

**УДК 514. 18**

**Лігницький С. І., аспірант, Пугачов Є. В., д.т.н., професор**

(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

**НАБЛИЖЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ РЕБРА ЗВОРОТУ ТОРСОВОЇ ПОВЕРХНІ, ПРЕДСТАВЛЕНОЇ ДИСКРЕТНИМ КАРКАСОМ ТВІРНИХ**

**Розроблений алгоритм наближеного визначення ребра звороту торсової поверхні, представленої дискретним каркасом твірних.**

**Проаналізована величина відхилення точок апроксимуючого ребра звороту від дійсних.**

**Ключові слова:** дотична, ребро звороту торсової поверхні, твірна.

**Нехай торсова поверхня** представлена дискретним каркасом твірних, а саме, заданий тільки впорядкований ряд їх направляючих векторів. Відсутність інформації про ребро звороту дозволяє визначити координати точок поверхні вздовж твірних, але робить неможливим отримати проміжні твірні і розгортку поверхні. Якщо на заданих твірних з деяким наближенням вдасться отримати координати точок ребра звороту, то в результаті ми отримаємо дискретно представлене апроксимуюче ребро звороту. Методи дискретної інтерполяції дозволять загустити точковий ряд ребра звороту до необхідної точності [3] і, як наслідок, отримати проміжні твірні. Також, залежно від поставлених задач, через цей точковий ряд можна провести відповідний сплайн і отримати рівняння апроксимуючої торсової поверхні.

**Наскільки відомо авторам з літературних джерел,** досі це питання в такому аспекті ніким не розглядалося.

**В роботі поставлено мету** – розробити алгоритм наближеного визначення ребра звороту торсової поверхні, представленої дискретним каркасом твірних, і оцінити його точність на прикладі різних торсових поверхонь.

**Відстань між точками** ребра звороту, які лежать на сусідніх твірних, є невеликою. А найкоротшою відстанню між цими твірними є довжина їхніх спільних перпендикулярів. Тому точки апроксимуючого дискретно представленого ребра звороту було вирішено шукати біля кінців спільних перпендикулярів, побудованих між сусідніми твірними.

Алгоритм наближеного визначення ребра звороту торсової поверхні, представленої каркасом твірних, складається з наступних дій.

1. На кожній парі суміжних твірних  $t_1$  і  $t_2, \dots, t_3$  і  $t_4$  (рис. 1) визначаємо координати пари точок – кінці спільних перпендикулярів  $a_1$  і  $a_2, \dots, c_1$  і  $c_2$  цих твірних. З'єднуємо кожену пару точок прямою і визначаємо координати середини цих відрізків  $a_{\text{сеп}}, b_{\text{сеп}}$  і  $c_{\text{сеп}}$ .

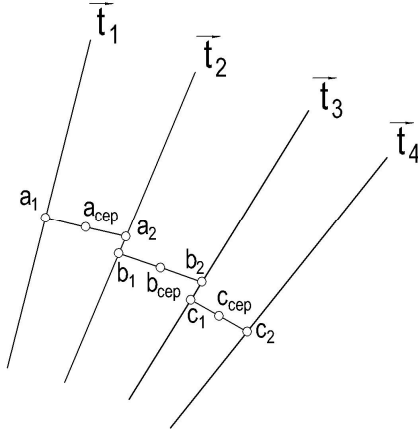


Рис. 1. До визначення координат середин відрізків спільних перпендикулярів між суміжними твірними

2. З'єднуємо середини двох сусідніх відрізків  $a_1a_2, \dots, d_1d_2$  (рис. 2), отриманих в пункті 1, прямими лініями. Таким чином, в побудові відрізка  $a_{\text{сеп}}b_{\text{сеп}}, \dots, c_{\text{сеп}}d_{\text{сеп}}$  беруть участь три твірні. Визначаємо координати точок, в яких перпендикуляри, опущені з цих ліній на середню з трійки твірних, перетинають цю твірну. Місця перетинання перпендикулярів з відповідними твірними і будуть точками  $A_1, A_2, A_3$  апроксимуючого ребра звороту торсової поверхні.

3. Дії, описані в пунктах 1 і 2, не дозволяють визначити точки апроксимуючого ребра звороту, які лежать на крайніх твірних торсової поверхні. Для отримання відсутніх координат точок можна скористатися методом скінчених різниць [2]. Нехай  $x_k = x_0 + k \cdot h$ , де  $k$  – ціле,  $h > 0$ ,  $f_k = f \cdot (x_k)$ . Величина

$$\Delta f_k = f \cdot (x_k + h) - f \cdot (x_k) = f \cdot (x_{k+1}) - f \cdot (x_k) = f_{k+1} - f_k \quad (1)$$

називається скінченою різницею першого порядку функції  $f$  в точці  $x_k$  (з кроком  $h$ ). Скінчена різниця  $n$ -го порядку функції  $f$  в точці  $x_k$  визначається по рекурентній формулі

$$\Delta^n f_k = \Delta(\Delta^{n-1} f_k) = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k, \quad (2)$$

де  $n \geq 1$ ,  $\Delta^0 f_k = f_k$ .

Комп'ютерні експерименти показали, що найкраще використовувати скінченні різниці п'ятого порядку.

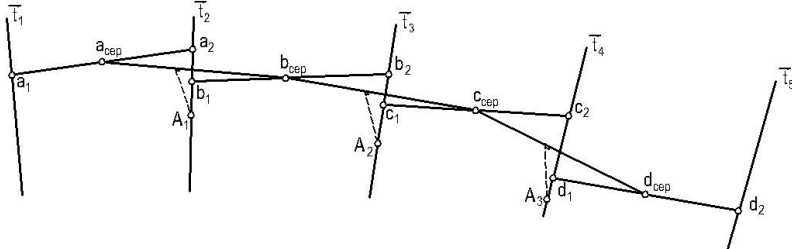


Рис. 2. До визначення координат точок апроксимуючого ребра звороту торсової поверхні

Використання формули (2) дозволяє досить точно отримати крайні точки наближеного ребра звороту, проте вони не лежать на крайніх твірних. Тому опускаємо перпендикуляри з цих точок на відповідні твірні. Місця перетину цих перпендикулярів з крайніми твірними і будуть координатами крайніх точок апроксимуючого ребра звороту.

4. Задані твірні є геометричним місцем дотичних до свого ребра звороту [1]. Якщо побудувати дотичні до апроксимуючого дискретно представленого ребра звороту, отриманого в пунктах 1-3, то вони не будуть збігатися з дійсними твірними, оскільки точки ребра звороту визначені з певним відхиленням від відповідних точок континуально заданого ребра звороту. Слід зауважити, що і координати дотичних до точок дискретно представлених кривих мають певне відхилення від дійсних значень. Проте координати апроксимуючих точок можна уточнити, зменшуючи кутове відхилення між дотичними для апроксимуючого дискретно представленого ребра звороту і заданими твірними шляхом переміщення точок апроксимуючого ребра звороту вздовж цих твірних.

В якості дотичної до дискретно представленної кривої приймаємо пряму, паралельну хорді, що з'єднує суміжні з  $i$ -ю вузлові точки (рис. 3). Координати точок апроксимуючого ребра звороту уточнюються з використанням дотичних лише до середніх точок.

Мінімізуємо функцію  $f_{\min}$ , яка є сумою кутових відхилень між дотичними до апроксимуючого дискретно представленого ребра звороту і заданими твірними:

$$f_{\min} = \sum \arccos \left( \frac{(x_{i+2} - x_i) \cdot X_{i+1} + (y_{i+2} - y_i) \cdot Y_{i+1} + (z_{i+2} - z_i) \cdot Z_{i+1}}{\sqrt{(x_{i+2} - x_i)^2 + (y_{i+2} - y_i)^2 + (z_{i+2} - z_i)^2} \cdot \sqrt{X_{i+1}^2 + Y_{i+1}^2 + Z_{i+1}^2}} \right); \quad (3)$$

$$i = \overline{1; k-2},$$

де  $X, Y, Z$  – координати напрямного вектора  $i$ -ї твірної;

$$x(v) = x_{p3} + \left( X / \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \right) \cdot v, \quad y(v) = y_{p3} + \left( Y / \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \right) \cdot v,$$

$z(v) = z_{p3} + \left( Z / \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \right) \cdot v$  – нові координати точок апроксимуючого ребра звороту торсової поверхні;

$x_{p3}, y_{p3}, z_{p3}$  – початкове наближення координат точок апроксимуючого ребра звороту торсової поверхні;

$v$  – відстань між початковими і новими координатами точок апроксимуючого ребра звороту торсової поверхні;

$k$  – кількість твірних.

Початковими параметрами координат точок ребра звороту є координати точок, отримані в пунктах 1-3. Функцію мінімізуємо двічі, накладаючи на початкові параметри лінійні обмеження: у першому випадку параметри мають лише додатне значення, в другому – від'ємне. Якщо хоча б один із розв'язків функції мінімізації є не нульовим значенням, то обираємо той випадок, в якому значення функції було меншим, і виконуємо пункт 5 розробленого алгоритму.

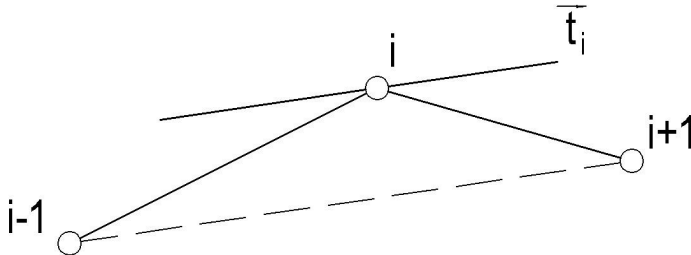


Рис. 3. До визначення дотичної до дискретно представленої кривої

5. Мінімізуємо функцію, яка є сумою кутових відхилень між дотичними до апроксимуючого дискретно представленого ребра звороту і заданими твірними. Початковими параметрами координат точок ребра звороту є координати точок, отримані у вибраному випадку пункту 4. Лінійні обмеження функції мінімізації відповідають обмеженням вибраним у пункті 4. Якщо значення функції пункту 5 менше за значення функції пункту 4, то надалі будемо порівнювати значення функції пункту 5, з цим меншим значенням. При цьому змінюємо початкові пара-

метри координат точок ребра звороту на щойно отримані. Описані в пункті 5 дії повторюємо доти, доки зменшуться значення функції цього пункту.

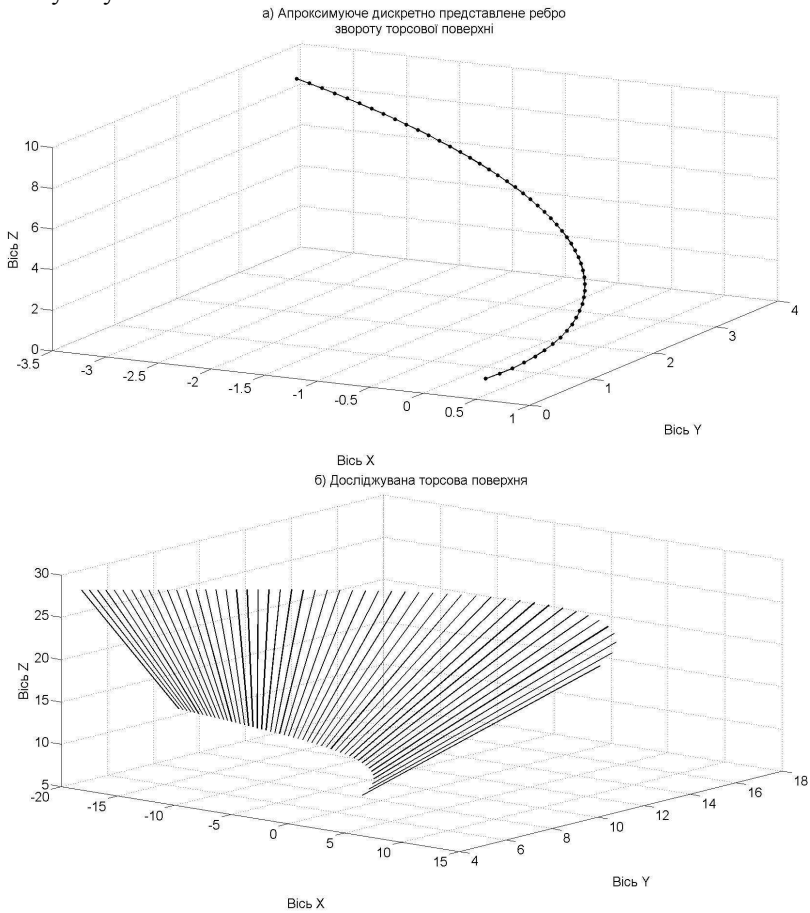


Рис. 4. Апроксимуюче дискретно представлене ребро звороту торсової поверхні (а) і досліджувана торсова поверхня (б)

Точність розробленого алгоритму була перевірена на десяти різних торсових поверхнях. При цьому поверхні задавалися континуально, після чого на них розбивався каркас твірних. На рис. 4, а продемонстровані результати роботи алгоритму на прикладі торсової поверхні, представленій каркасом твірних, ребро звороту якої описується рів-

няннями  $x = \sin(\pi/6) \cdot \cos(v) \cdot e^v$ ,  $y = \sin(\pi/6) \cdot \sin(v) \cdot e^v$ ,  $z = \cos(\pi/6) \cdot e^v$  (рис. 4, б).

Точність наближеного визначення точок ребра звороту торсової поверхні, представлені дискретним каркасом твірних, можна оцінити, обчисливши відстань між апроксимуючими і дійсними точками. На рис. 5 показана залежності згаданих відстаней від накопиченої довжини ламаної для кожної точки ребра звороту, отриманого для трьох різних поверхонь. Якщо за одиницю довжини прийняти  $1_m$ , то максимальна відстань для поверхні, наведеної на рис. 4, б, складе  $0,0078_m$ . Точність алгоритму залежить від значення кривини в точках ребра звороту та відстані між цими точками. Розроблений алгоритм не спрацьовує, якщо кривизна в точках дискретного ребра звороту після монотонного зростання починає спадати і навпаки. У таких випадках наведений алгоритм слід виконувати лише з першого по третій пункт.

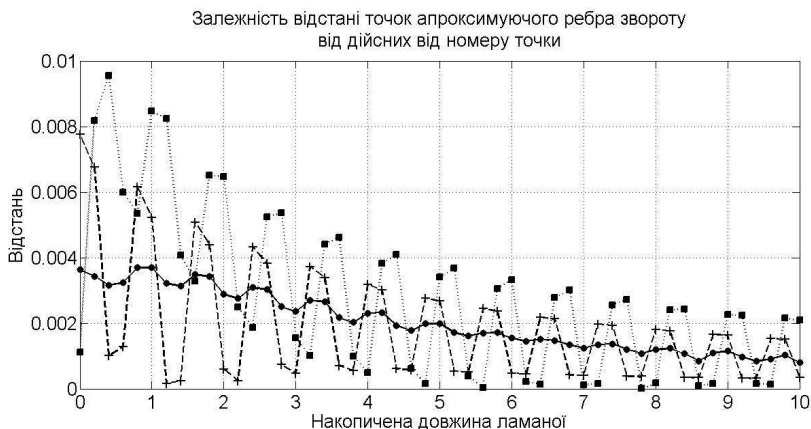


Рис. 5. Графік залежності відстані точок апроксимуючого ребра звороту від дійсних від номеру точки

**В статті розроблений алгоритм** наближеного визначення точок ребра звороту торсової поверхні, представлені дискретним каркасом твірних. В подальшому планується розробити алгоритм наближеного визначення твірних торсової поверхні, представлені дискретним каркасом точок.

1. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия / Выгодский М. Я. – Москва-Ленинград : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 511 с.
2. Волков Е. А. Численные методы: Учеб. пособие для ву-

зов / Волков Е. А. – 2-е изд., испр. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с. 3. Основы прикладной дискретной геометрии / Найдиш В. М., Верещага В. М., Найдиш А. М., Малкина В. М. – Мелітополь : Люкс, 2007 – 193 с.

Рецензент: д.т.н., професор Филипчук В. Л. (НУВГП)

---

**Litnitskyi S. I., Post-graduate Student, Puhachov Y. V., Doctor of Engineering, Professor** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

### **SPACE CURVE APPROXIMATE DEFINITION OF TANGENT DEVELOPABLE DESCRIBED BY DISCRETELY SET OF STRAIGHT LINES**

The algorithm of space curve approximate definition of tangent developable described by discretely set of straight lines is made. Points deviation value of approximate space curve tangent developable is analyzed.

**Keywords:** tangent, space curve tangent developable, generatrix straight line.

---

**Литницький С. І., аспірант, Пугачев Е. В., д.т.н., професор** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

### **ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕБРА ВОЗВРАТА ТОРСОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ ДИСКРЕТНЫМ КАРКАСОМ ОБРАЗУЮЩИХ**

Разработан алгоритм приближенного определения ребра возврата торсовой поверхности, представленной дискретным каркасом образующих. Проанализирована величина отклонения точек аппроксимирующего ребра возврата от действительных.

**Ключевые слова:** касательная, ребро возврата торсовой поверхности, образующая.

---