Ozhinskyi Victor.
NAVIGATIONAL INFORMATION PROCESSING HARDWARE OF SPACE VEHICLE WITH DEVIATIONS FROM ASSUMPTIONS

The analysis of the determining the parameters process of the navigation equipment of spacecraft. The approach is based on using statistical procedures with no sensitivity to small deviations from the assumptions about the distribution law of errors of determining the parameters of the spacecraft.

Keywords: *satellite navigation, the motion parameters, the errors, the statistical processing.*

УДК 517.95

Ляшко О.В., Скрипка В.І.

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ЗРІЗАНОМУ ПОРОЖНИННОМУ ЕЛІПСОЇДІ

Будується загальний розв'язок рівняння Лапласа для порожнинного еліпсоїда, обмеженого частинами координатних поверхонь еліпсоїдальної системи. Доводиться регулярність нескінченної алгебраїчної системи, що виникає при задоволенні граничних умов. Досліджується характер збіжності рядів загального розв'язку і даються рекомендації щодо його коректної числової реалізації.

Ключові слова: *рівняння Лапласа, скалярний потенціал, крайова задача, задача Діріхле, еліпсоїд, еліпсоїдальні координати, функції Лежандра.*

Вступ. Точні розв'язки крайових задач для канонічних областей становлять значний теоретичний і практичний інтерес. В монографії [2] викладено метод і розв'язки ряду векторних крайових задач теорії пружності для областей , обмежених частинами координатних поверхонь в декартовій, циліндричній та сферичній системах координат. В системах координат зі змінною гаусовою кривиною координатних поверхонь питання побудови точних розв'язків все ще лишається актуальним.

В даній статті пропонується точний розв'язок задачі Діріхле для скалярного потенціалу в еліпсоїдальних координатах, яка має як самостійне значення (задача про стаціонарний теплообмін), так і допоміжне, як базова для побудови розв'язків значно складніших векторних крайових задач (задач теорії пружності).

Постановка задачі. Розглянемо осесиметричну задачу в області, обмеженій частинами двох еліпсоїдальних поверхонь $\xi = \xi_0$ і $\xi = \xi_1$, $(\xi_1 < \xi_0, 0 \le \eta \le \eta_0)$ та частиною гіперболоїдальної поверхні $\eta = \eta_0$, $(\xi_1 \le \xi \le \xi_0)$ еліпсоїдальної системи координат.

Зв'язок між еліпсоїдальними (ξ, η, ς) та циліндричними (r, z, φ) координатами встановлюється за формулами [1]:

$$r = csh\,\xi \sin\eta, \;\; z = cch\,\xi \cos\eta, \;\; \varphi = \varsigma,$$
$$(0 \le \xi < \infty, 0 \le \eta \le \pi, 0 \le \varsigma \le 2\pi) \tag{1}$$

Рівняння Лапласа для гармонійної функції $\theta(\xi, \eta)$ набуває вигляду:

$$\frac{1}{sh\,\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(sh\,\xi\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)=0 \tag{2}$$

Граничні умови для рівняння (2) задаються співвідношеннями

$$\theta(\xi_j,\eta)=\psi_j(\eta),\ \ (j=0;1,\ 0\le\eta\le\eta_0);\ \ \theta(\xi,\eta_0)=f(\xi),\ \ (\xi_1\le\xi\le\xi_0) \tag{3}$$

Побудова розв'язку. Загальний розв'язок знаходимо у вигляді суми $\theta(\xi,\eta)=\theta_1(\xi,\eta)+\theta_2(\xi,\eta)$ двох гармонійних функцій

$$\theta_1(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_nP_{\lambda_n}(ch\,\xi)+b_nQ_{\lambda_n}(ch\,\xi)\right]P_{\lambda_n}(\cos\eta) \tag{4}$$

$$\theta_2(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_kP_{\mu_k}(\cos\eta)\varphi(\xi,\xi_0,\mu_k)\right], \tag{5}$$

де: $P_\nu(z),Q_\nu(z)$ - функції Лежандра 1-го та 2-го родів [1],

$$\varphi(\xi,\xi_0,\mu_k)=\frac{i\tau_k}{\xi_1-\xi_0}\frac{\pi}{2}\sqrt{sh\,\xi_0 sh\,\xi_1}\left[P_{\mu_k}(ch\,\xi_0)L_{\mu_k}(ch\,\xi)-L_{\mu_k}(ch\,\xi_0)P_{\mu_k}(ch\,\xi)\right] \tag{6}$$

$$L_{\mu_k}(ch\,\xi)=\frac{1}{\pi}\left[Q_{-0,5+i\tau_k}(ch\,\xi)+\theta_{-0,5-i\tau_k}(ch\,\xi)\right]. \tag{7}$$

Значення параметрів відокремлення λ_n і $\mu_k=-0,5+i\tau_k$ визначаємо з умов

$$P_{\lambda_n}(\cos\eta_0)=0;\ \ \varphi(\xi_1,\xi_0,\mu_k)=0 \tag{8}$$

Частинні розв'язки у співвідношенні (4) вибрані так, щоб виконувалась нульова умова при $\eta=\eta_0$, а будь-яка кусково-неперервна функція $\psi(\eta)$ розкладалась на інтервалі $[0,\eta_0]$в ряд по базисним функціям $P_{\lambda_n}(\cos\eta)$. Аналогічно будується і система базисних функцій $\varphi(\xi,\xi_0,\mu_k)$ на сегменті $[\xi_1,\xi_0]$. Вибір комплексних значень параметрів μ_k зумовлений тим, що функція $\varphi(\xi,\xi_0,\mu\ )$ належить до штурм - ліувілівського типу лише при комплексному значенні параметра $\mu=-0,5+i\tau$.

З теорії рядів Фур'є відомо, що для вибору власних чисел існують альтернативи, пов'язані з характером поширення функції за межі скінченного інтервалу. У нашому випадку власні числа вибрані так (формули (8)), щоб у кожному з граничних співвідношень (3) залишалась лише одна складова розв'язку. Внаслідок цього граничні умови зводяться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9), в кожне з яких входять лише довільні сталі однієї складової розв'язку.

$$\alpha_n + \beta_n \frac{Q_{\lambda_n}(\omega_0)}{Q_{\lambda_n}(\omega_1)} = \psi_{no} \frac{\eta_0}{2} P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0),$$

$$\alpha_n \frac{P_{\lambda_n}(\omega_1)}{P_{\lambda_n}(\omega_0)} + \beta_n = \psi_{n1} \frac{\eta_0}{2} P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0), \tag{9}$$

$$\gamma_k = f_k \frac{\xi_1 - \xi_0}{2} \varphi'(\xi_1, \xi_0, \mu_k),$$

де: $\xi_0 = \cos\eta_0$, $\omega_0 = ch\xi_0$, $\omega_1 = ch\xi_1$;

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_k$ - нормовані довільні сталі:

$$\alpha_n = a_n \frac{\eta_0}{2} P_{\lambda_n}(\omega_0) P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0),$$

$$\beta_n = b_n \frac{\eta_0}{2} Q_{\lambda_n}(\omega_1) P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0), \tag{10}$$

$$\gamma_k = c_k \frac{\xi_1 - \xi_0}{2} P_{\mu_k}(\varepsilon_0) \varphi'(\xi_1, \xi_0, \mu_k);$$

ψ_{nj} та f_k - коефіцієнти розкладення функцій $\psi_j(\eta)$ та $f(\xi)$ в ряди по ортогональним системам функцій $P_{\lambda_n}(\cos\eta)$ і $\varphi(\xi_1, \xi_0, \mu\ )$ на сегментах $[0, \eta_0]$ і $[\xi_1, \xi_0]$ відповідно.

Штрихом позначено похідну по координаті, наприклад,

$$P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0) = \left. \frac{dP_{\lambda_n}(\cos\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_0}.$$

Доведемо регулярність системи (9). Для цього , скориставшись асимптотичними значеннями функції Лежандра [1] та формулами (8), знаходимо такі співвідношення для параметрів λ_n і $\mu_k = -0{,}5 + i\tau_k$:

$$\lambda_n \sim \frac{n\pi}{\eta_0}, (n \to \infty); \text{ і } \tau_k \sim \frac{k\pi}{\xi_0 - \xi_1}, (k \to \infty) \tag{11}$$

та для відношень функцій Лежандра:

$$\sqrt{\frac{sh\,\xi_0}{sh\,\xi_1}} \frac{Q_{\lambda_n}(\omega_0)}{Q_{\lambda_n}(\omega_1)} \sim \sqrt{\frac{sh\,\xi_1}{sh\,\xi_0}} \frac{P_{\lambda_n}(\omega_1)}{P_{\lambda_n}(\omega_0)} \sim e^{-n\pi\frac{\xi_0 - \xi_1}{\eta_0}}, (n \to \infty). \tag{12}$$

За умови, що функції $\psi_j(\eta)$ та $f(\xi)$ мають кусково- неперервні похідні, виводимо

$$\psi_{nj} = \frac{2}{\eta_0} \frac{\psi_j(\eta_0)}{P'_{\lambda_n}(\varepsilon_0)} + O(n^{-2}), (j = 0;1);$$

$$f_k = \frac{2}{\xi_1 - \xi_0} \frac{f(\xi_1) - (-1)^k f(\xi_0)\sqrt{\dfrac{sh\,\xi_0}{sh\,\xi_1}}}{\varphi'(\xi_1, \xi_0, \mu_k)} + O\left(k^{-2}\right). \tag{13}$$

З системи (9) з урахуванням формули (12), (13) безпосередньо випливають асимптотичні значення сталих загального розв'язку

$$\alpha_n = A + O\left(n^{-2}\right);\ \beta_n = B + O\left(n^{-2}\right);\ \gamma_k = B - (-1)^k A\sqrt{\frac{sh\,\xi_0}{sh\,\xi_1}} + O\left(k^{-2}\right), \tag{14}$$

де (для неперервних граничних умов): $A = f(\xi_0) = \psi(\eta_0); B = f(\xi_1) = \psi_1(\eta_0)$.

Отже, для невідомих у системі (9) виконується закон асимптотичних виразів, що свідчить про її регулярність.

Дослідження розв'язку. Дослідимо характер збіжності рядів розв'язку. Спершу виділимо асимптотичну складову $\theta_1^*(\xi, \eta)$ ряду (4) і знайдемо її значення, враховуючи при цьому співвідношення (10), (11), (14) та асимптотики функцій Лежандра [1]. Одержимо вираз, що складається з двох доданків, перший з яких містить множник $A\exp\left(n\pi\dfrac{\xi - \xi_0}{\eta_0}\right)$, а другий - $B\exp\left(n\pi\dfrac{\xi_1 - \xi}{\eta_0}\right)$. Це означає , що ряд (4) швидко збігається в середині області, але при наближенні до межі збіжність його різко погіршується . Найгіршу (умовну) збіжність ряд має в кутових точках (ξ_1, η_0) і (ξ_0, η_0). В околі кожної з цих точок один з доданків функції $\theta_1^*(\xi, \eta)$, прямує до нуля , в результаті чого в околі , наприклад, кутової точки (ξ_0, η_0) одержуємо

$$\theta_1^*(\xi, \eta) = -\frac{2A}{\pi}\sqrt{\frac{\sin\eta_0 sh\,\xi_0}{\sin\eta sh\,\xi}}\left(\sigma_1\cos\frac{q}{4} - \sigma_2\sin\frac{q}{4}\right), \tag{15}$$

де:

$$q = \pi\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0},\quad p = \pi\frac{\xi - \xi_0}{\eta_0},$$
$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{np}\sin q = arctg\,\frac{\sin q}{e^{-p} - \cos q}, \tag{16}$$
$$\sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{np}\cos q = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - e^p\cos q + e^{2p}\right).$$

Перейдемо у співвідношенні (15) до границі при $\xi \to \xi_0,\ (p \to 0)$ і $\eta \to \eta_0,\ (q \to 0)$. Тоді, після розкриття невизначеності у формулі (16), одержуємо

$$\theta_1^*(\xi, \eta)\Big|_{\substack{\xi \to \xi_0 \\ \eta \to \eta_0}} \sim \frac{2A}{\pi}arctg\,\frac{q}{p} = \frac{2A}{\pi}arctg\,\frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} = \frac{2A}{\pi}\varphi, \tag{17}$$

де φ - полярний кут точки $M(\xi',\eta')$ в декартовій системі координат $\xi'=\xi-\xi_0$, $\eta'=\eta-\eta_0$.

Для асимптотичної складової $\theta_2^*(\xi,\eta)$ ряду (5) в околі кутової точки (ξ_0,η_0) аналогічно одержуємо

$$\theta_2^*(\xi,\eta)\Big|_{\substack{\xi\to\xi_0\\ \eta\to\eta_0}} \sim \frac{2A}{\pi} arctg\ \frac{\xi-\xi_0}{\eta-\eta_0} = A-\frac{2A}{\pi}\varphi \qquad (18)$$

З формул (17), (18) випливає, що хоча кожна окремо взята складова розв'язку у кутовій точці (ξ_0,η_0) є розривною, у сумі вони мають визначену границю $\lim\limits_{\substack{\xi\to\xi_0\\ \eta\to\eta_0}} \theta^*(\xi,\eta)=A.$

Дослідження розв'язку в околі кутової точки (ξ_1,η_0) дає аналогічний результат $\lim\limits_{\substack{\xi\to\xi_1\\ \eta\to\eta_0}} \theta^*(\xi,\eta)=B.$

Висновки.

1. У даній роботі одержано точний розв'язок рівняння Лапласа в еліпсоїдальних координатах.
2. Порівняння результатів даної роботи з результатами, одержаними в [3,4] показує повний збіг властивостей розв'язків крайових задач Неймана і Діріхле для різних канонічних областей з кутовими точками.
3. Знайдені асимптотичні значення довільних сталих дають можливість звести систему алгебраїчних рівнянь до скінченного виду і здійснити коректний числовий аналіз розв'язку методом покращеної редукції.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит. 1952. – 476 с.
2. *Гринченко В Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К.: Наукова думка, 1978. – 263 с.
3. *Кільчинський О.О.,Скрипка В.І.* .Задача Неймана про розподіл потенціалу у двопорожнинному гіперболоїді обертання, обмеженому еліпсоїдальною поверхнею. Пр. міжнарод. симпоз. «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV)» Т.1. - К.: Ін-т кібернетики, 2009. –с. 317-321.
4. *Ляшко О.В., Скрипка В.І.* Про розподіл скалярного потенціалу в порожнинному параболоїді скінченної довжини. – К. : Зб. наук. праць КДАВТ «Водний транспорт» в. №2(14), 2012. – с. 146-150.

Ляшко О.В., Скрипка В.И.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В СРЕЗАННОМ ПОЛОМ ЭЛЛИПСОИДЕ

Строится общее решение уравнения Лапласа для полого эллипсоида, ограниченного частями координатных поверхностей эллипсоидальной системы. Доказывается регулярность бесконечной алгебраической системы, возникающей при удовлетворении граничных условий. Исследуется характер сходимости рядов общего решения и даются рекомендации относительно его корректной числовой реализации.

Ключевые слова: *уравнение Лапласа, скалярный потенциал, краевая задача, задача Дирихле, эллипсоид, эллипсоидальные координаты, функции Лежандра.*

Lyashko O., Skrypka V.

DIRICHLET PROBLEM FOR THE SCALAR POTENTIAL IN THE TRUNCATED HOLLOW ELLIPSOID

We construct the general solution of the Laplace equation for an ellipsoid cavity bounded by coordinate surfaces ellipsoidal parts of the system. We have the regularity of infinite algebraic system that arises in satisfying the boundary conditions. We investigate the nature of convergence of series of general solution and provide recommendations for its correct numerical implementation.

Keywords: *Laplace equation, the scalar potential of the boundary problem, Dirichlet problem, ellipsoid, ellipsoidal coordinates, Legendre functions.*

УДК 519.872

Скрипка В.І., Чабак Л.М.

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

У роботі пропонується простий спосіб одержання точного розв'язку диференціальних рівнянь, що описують стан системи масового обслуговування з нескінченною кількістю каналів. Подаються результати порівняльного аналізу характеристик стаціонарного режиму в системах з нескінченною та з обмеженою кількістю каналів з відмовами. Даються рекомендації щодо використання СМО з нескінченною кількістю каналів в якості математичної моделі більш складних систем масового обслуговування.

Ключові слова: *система масового обслуговування, пуасонівський потік, показниковий закон, твірна функція, формули Ерланга, математична модель.*

Вступ. Пошук розв'язку диференціальних рівнянь (ДР), що визначають стан системи масового обслуговування (СМО), пов'язаний з великими математичними труднощами. Тому більшість авторів обмежуються дослідженнями стаціонарного режиму на основі виродженої системи ДР. Однак, стаціонарний розв'язок не дає відповіді на запитання про поведінку СМО у перехідному режимі, тому пошук точного розв'язку залишається не лише принциповою, але й актуальною практичною задачею.

Окремі випадки точних розв'язків, як правило, відносяться до СМО з двома-трьома фазовими станами. У таких випадках точний розв'язок одержується відносно просто, наприклад, з допомогою перетворення Лапласа [3]. Це перетворення можна успішно застосовувати у більш загальних моделях СМО, але одержані при цьому результати є досить складними для їх практичного використання [1]. В даній ситуації важливо мати такі теоретичні моделі, для яких, з одного боку, існували б прості розв'язки, а з іншого – ці моделі були б асимптотичними наближеннями до більш реальних фізичних систем. Саме такою моделлю є СМО з нескінченною кількістю каналів обслуговування, до розгляду якої ми приступаємо.

Постановка задачі. Припустимо, що СМО має необмежену кількість каналів обслуговування. В цьому випадку поняття втрати заявки для такої системи втрачає смисл, оскільки система у будь-який момент часу може прийняти чергову заявку на обслуговування. Проте, зберігає смисл поняття ймовірності стану, зокрема ймовірності $P_n(t)$ того, що на момент часу t в СМО знаходиться на обслуговуванні n каналів. Ця інформація щодо стану дає можливість оцінити міру завантаження СМО з великою кількістю каналів обслуговування. В