

2. Бочаров Б.П. Математическая модель распределения учебной литературы. // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – №2. – С.100-105.
3. Воронов А.А., Кондратьев Г.А., Чистяков Ю.В. Теоретические основы построения автоматизированных систем управления. – М.: Наука, 1977. – 208 с.
4. Броди С.М., Погосян Н.А. Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания – К.: Наукова Думка 1973. – 126 с.
5. Дригайло В.Г., Башун Е.В., Вольнец В.Н. Основы управления библиотекой высшего учебного заведения. – К.: Политехника, 2001. – 239 с.

УДК 532:595

## МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ ТРУБОПРОВОДУ З ШВИДКІСНОЮ ТЕЧІЄЮ РІДИНИ ПРИ РІЗНИХ СПОСОБАХ ЗАКРІПЛЕННЯ

Доктор фізико-математичних наук Гавриленко В.В.,  
доктор технічних наук Лимарченко О.С.,  
Ковальчук О.П.

*Розглянуто задачу нелінійної динаміки трубопроводу з рідиною. Трубопроводи з рідиною є складовою багатьох інженерних систем. Ми розглядаємо трубопровід при різних закріпленнях який перебуває під дією швидкісної течії рідини. Коли швидкість рідини наближається до критичної, енергія рідини може перерозподілитись, і тоді коливання трубопроводу можуть збільшитись. Це може призвести інколи і до руйнування трубопроводу.*

*The task of nonlinear dynamics of pipeline is considered with a liquid Pipelines with a liquid are the constituent of many engineering systems. We examine a pipeline at the different fixings which is under the action of speed flow of liquid. When speed of liquid approaches critical, energy of liquid can redistribute, then vibrations of pipeline can increase. Sometimes this can results in destruction of pipeline.*

### Постановка задачі.

Розглядається багатокомпонентна система, яка складається з пружної труби і рідини, яка в ній тече. Вважаємо, що рух рідини заданий, рідина ідеальна, а труба буде розглядатись на основі балочної моделі. Також будемо вважати, що труба є достатньо довгою по відношенню до її діаметру. Важливо відмітити, що якщо початкові збурення в системі лежать в одній площині, то і в подальшому рух системи буде відбуватись тільки в цій площині. Поперечні коливання описуються змінною  $u(t, x)$ ,  $x=0$  і  $x=l$ , де  $x$  – поздовжня координата;  $t$  – час.

Метою цієї статті є дослідження поведінки трубопроводу при швидкісній течії на основі нелінійної моделі, побудова якої базується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Важливим моментом є те, що вихідна система для випадку нелінійної моделі вимагає мішаного опису її компонент. Оскільки рідина має бути описана в змінних Ейлера, а трубопровід в змінних Лагранжа, то функція Лагранжа для варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \mu \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \\
 & - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EF \int_0^l u'^3 u dx + \frac{1}{4} \rho V^2 \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \\
 & - \frac{1}{16} \rho V^2 \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left( \frac{du}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \rho \int_0^l \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \\
 & + \rho V \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} dx + \frac{1}{2} PF \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^l dx.
 \end{aligned}$$

Так як динамічна модель базується на основі сукупного використання принципу Гамільтона-Остроградського та методу модальної декомпозиції, то для подальшого спрощення моделі скористаємось методом представлення розв'язку через форми коливань

$$u = \sum_i c_i(t) A_i(x),$$

де  $c_i(t)$  – амплітудні параметри коливань, що залежать від часу;  $A_i(x)$  – форми коливань, які є повною ортогональною системою функцій.

Розглядається нелінійна динамічна модель яка запропонована в роботі [1].

$$\begin{aligned} \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) \\ & - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 - \\ & - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left( d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\ & - \frac{2EF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^3 - \frac{1}{2N_r} \sum_{pj k} c_j c_k \left( -\frac{EJ}{(\rho + \mu)} \kappa_p^4 c_p + \right. \\ & \left. + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{pi}^1 - \beta_{ip}^1) - \right. \\ & \left. - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 \right) \end{aligned}$$

де  $EJ$  – згинна жорсткість балки;  $F$  – площа поперечного перерізу труби;  $\rho$  – лінійна густина рідини;  $\mu$  – лінійна густина матеріалу балки;  $P$  – внутрішній тиск у трубі;  $l$  – довжина балки.

В дискретну модель системи входять коефіцієнти, які визначаються через квадратури від функцій, які описують форми коливань системи

$$N_i = \int_0^l A_i^2 dx; \quad d_{ijkl}^2 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l' dx; \quad d_{ijkl}^6 = \int_0^l A_i'' A_j'' A_k'' A_l'' dx$$

$$d_{ijkl}^3 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l' dx; \quad d_{ijkl}^4 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l' dx;$$

$$\beta_{ij}^1 = \int_0^l A_i' A_j dx; \quad \beta_{ij}^2 = \int_0^l A_i' A_j' dx.$$

Дискретна модель системи представляє собою нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно амплітудних параметрів руху системи.

Для дослідження коливань трубопроводу при різних швидкісних режимах течії рідини, розглянемо чотири варіанти закріплень трубопроводу: консоль, консоль-шарнір, двобічна консоль, двобічний шарнір.

Маємо граничні умови, які відповідають постановці задачі про визначення форм коливань системи:

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ і } x=l \text{ відповідають шарнірному опираю;$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ і } x=l \text{ відповідають консольному защемленню;}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x=l \text{ відповідають вільному краю балки.}$$

**Чисельне моделювання.** Розглядається система трубопровід рідини при різних швидкостях течії  $V = 0,25V_{\text{крит}}$  (а),  $V = 0,5V_{\text{крит}}$  (б) і  $V = 0,75V_{\text{крит}}$  (в). Вважаємо що рух трубопроводу мав початкове збурення за законом  $c_2(0) = 0,02l$ .

Розглянемо випадок «шарнір-шарнір». Виконаємо розрахунки для труби з алюмінію довжиною 1м. На рисунку 1 а закон зміни амплітуди першої форми коливань подано тонкою кривою, другої – штриховою кривою, третьої – жирною кривою. На рисунку 1 б закон зміни амплітуди першої форми коливань подано штриховою кривою, другої – тонкою кривою, третьої – жирною кривою. На рисунку 1 в закон зміни амплітуди першої форми коливань подано тонкою кривою, другої – штриховою кривою, третьої – жирною кривою.

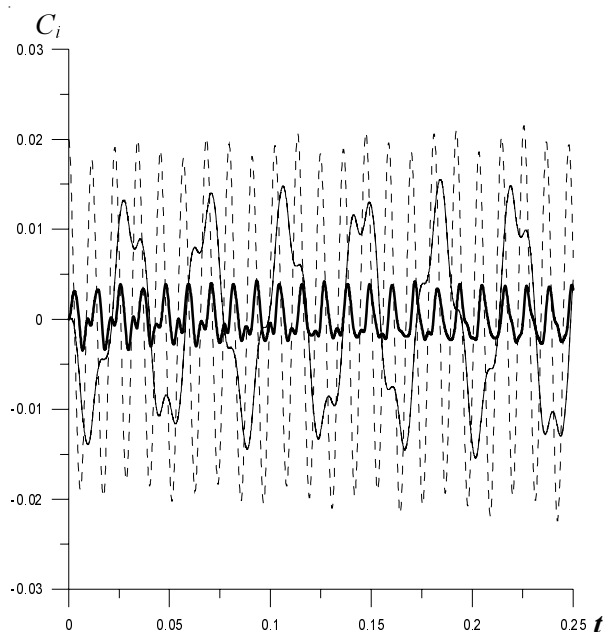


Рис 1 а

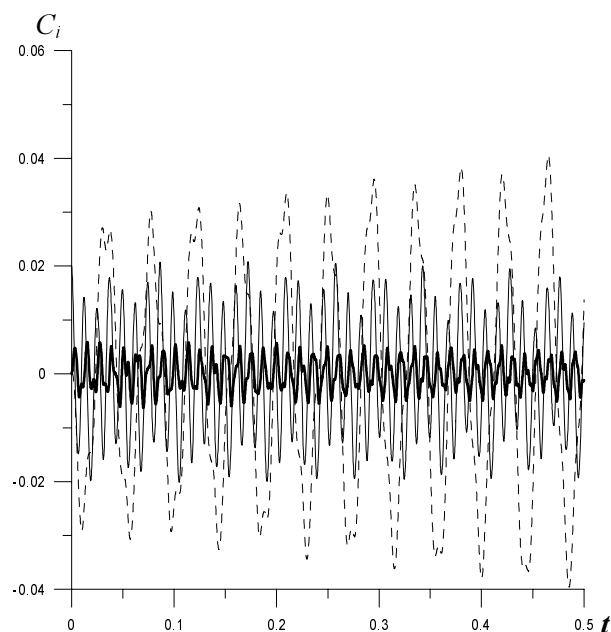


Рис 1 б

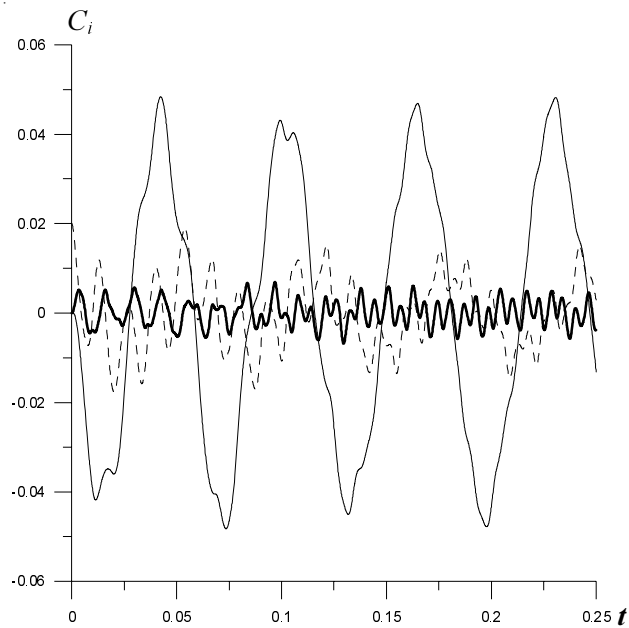


Рис 1 в

З рисунків видно, що при збільшенні швидкості течії рідини вказаний ефект перекачки енергії в амплітуду коливань першої форми стає все більш помітним. Подібні явища ми спостерігаємо і при дослідженні інших варіантів закріплення трубопроводу. Дослідження інших випадків закріплень показує, що такі загальні тенденції системи зберігаються і надалі, і найбільш небезпечними є швидкості течії, які перевищують половину критичної швидкості. Значення критичних швидкостей для таких способів закріплення відповідно будуть: консоль – вільний кінець — 20,9 м/с; консоль – консоль — 82,1 м/с; консоль – шарнір — 58,0 м/с; шарнір – шарнір — 54,4 м/с.

**Висновки.** Вирішальним у поведінці трубопроводу – рідини, незалежно від способу закріплення, є наближення швидкості течії рідини до критичної. При критичних швидкостях, що перевищують половину критичної швидкості, спостерігається цілеспрямований енергообмін в системі, який приводить до зростання початкових збурень в часі, який може привести до небезпечних ситуацій. Найбільш складно і з більшими амплітудами ці явища проявляються для закріплень з вільними кінцями.

### Література

1. Василевский Ю.Е., Лимарченко О.С. Нелинейная модель динамики трубопровода при скоростном течении жидкости // Комплексний аналіз і течії з вільними границями, Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ: Інститут математики НАН України. — 2006. — 2, № 4. — С. 322–334.
2. Бондарь Н.Г. Нелинейные автономные задачи механики упругих систем. – Киев, Будивельник, 1971. – 140 с.
3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики, том 2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.

УДК 539.3

## АНАЛІЗ АВТОКОЛИВАНЬ СКЛАДЕНИХ БУРИЛЬНИХ КОЛОН ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ СИЛ ТЕРТЯ КУЛОНА

Глушакова О.В.

*Розглянута проблема самозбудження крутильних коливань бурильних колон, складених із ланок з різними жорсткостями крутіння. Проведені дослідження основних закономірностей самозбудження і протікання цих коливань. Виведені рівняння дифракції хвиль крутіння в точках стику ланок колони з різними жорсткостями. Встановлено, що форми автоколивань реалізуються по сценаріям релаксаційних автоколивань.*

*The problem of torsion vibration self-excitation of drill strings combined from tubular segments with differing torsion stiffness is considered. The analysis of principal regularities of self-excitation and realization of those*