РХД, 2003. – 132 с.
5. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики / В.П. Ильин. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
6. *Mochurad L.I.* Maximal using of specifics of some boundary problems in potential theory after their numerical analysis / L.I. Mochurad, Y.S. Harasym, B.A. Ostudin // International Journal of Computing. – 2009. – Vol. 8, № 2. – P. 149–156.

Стаття: надійшла до редколегії 1.10.2012

доопрацьована 14.11.2012

прийнята до друку 05.12.2012

**РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ПРОЦЕДУР ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ, ОБЛАДАЮЩИХ АБЕЛЕВЫМИ
ГРУППАМИ СИММЕТРИИ КОНЕЧНЫХ ПОРЯДКОВ**

Л. Мочурад

*Национальный университет “Львовская политехника”,
учебно-научный институт предпринимательства и перспективных технологий,
ул. Горбачевского, 18, Львов, 79044, e-mail: lesiamo@i.ua*

Рассмотрено особенности распараллеливания процедур численного решения задач плоской электростатики с абелевыми группами симметрии конечных порядков. Усовершенствована общая методика, основанная на интегральном представлении искомых решений. Для подтверждения целесообразности распараллеливания указанной процедуры выполнены численные эксперименты с использованием популярного программного средства *OpenMP*.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, абелева группа симметрии, метод интегральных уравнений, параллельные алгоритмы, многоядерность процессора, программное средство *OpenMP*, схемы приближенных вычислений.

**PARALLELIZATION OF PROCEDURES FOR NUMERICAL SOLUTION OF
THE PLANE ELECTROSTATICS PROBLEMS WITH ABELIAN GROUP OF
SYMMETRY OF FINITE ORDER**

L. Mochurad

*National University “Lviv Polytechnic”,
Academic Institute of Enterprise and Perspective Technologies,
Horbachevskoho Str., 18, L’viv, 79044, e-mail: lesiamo@i.ua*

The peculiarities of parallelization of the procedures for plane electrostatics problems with abelian group of symmetries solution were considered. The general method based on integral representation of desired solutions was improved. Specificity of the problem was taken into account by use of group theory apparatus. The number of numerical experiments was realized with the help of the most popular means of *OpenMP*.

Key words: Laplace equation, abelian group of symmetry, integral equation method, parallel algorithms, multi-core processors, software *OpenMP*, numerical experiments.