УДК 536.24

Кривошей Ф. А., Богдан Ю. А.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОСРЕДНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕКОРРЕТКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Получены регуляризированные решения некорректной обратной задачи теплопереноса.
Ключевые слова: *осреднение функционалов, теплоперенос, преобразование Лапласа.*

Для получения регуляризирующих операторов некорректных обратных задач теплопереноса введем процедуры статистического осреднения функционалов уравнения переноса и преобразования Лапласа случайной функции.

Рассмотрим функционалы типа

$$F = \int_0^x \varphi[Q(x',t)]dx',$$

$$\Phi = \int_0^x \psi[Q(x,t')]dt',$$

где $\varphi(Q),\psi(Q)$ некоторые детерминированные функции, а x,t – случайные, причем $x = \langle x\rangle + \delta x$, $t = \langle t\rangle + \delta t$, $\langle \delta x\rangle = \langle \delta t\rangle = 0$, а корреляционные функции имеют вид

$$\langle \delta x_1 \delta x_2\rangle = \sigma_x^2 \delta(x_1 - x_2), \tag{1}$$

$$\langle \delta t_1 \delta t_2\rangle = \sigma_t^2 \delta(t_1 - t_2), \tag{2}$$

где σ_x, σ_t – соответственно дисперсии измерения координат и времени.

Учитывая, что $\varphi = \langle\varphi\rangle + \delta\varphi(x)$, $\psi = \langle\psi\rangle + \delta\psi(t)$, осредним функционалы F,Φ по реализациям случайных флуктаций $\delta x, \delta t$

$$\langle F\rangle = \int_0^{\langle x\rangle} \langle\varphi\rangle d\langle x'\rangle + \int_0^{\langle x\rangle} \langle\varphi\delta x\rangle d\langle x'\rangle, \tag{3}$$

$$\langle \Phi\rangle = \int_0^{\langle t\rangle} \langle\psi\rangle d\langle t'\rangle + \int_0^{\langle t\rangle} \langle\psi\delta t\rangle d\langle t'\rangle, \tag{4}$$

Расщепляя нелинейности $\langle\varphi\delta x\rangle$, $\langle\psi\delta t\rangle$ по формуле Фрутцу-Новикова [1, 2] с учетом корреляционных функций (1), (2) и подставляя результаты в (3), (4) находим

$$\langle F\rangle = \int_0^{\langle x\rangle} \langle\varphi\rangle d\langle x'\rangle + \sigma_x^2 \langle\varphi\rangle, \tag{5}$$

$$\langle \Phi \rangle = \int\limits_0^{\langle t \rangle} \langle \psi \rangle d\langle t' \rangle + \sigma_t^2 \langle \psi \rangle , \tag{6}$$

Выражения (5), (6) могут быть получены с помощью преобразования Лапласа случайной функции. Пусть, например, $\psi(t)$ – функция случайного аргумента с корреляционной функцией (2). В первом приближении интенсивность флуктаций δt, соответствующих ошибкам измерений времени, можно полагать малой, тогда допустимо сохранить первые два члена разложения по δt экспоненты флуктаций в преобразовании Лапласа

$$\psi(s) = \int\limits_0^{\infty} \psi(t) \exp(-st) dt .$$

В линейном приближении имеем

$$\psi(s) = \int\limits_0^{\infty} (\langle \psi \rangle + \delta\psi) \exp(-s\langle t \rangle)(1 + s\delta t) d\langle t \rangle .$$

Осредняя это выражение по реализациям процесса δt, после преобразований получаем связь между изображениями детерминированной $\psi(s)$ и осредненной случайной функции $\langle \psi(s) \rangle$

$$\psi(s) = (1 + \sigma_t^2 s) \langle \psi(s) \rangle . \tag{7}$$

В квадратичном приближении с точностью до постоянной при линейном члене получаем связь

$$\psi(s) = (1 + \sigma_t^2 s)^2 \langle \psi(s) \rangle . \tag{8}$$

Соответствующие (7), (8) связи между оригиналами детерминированной и осредненной случайной функции имеют вид

$$\langle \psi(t) \rangle = \alpha \int\limits_0^t \psi(t') \exp[-\alpha(t - t')] dt' \tag{9}$$

$$\langle \psi(t) \rangle = \alpha^2 \int\limits_0^t \psi(t')(t - t') \exp[-\alpha(t - t')] dt' , \tag{10}$$

где $\alpha = \delta_t^{-2}$. Из этих выражений следует, что при $\sigma \to 0$ $(\alpha \to \infty)$ $\langle \psi(t) \rangle \to \psi(t)$. Теперь очевидно, что применив для нахождения среднего значения функционала Φ преобразование Лапласа случайной функции и связь (7), сразу получаем результат (6). Таким образом, показано, что преобразование Лапласа случайной функции эквивалентно процедуре статического осреднения ее соответствующего функционала.

При обработке физических экспериментов часто возникает необходимость вычисления первых производных от измеренных значений функций, реже - вторых. Пусть $\tilde{Q}(\nu)$ -

приближенные (измеренные) значения функции $Q(\nu)$, тогда первая ξ_1 и вторая ξ_2 производные определяются, как известно, решением интегрального уравнения I рода

$$\int_0^{\nu} \frac{(\nu-\nu')^{n-1}}{(n-1)!}\xi_n(\nu')d\nu' = \tilde{Q}(\nu),$$

где $\nu = x,t, n = 1,2$. При неточной правой части $\tilde{Q}(\nu)$ задача вычисления ξ_n не корректна. Поэтому применим к этому уравнению процедуру и результаты осреднения функционалов (5), (6) или преобразования Лапласа случайных функций (7), (8). Тогда получим интегральные уравнения Вольтерра II рода для средних значений первой и второй производных

$$\langle\xi_1(\nu)\rangle + \alpha\int_0^{\nu}\langle\xi_1(\nu')\rangle d\nu' = \alpha\tilde{Q}(\nu) \tag{11}$$

$$\langle\xi_2(\nu)\rangle + \int_0^{\nu}\left[2\alpha + \alpha^2(\nu-\nu')\right]\langle\xi_2(\nu')\rangle d\nu' = \alpha^2\tilde{Q}(\nu) \tag{12}$$

где $\alpha = \sigma_\nu^{-2}, \sigma_\nu^2$ – дисперсия измеряемой величины. Как известно, решения уравнений (11), (12) устойчивы относительно возмущений правой части, т.е. задача вычисления производных ξ_1, ξ_2 корректна. Численные эксперименты показали устойчивость и равномерную сходимость метод при значениях дисперсий σ_{y}^2, равных параметрам регуляризации по Тихонову, принятым в [3]. Результаты вычислений по (11), (12) практически совпадают с результатами [3] при значительно меньшем объеме вычислений. На рис. 1 показано восстановленная Φ первой производной функции ошибок $ef\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = (x)$ при стандарте $\delta = 0{,}01$. Точная производная (сплошная линия), восстановленная по (11) – (пунктирная линия).

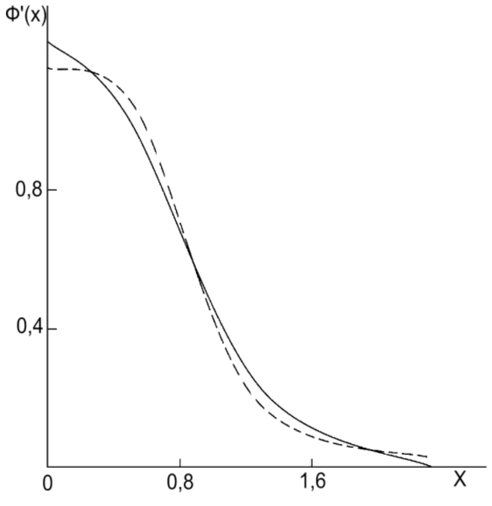

Рис. 1

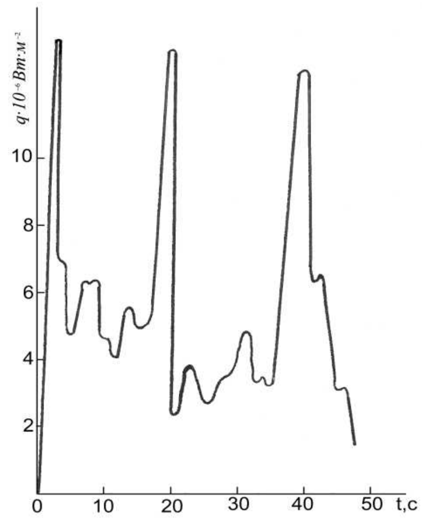

Рис. 2

На основании полученных результатов было получено регуляризированное выражение для плотности теплового потока на поверхности теплообмена

$$\sigma_t^2 \langle q \rangle + \int_0^t \langle q \rangle (t') dt' = \bar{c} \int_0^x \left(\langle Q \rangle - Q_{\text{н}} \right) dx' \qquad (13)$$

Полученный результат был использован для восстановления плотности теплового потока по измерениям температур в металлическом образце. На рис. 2 показаны результаты восстановления плотности теплового потока на поверхности, на которой происходят периодические смены режима кипения (от пленочного до пузырькового) [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Furutsu K.* On the statistical Theory of Electromagnetic Waves in Fluctuating Medium//Journ.Res.NBS.1963.N3.
2. *Новиков Е. А.* Функционалы и метод случайных полей в теории турбулентности//ЖЭТФ.1964.т.47.
3. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации//Доклады АН СССР. 1963. т. 151. №3.
4. *Кривошей Ф. А.* Гидродинамическая и тепловая самоорганизация при кипении водных растворов полимеров.//Теоретические основы химической технологии. №5. 2006. с. 453-458.

Кривошей Ф.О., Богдан Ю.О.

СТАТИСТИЧНЕ ОСЕРЕДНЕННЯ ФУНКЦІОНАЛІВ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ

Отримані регуляризовані розв’язки некоректної оберненої задачі теплопереносу.

Ключові слова: *осереднення функціоналів, теплоперенос, перетворення Лапласа*

Krivoshey F., Bogdan Y.

STATISTICAL AVERAGING OF OF EQUATION FUNCTIONALS OF HEAT TRANSFER AND LAPLACE TRANSFORMATION OF RANDOM FUNCTION FOR HEAT TRANSFER NON-CORRECT PROBLEMS

Statistical regularization solution of non-correct inverse heat transfer problem are obtained.

Keywords: *averaging of functionals, heat transfer, Laplace transform*

УДК 629.78

Ожінський В.В.

МОДЕЛІ КОНТРОЛЮ ОРІЄНТАЦІЇ ГЕОСТАЦІОНАРНИХ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ ЗА ІНФОРМАЦІЄЮ СУПУТНИКОВИХ НАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Запропоновано моделі, які можливо використовувати в системах орієнтації геостаціонарних космічних апаратів, що допомагає якісніше та надійніше виконувати вимоги щодо утримання КА в його орбітальній позиції, точності наведення на зони обслуговування, знижується ймовірність постановки взаємних завад системами зв’язку.