

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСВЕЩЕНИЯ
СУСПЕНЗИИ ФИЛЬТРОВАНИЕМ С СУЩЕСТВЕННО
ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ**

Поляков В.Л.,

Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев.

Кравчук А.А.

Киевский национальный университет строительства и архитектуры.

Аналитичними методами отримано рішення математичної задачі фільтрування суспензії при швидкості, яка істотно змінюється в часі. Враховано втрати напору у відвідних комунікаціях. Виведені розрахункові залежності і рівняння ілюструються низкою прикладів з типовими вихідними даними.

Ключові слова: фільтрування, суспензія, осад, фільтроцикл, фільтрат.

Аналитическими методами получено решение математической задачи фильтрования суспензии при существенно изменяющейся со временем скоростью. Учтены потери напора в отводящих коммуникациях. Выведенные расчетные зависимости и уравнения иллюстрируются рядом примеров с типичными исходными данными.

Ключевые слова: фильтрование, суспензия, осадок, фильтроцикл, фильтрат.

A mathematical task of suspension filtration was solved by analytical methods at essentially variable discharge within filter medium. Head losses were taken into account in communications to carry away pure water. Dependencies for engineering calculations were illustrated by a number of examples with typical data.

Key words: filtration; suspension; sediment; filtration cycle; filtrate.

Проведено математическое моделирование осветления суспензии на водоочистных фильтрах при существенно меняющейся со временем скорости фильтрования [1,2]. Ее переменный характер прежде всего обусловлен относительно невысокой пропускной способностью слоя фильтрующего материала. Таким образом часть суспензии,

подаваемой на фильтр постоянным расходом, накапливается над загрузкой (рис. 1).

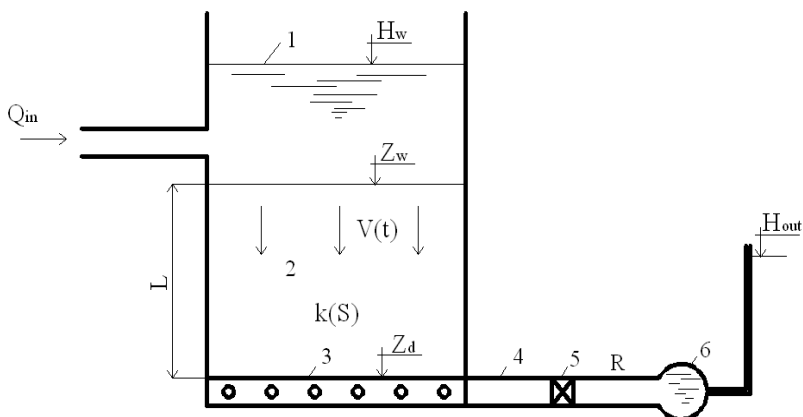


Рис. 1. Схема фильтровальной установки:

1 – уровень воды над фильтром; 2 – тело фильтра; 3 – сборный или распределительный трубопровод; 4,5 – трубы и арматура; 6 – отводящий трубопровод

Образуемый при этом поверхностный слой исходной воды сначала быстро, а затем медленно растет, создавая повышенный напор на входе в нее и усиливая тем самым фильтрационный процесс. Наоборот, прогрессирующее заиливание пористого слоя ведет к постепенному росту его сопротивления и, следовательно, снижению скорости фильтрования. Соответственно расход фильтрата в течение сравнительно короткого времени увеличивается, а затем монотонно убывает. Заметный вклад в общие потери напора на фильтровальной установке могут давать потери в отводящих коммуникациях.

Итак, исходная математическая модель вследствие динамично изменяющихся глубины воды над загрузкой и гидравлической нагрузки состоит из трех взаимосвязанных блоков – осветлительного, фильтрационного и гидравлического. В случае линейности кинетики массообмена и первоначально чистой загрузки осветлительный блок включает следующие уравнения

$$V(t) \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha(V) \cdot C - \beta(V) \cdot S, \quad (2)$$

граничные и начальные условия

$$z=0, C=C_0; \quad t=0, S=0. \quad (3)$$

Здесь C, S – объемные концентрации взвешенных и осажденных частиц суспензии; α, β – коэффициенты скоростей прилипания взвешенных и отрыва осажденных частиц, которые согласно литературным данным зависят от скорости фильтрования следующим образом [3]

$$\alpha = \alpha_v V^l, \quad \beta = \beta_v V^q, \quad (4)$$

где α_v, β_v – соответствующие постоянные приведенные коэффициенты; l, q – эмпирические константы, которые могут принимать существенно различающиеся значения в зависимости от свойств примеси, механизмов ее доставки к элементам (зернам) загрузки.

Фильтрация разделяемой в слое загрузки высотой L суспензии описывается уравнением движения

$$V(t) = -k(S_s) \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (5)$$

в котором используются закон изменения гидравлического сопротивления заиляемого фильтрующего материала

$$k = k_0 \left[1 - \left(\frac{S_s}{n_0} \right)^{m_1} \right]^{m_2}, \quad (6)$$

и соотношение между содержанием в нем осадка (связанная вода и твердые частицы) и твердых частиц

$$S_s = \gamma(S) \cdot S. \quad (7)$$

Здесь k, k_0 – текущий и исходный коэффициенты фильтрации; S_s – объемная концентрация осадка, состоящего из твердых частиц и связанной воды; h – пьезометрический напор; n_0 – пористость чистой загрузки; m_1, m_2 – эмпирические коэффициенты.

Наконец, третий блок характеризует особенности поведения неосветленной и осветленной воды в фильтровальной установке перед входом в загрузку и после выхода из нее. При этом учитывается, что напор на коллекторе фильтрата H_{out} постоянный, а поверхностный слой начинает формироваться сразу ($t=0$). Тогда напор на нижней границе загрузки ($z=L$) с учетом потерь напора в отводящих коммуникациях будет

$$z = L, \quad h = H_{out} + R\omega^2V^2, \quad (8)$$

где R – сопротивление отводящих коммуникаций, ω – площадь входной поверхности загрузки. Динамика уровня исходной воды рассчитывается на основе уравнения ее баланса

$$\omega \frac{dH_w}{dt} = Q_{in}(t) - \omega \cdot V(t), \quad (9)$$

и начального условия

$$t = 0, \quad H_w = H_m. \quad (10)$$

Здесь Q_{in} – расход поступающей на фильтр воды, H_w – отметка уровня воды над загрузкой, H_m – его начальная отметка, которая определялась в работе [4] при анализе двух начальных стадий работы фильтровальной установки.

В результате приближенного решения аналитическими методами задачи (1)-(10) получены формулы и уравнения, позволяющие с помощью современных пакетов программ математического анализа определять все содержащиеся в ней характеристики – концентрации, напоры, скорости, уровень. Так, для относительных объемных концентраций \bar{C} , \bar{S} выведены следующие зависимости

$$\begin{aligned} \bar{C}(\bar{z}, \bar{t}; \bar{V}_c) = & e^{-\bar{\alpha}_v \bar{V}_c^{l-1} \bar{z}} [e^{-\bar{\beta}_v \bar{V}_c^q \bar{t}} \cdot I_0(2\sqrt{\bar{\alpha}_v \bar{\beta}_v \bar{V}_c^{l+q-1} \cdot \bar{z} \bar{t}}) + \psi_v \bar{\beta}_v \bar{V}_c^{q-1} \int_0^{\bar{V}_c \bar{t} / \psi_v} e^{-\psi_v \bar{\beta}_v \bar{V}_c^{q-1} \lambda} \cdot \\ & \cdot I_0(2\sqrt{\psi_v \bar{\alpha}_v \bar{\beta}_v \bar{V}_c^{l+q-2} \bar{z} \lambda}) d\lambda], \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}(\bar{z}, \bar{t}; \bar{V}_c) = & \psi_v \bar{\alpha}_v \bar{V}_c^{l-1} \cdot e^{-\bar{\alpha}_v \bar{V}_c^{l-1} \bar{z}} \int_0^{\bar{V}_c \bar{t} / \psi_v} e^{-\psi_v \bar{\beta}_v \bar{V}_c^{q-1} \lambda} \cdot I_0(2\sqrt{\psi_v \bar{\alpha}_v \bar{\beta}_v \bar{V}_c^{l+q-2} \bar{z} \lambda}) d\lambda. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{C} = \frac{C}{C_0}$, $\bar{S} = \frac{\alpha k_0 S}{C_0 Q_{in}}$, $\bar{z} = \frac{z}{L}$, $\bar{t} = \frac{Q_{in} t}{\omega n_0 L}$, $\bar{\alpha}_v = \alpha_v L \left(\frac{Q_{in}}{\omega} \right)^{l-1}$,

$\bar{\beta}_v = \beta_v \frac{L}{k_0} \left(\frac{Q_{in}}{\omega} \right)^q$, $\psi_v = \frac{n_0 L}{\Delta h_0}$, $\Delta h_0 = Z_w - H_{out}$, Z_w – отметка входной

поверхности загрузки. Поскольку решение получено в параметрической форме, то установлена связь между относительным параметром \bar{V}_c и временем \bar{t} в виде равенства

$$\int_0^{\bar{t}} \left(\sqrt{\left(\int_0^1 \frac{d\zeta}{\bar{k}(\bar{S}(\zeta, \bar{t}; \bar{V}_c))} \right)^2 + 4\bar{R}\tilde{H}_w(\bar{t}; \bar{V}_c)} - \int_0^1 \frac{d\zeta}{\bar{k}(\bar{S}(\zeta, \bar{t}; \bar{V}_c))} \right) d\bar{t} = \frac{2\bar{R}\bar{V}_c}{\psi_h} \bar{t}, \quad (13)$$

где $\bar{k} = \frac{k}{k_0}$, $\bar{R} = \frac{k_0^2 \omega^2 \Delta h_0 R}{L^2}$, $\psi_h = \frac{\omega k_0 \Delta h_0}{L Q_m}$. При найденной подбором из (13)

зависимости $\bar{V}_c(t)$ становятся возможными конкретные расчеты, во-первых, концентраций \bar{C} , \bar{S} с помощью формул (11), (12), во-вторых, относительной скорости фильтрования по формуле

$$\bar{V}(\bar{t}; \bar{V}_c) = \frac{1}{2\psi_h \bar{R}} \left(\sqrt{\left(\int_0^1 \frac{d\zeta}{\bar{k}(\bar{S}(\zeta, \bar{t}; \bar{V}_c))} \right)^2 + 4\bar{R}\tilde{H}_w} - \int_0^1 \frac{d\zeta}{\bar{k}(\bar{S}(\zeta, \bar{t}; \bar{V}_c))} \right). \quad (14)$$

Однако, при этом необходимо учесть закономерность подъема уровня воды, которая следует из решения уравнения (9) и будет

$$\tilde{H}_w(\bar{t}; \bar{V}_c) = \tilde{H}_m + \frac{1 - \bar{V}_c}{\psi_h} \bar{t}, \quad (15)$$

где $\tilde{H}_{w,m} = (H_{w,m} - H_{out}) / \Delta h_0$.

На основе построенного решения разработана инженерная методика, предназначенная для обоснования технологических времен, а именно, времени защитного действия загрузки, времени достижения потерями напора в загрузке предельно допустимой величины и, что самое важное, длительности фильтроцикла. Для этого привлекались критерии качества и экономичности работы фильтра, которые регламентируют повышение содержания взвеси в фильтрате и снижение производительности фильтра.

Предметом обстоятельного количественного анализа стали все содержащиеся в исходной модели физико-химические характеристики, а также вышеупомянутые технологические параметры. Однако, ниже вследствие ограниченности объема статьи иллюстрируются только важнейшие зависимости, которые непосредственно следуют из решения поставленной задачи фильтрования с существенно изменяющейся скоростью. При этом были зафиксированы следующие значения модельных параметров: $\bar{\beta}_v = 0.01$, $q = 1$, $\bar{\gamma} = 0.001$, $\bar{R} = 1$, $\psi_v = 0.5$. Для показателя l взято среднее из имеющихся в литературе значение.

На рис. 2 приведены кривые зависимости выходной концентрации \bar{C}_e от времени \bar{t} . При этом сорбционная способность фильтрующего материала варьировалась от умеренной ($\bar{\alpha}_v = 5$), до высокой ($\bar{\alpha}_v = 9$). Они позволяют судить, во-первых, о значимости первичного проскока частиц суспензии через слои загрузки, во-вторых, о темпе ухудшения качества ее разделения. Естественно, что наибольший проскок имел место при наименьшем из принятых значений $\bar{\alpha}_v$ и характеризовался значением $\bar{C}_e(0) = 0.0068$. В таком случае в загрузке образовывалось меньшее количество осадка, который к тому же распределялся по ее высоте существенно равномернее. Благодаря этому наблюдалось минимальное снижение скорости фильтрования со временем (кривая 1 на рис.3). Усиленное отложение примеси на верхнем участке загрузки (при больших значениях $\bar{\alpha}_v$) привело к резкому снижению скорости \bar{V} со временем (кривая 3).

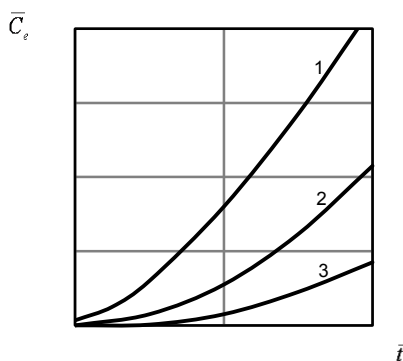


Рис. 2. График зависимости выходной концентрации взвеси от времени:
1 – $\bar{\alpha}_v = 5$; 2 – $\bar{\alpha}_v = 7$; 3 – $\bar{\alpha}_v = 9$.

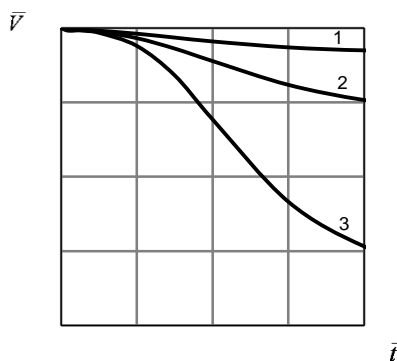


Рис. 3. График изменения скорости фильтрования со временем:
1 – $\bar{\alpha}_v = 5$; 2 – $\bar{\alpha}_v = 7$; 3 – $\bar{\alpha}_v = 9$.

1. Грабовский П.А., Ларкина Г.М., Прогульный В.И. Промывка водоочистных фильтров. Дренаж, отвод промывной воды. – Одесса: Оптимум, 2012. – 240 с.

2. Akgiray O., Saatci A.M. An algorithm for bank operation of declining rate filters // Water Res. – 1998. – 32, №7. – P. 2095-2105.

3. Сенявин М.М., Веницианов Е.В., Аюкаев Р.И. О математических моделях и инженерных методах расчета процесса очистки природных вод фильтрованием // Водные ресурсы. – 1977. – №2. – С. 157-170.

4. Поляков В.Л., Кравчук А.А. О гидравлике водоочистных безнапорных фильтров на начальных стадиях фильтрования // Пробл. водопостачання, водовідведення та гідраліки. – 2015. – Вип. 25.