

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ
ВЛАГОСОДЕРЖАНИЯ В СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛАХ**

**Писаренко А.Н., к.ф.-м.н., доцент, Максименюк Я.А., к.т.н., доцент
Загинайло И.В., к.ф.-м.н., доцент**

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
Украина*

Энергопотребление зданиями и сооружениями составляет значительную долю от общегосударственного потребления энергии. Минимизация тепловых потерь требует учета архитектурного и конструктивного решений зданий, теплозащитных свойств ограждений, климатических условий районов строительства и поддерживаемых параметров внутреннего микроклимата. Однако, существующие методики по учету влажностного режима при расчете теплопередачи через ограждения [1], [2] не рассчитаны на исследование локальных процессов теплопереноса и влагонакопления в строительных материалах и конструкциях. Этим определяется актуальность вопросов численного расчета и анализа тепло- и массообменных процессов, протекающих в ограждающих конструкциях.

Выбор численного метода исследования температурных полей был обусловлен возможностью получения решения уравнения теплопроводности для несимметричного нагрева тел произвольной геометрии при сложных начальных и граничных условиях с зависящими от температуры теплофизическими свойствами.

Целью данной работы являлось моделирование и оценка интегрального влияния влагосодержания на характеристики одномерного нестационарного изотропного температурного поля в строительных материалах с изотропными и постоянными во времени теплофизическими параметрами.

Рассчитывался прогрев пластинки толщиной L (расстояние между изотермическими поверхностями с температурой $T = T_1$ и $T = T_2$ на краях) в течение времени t_0 . Начальная температура внутренней области пластинки принималась равной T_0 . Материал пластинки характеризовался объемным весом γ , влажностью ω и коэффициентом температуропроводности a .

Исследуемое тело разбивалось на расчетные элементы по координате X (координата направления, перпендикулярного границам области с $T = T_1$ и $T = T_2$) и времени t . Для расчетной сетки были введены следующие обозначения: $i = 1, \dots, N_X$ – номер узла сетки по направлению X ; $j = 1, \dots, N_t$ – номер узла сетки, связанный со временем t ; N_X – число узлов сетки по направлению X ; $N_t = \frac{t_0}{\Delta t}$ – число узлов сетки по времени t ;

$\Delta X = \frac{L}{N_X - 1}$ – шаг сетки по направлению X . Шаг интегрирования Δt определялся из условия устойчивости разностной схемы: $\Delta t < \frac{\Delta X^2}{2a}$ (в данной задаче полагалось $\Delta t = 0,4 \frac{\Delta X^2}{a}$).

Представление нестационарного уравнения теплопроводности с помощью конечных разностей позволяет записать выражение для температуры в узле i сетки [3]:

$$T_i' = T_i \left(1 - \frac{2a\Delta t}{\Delta X^2} \right) + \frac{a\Delta t}{\Delta X^2} (T_{i-1} + T_{i+1}), \quad (1)$$

где T_i , T_i' – значения температуры в моменты времени t и $t + \Delta t$, соответственно.

Краевые условия для данной задачи имеют вид: $T|_{i=1} = T_1$, $T|_{i=N_X} = T_2$, $T|_{t=0, 1 < i < N_X} = T_0$.

Для отображения особенностей распределения нестационарного температурного поля в образце введем относительный интервал времени $\epsilon_{ij} = \frac{t_j}{t_{xap}}$ (t_{xap} – характерное время прогрева [4]); относительную координату по X : $\epsilon_{Xi} = \frac{X_i}{L}$; относительную температуру $\epsilon_{Ti} = \frac{T_{Xi}}{T_1}$, где T_{Xi} – температура, соответствующая координате X ;

относительное изменение координаты x при сдвиге на шаг сетки по X : $\Delta \epsilon_{Xi} = \frac{X_{i+1} - X_i}{L}$; относительное изменение температуры при

сдвиге на шаг сетки по X : $\Delta \varepsilon_{Ti} = \frac{T_{Xi+1} - T_{Xi}}{T_1}$; локальный относитель-

ный градиент температуры по направлению X : $grad \varepsilon_{Ti} = \frac{\Delta \varepsilon_{Ti}}{\Delta \varepsilon_{Xi}}$.

Обезразмеривание времени требует оценки характерного времени прогрева t_{xap} . Интенсивность затухания тепловой волны, возникающей на начальных этапах прогрева, определяется тепловой инерцией ограждения [5]:

$$D = RS . \quad (2)$$

Здесь: R – сопротивление теплопередаче; S – коэффициент теплоусвоения материала.

Имеем для величин R и S :

$$R = \frac{dTdt dS}{dQ} = \frac{L}{\lambda}, \quad S = \sqrt{\frac{2\pi \lambda c \rho}{T}}, \quad (3)$$

где: T – амплитудное значение температурной волны; dT, dt, dS, dQ – элементарные: температура, время и площадь поверхности, через которую проходит количество теплоты Q при теплопередаче; λ, c, ρ – коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность материала, соответственно.

Подставляем (3) в (2):

$$D = \frac{dTdt dS}{dQ} \sqrt{\frac{2\pi \lambda c \rho}{T}} = dt \left[\frac{dS}{cdm} \sqrt{\frac{2\pi \lambda c \rho}{T}} \right] = dt \left[\sqrt{\frac{2\pi \lambda c \rho dT}{T dQ}} \right] = \sqrt{\frac{2\pi \lambda c \rho dT}{T dQ}} . \quad (4)$$

Перепишем (4):

$$dt = t_{xap} = \frac{D^2 T}{2\pi} . \quad (5)$$

Запишем (5), используя выражение для тепловой инерции из (2) и (3):

$$t_{xap} = \frac{(RS)^2 T}{2\pi} = \frac{\left(\frac{L}{\lambda} S\right)^2 T}{2\pi} = \frac{L^2 S^2 T}{2\pi \lambda^2} . \quad (6)$$

Получено характерное время для прогрева до температуры T образца толщиной L , изготовленного из материала с коэффициентом теплопроводности λ и коэффициентом теплоусвоения S .

В частности, для пенобетона с объемным весом $\gamma = 646 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, пористостью $p = 79\%$, влажностью $\omega = 0\%$ и коэффициентом теплоусвоения $S = 4,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}$, коэффициент теплопроводности равен $\lambda = 0,14 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ [6]. Тогда время прогрева образца толщиной $L = 0,2 \text{ м}$ до температуры $T = T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ составляет: $t_{\text{хар}}' = 658(\text{с})$.

Расчетный эксперимент дает $t_{\text{хар}} = 710 \text{ с}$, что совпадает с $t_{\text{хар}}'$ с точностью $\sim 7\%$.

Изменение температуры вдоль направления X (см. серию кривых на рис. 1) с достоверностью R^2 , лежащей в интервале $(0,9995 \div 0,9999)$ аппроксимируется полиномом 4-й степени. В частности, для $\varepsilon_t = 1,18$ справедливо:

$$\text{grad} \varepsilon_T = -95,801 \varepsilon_X^4 + 131,49 \varepsilon_X^3 - 53,29 \varepsilon_X^2 - 0,345 \varepsilon_X + 3,311.$$

Выравнивание температуры внутри области образца с ростом ε_t происходит с практически линейной зависимостью $A = A(\varepsilon_t)$ при фиксированном значении ε_X , где A – коэффициент при старшем члене аппроксимирующего полинома: $A = -111 \varepsilon_t + 242$.

Введем коэффициент затухания градиента относительной температуры по направлению X :

$$\beta = \frac{\text{grad} \varepsilon_{T0}}{\text{grad} \varepsilon_{TX}}, \quad (7)$$

где индексы «0» и «X» соответствуют краю области и текущей безразмерной координате ε_X , соответственно. Далее, обозначим как $\varepsilon_X|_{\beta=e} = \varepsilon_{X\beta e}$ относительную координату уменьшения $\text{grad} \varepsilon_T$ в e раз. Получено, что с увеличением относительного времени прогрева величина $\varepsilon_{X\beta e}$ изменяется по закону: $\varepsilon_{X\beta e} = 0,141 \varepsilon_t + 0,126$.

Нелинейный процесс прогрева образца (см. рис. 2) характеризуется пониженными значениями $\text{grad} \varepsilon_T$ вблизи (первая граничная задача) и на удалении (конечное значение скорости распространения температурной волны) от границы. Между указанными областями существует локальный максимум $\text{grad} \varepsilon_T$. Анализ результатов расчетов показал,

что этот максимум удаляется от границы со скоростью
 $v_{\max} = 0,092\varepsilon_t + 0,195$.

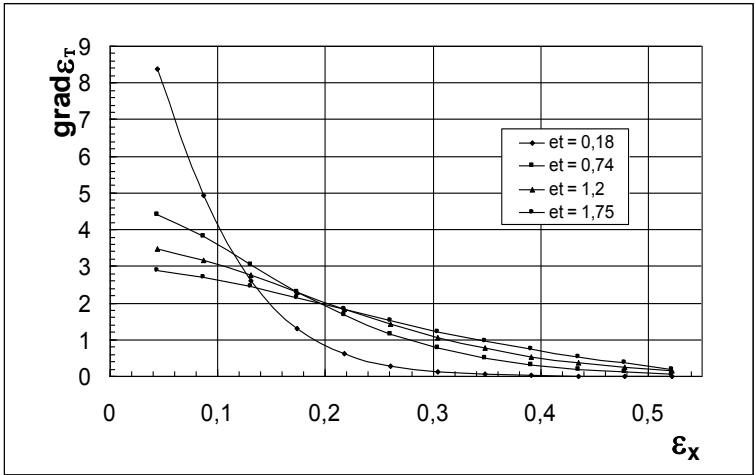


Рис. 1. Зависимость $\text{grad } \varepsilon_T = \text{grad } \varepsilon_T(\varepsilon_X)$ при $\omega = 5\%$

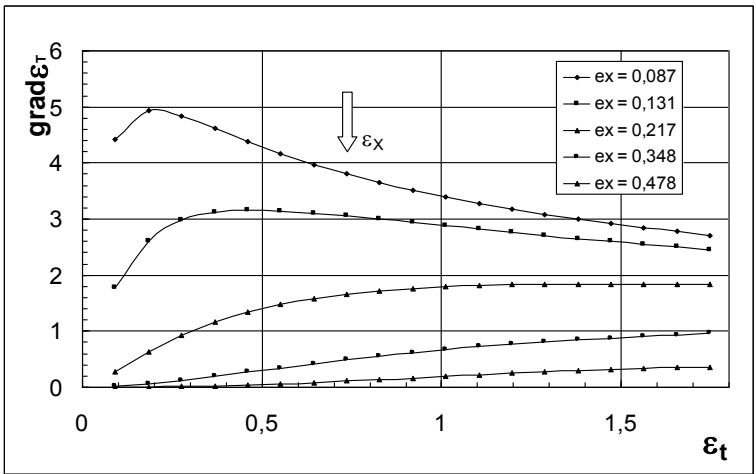


Рис. 2. Зависимость $\text{grad } \varepsilon_T = \text{grad } \varepsilon_T(\varepsilon_t)$ при $\omega = 5\%$

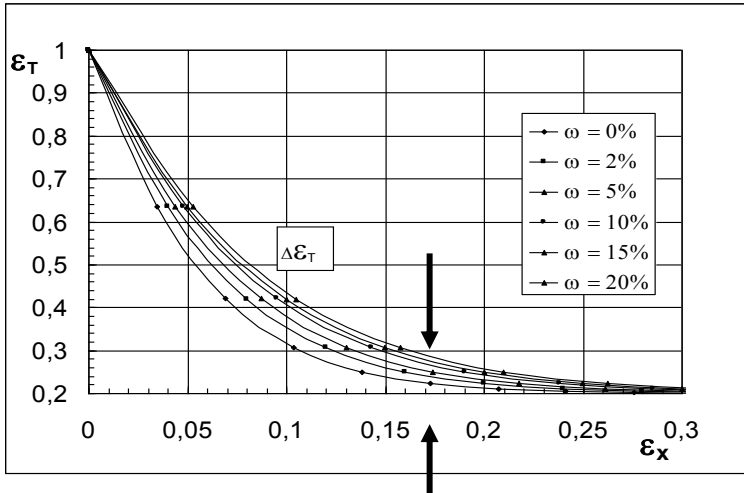


Рис. 3. Зависимость $\epsilon_T = \epsilon_T(\epsilon_X)$ при $\epsilon_t = 0,18$

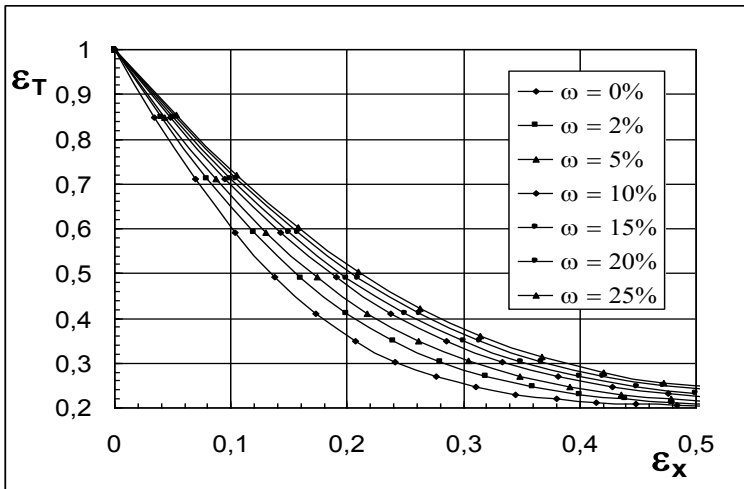


Рис. 4. Зависимость $\epsilon_T = \epsilon_T(\epsilon_X)$ при $\epsilon_t = 1,21$

Расчет показал, что изменение влажности ω образца приводит при фиксированном значении ϵ_X к изменению относительной температуры $\Delta\epsilon_T$ (см. рис. 3). Увеличение времени прогрева приводит к росту

$\Delta \varepsilon_T$ (ср. рис. 3 и рис. 4 для $\varepsilon_t = 0,18$ и $\varepsilon_t = 1,21$, соответственно). Приращение $\Delta \varepsilon_T$ является нелинейной функцией от ε_X .

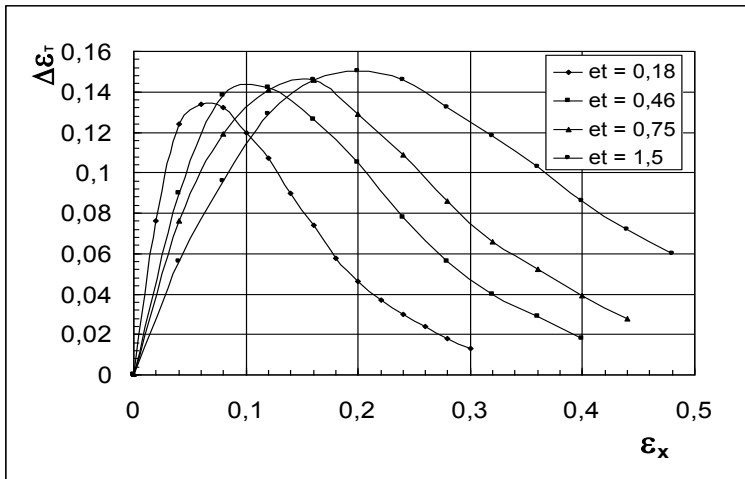


Рис. 5. Зависимость $\Delta \varepsilon_T = \Delta \varepsilon_T(\varepsilon_X)$ для $\Delta \omega = 20\%$

Для серии кривых $\Delta \varepsilon_T = \Delta \varepsilon_T(\varepsilon_X)$ параметрического множества ε_t (см. рис. 5) введем коэффициент уширения:

$$\varphi(\varepsilon_t) = \frac{L_{1/2}}{h}, \quad (8)$$

где h , $L_{1/2}$ – высота и полуширина кривой $\Delta \varepsilon_T = \Delta \varepsilon_T(\varepsilon_X)$ для данного значения ε_t , соответственно. Коэффициент уширения области максимального приращения температуры, обусловленного изменением влажности, увеличивается со временем по линейному закону: $\varphi = 1,007\varepsilon_t + 1,011$ с коэффициентом достоверности $R^2 = 0,9904$.

Центр области максимального приращения температуры, обусловленного изменением влажности, движется от границы образца со скоростью $v_{\omega X \max} = -0,109\varepsilon_t + 0,191$. Замедление $v_{\omega X \max}$ со временем обусловлено уменьшением величины $grad \varepsilon_T$ при прогреве образца.

Влияние изменения влажности на нелинейный рост с течением времени температуры прогрева внутри образца проиллюстрировано на рис. 6. Серия кривых $\varepsilon_T = \varepsilon_T(\varepsilon_t)$ при различных значениях влажности

ω в области, близкой к середине образца ($\varepsilon_X = 0,4$), может быть описана единым модифицированным полиномом:

$$\varepsilon_T = f_1(\omega)\varepsilon_t^3 + f_2(\omega)\varepsilon_t^2 + f_3(\omega)\varepsilon_t + f_4(\omega), \quad (9)$$

где

$$f_1(\omega) = -1,39 \cdot 10^{-2} + 1,36 \cdot 10^{-2} \exp\left(-\frac{\omega}{2,755}\right),$$

$$f_2(\omega) = [16,947 + 76,639 \exp(-\omega)]^{-1},$$

$$f_3(\omega) = -6,44 \cdot 10^{-3} + 2,03 \cdot 10^{-4} \omega \ln \omega,$$

$$f_4(\omega) = 0,2004 - 8,738 \omega^{0,5} \ln \omega.$$

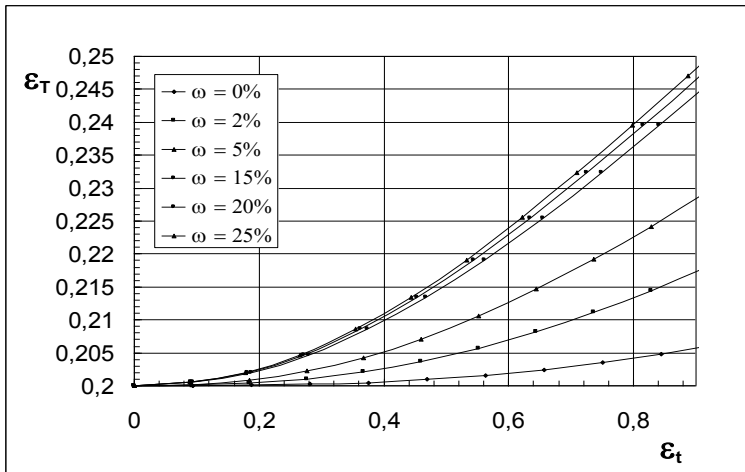


Рис. 6. Зависимость $\varepsilon_T = \varepsilon_T(\varepsilon_t)$ для $\varepsilon_X = 0,4$

Выводы

Приведенные численные методики позволяют на локальном уровне исследовать влияние влажности строительных материалов на координатную и временную составляющие одномерного нестационарного температурного поля.

Полученное аналитическое выражение для характерного времени прогрева упрощает процедуру введения безразмерных параметров и, соответственно, минимизирует накопление ошибок при вычислениях.

Разработанный программный комплекс позволяет проводить варьирование не только влажности, но и геометрии образца и его основных теплофизических параметров при детальном анализе локальных характеристик температурного поля.

Summary

The effect of humidity on the one-dimensional nonstationary temperature field of building materials was investigated by means of specially created the software package. A numerical study of space and time characteristics of the temperature fields at varying humidity of building materials was carried out. An analytical expressions for the specific heating time of the sample and for the modified polynomial describing the effect of humidity on the growth temperature at a warm-up time were obtained.

Литература

1. Богословский В.Н. Строительная теплофизика. М., 1970. - 376с.
2. Ильинский В.М. Строительная теплофизика (ограждающие конструкции и микроклимат зданий). М.: Высшая школа, 1974. – 320 с.
3. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
4. Янковский А.П. Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при граничных условиях первого рода на лицевых поверхностях. Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат науки, 2014, вып. 1 (34), с. 168 – 185.
5. Куприянов В.Н. Проектирование теплозащиты ограждающих конструкций. – Казань: КГАСУ, 2011. – 161 с.
6. Франчук А.У. Таблицы теплотехнических показателей строительных материалов. М., 1969. – 143 с.