9. Бадаев Ю.И. Ковтун А.М. Специальные сплайны из полиномов третей, четвертой и пятой степеней в геометрическом моделировании. Монография. Одесса Феникс, 2011г.
10. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Апроксимація сплайнами на основі кривих із інцидентними точками. // Сучасні проблеми геометричного моделювання: Праці Національного університету «Львівська політехніка»(спецвипуск): Матеріали міжнар. наук.-практ. конференції. / Національний університет «Львівська політехніка». Львів, 2003, С. 75-77.
11. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Векторно-параметричні сегменти, поверхні та тіла за інцидентними з ними точками. // Прикл. геометрія та інж. графіка. Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Вип. 4, т. 18 Мелітополь: ТДАТА, 2003. – С.37-40.
12. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Сплайнові векторно-параметричні криві. // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – К: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С.47-49.
13. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Інтерполяція поліноміальними сплайнами п'ятого степеня. // Матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та комп'ютерна підтримка навчальних дисциплін у середній і вищій школі». – Бердянськ.: БДПУ, 2004. – С. 11-14.

Ковтун О.М.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ КРИВАЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ С УПРАВЛЯЮЩИМИ ТОЧКАМИ, КОТОРЫЕ ПРИНАДЛЕЖАТ КРИВОЙ

Предлагается способ рассчета сегментов кубической кривой с управляющими точками, которые инцидентны кривой и приведен тестовый пример.

Ключевые слова: *кубическая кривая, управляющие точки.*

Kovtun O.M.

THE THIRD DEGREE POLYNOMIAL SPLINE WITH THE OPERATING POINTS INCIDENTAL A CURVE

Splines are smooth but flexible curves, with great practical importance when constructing curvilinear forms and graphing. Proposing a method of constructing a third degree Lagrange polynomial-based spline on points that incidental (belongs) a curve.

Keywords: *third degree spline, incidental points.*

УДК 517.564

Кільчинський О.О., Скрипка В.І.

УЗАГАЛЬНЕНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ МЕЛЕРА-ФОКА В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ДВОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЇДА

Пропонується комплексна форма узагальненого інтегрального перетворення Мелера-Фока для неповного інтервалу $[\xi_0, +\infty)$. *На основі одержаного перетворення будується загальний розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у зрізаному двопорожнинному гіперболоїді обертання.*

Ключові слова: *інтегральне перетворення, крайова задача, двопорожнинний гіперболоїд, рівняння Лапласа.*

Постановка проблеми. Щоб знайти розв'язок крайової задачі теорії потенціалу для зрізаного двопорожнинного гіперболоїда обертання, необхідно спершу побудувати систему базисних функцій на неповному інтервалі $[\xi_0, \infty)$. В роботі $[4]$ ця спектральна задача розв'язана шляхом побудови дійсної форми узагального інтегрального перетворення Мелера-Фока. Проте, в деяких випадках, наприклад, при розв'язуванні задач теорії пружності, застосування дійсного перетворення пов'язане з подоланням значних математичних труднощів. Це стало причиною пошуку комплексного інтегрального перетворення на інтервалі $[\xi_0,\infty)$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Пріоритет у розв'язанні спектральної задачі на інтервалі $[\xi_0,\infty)$ належить Н.А. Беловой і Я.С. Уфлянду [5]. В роботі [4] аналогічне перетворення, але в функціях Лежандра, було отримане методом Тітчмарша [3].

Метою статті є побудова комплексного інтегрального перетворення на інтервалі $[\xi_0,\infty)$, яке б звело крайову задачу для двопорожнинного гіперболоїда до крайової задачі теорії функцій комплексної змінної.

Викладення основного матеріалу.

Теорема. Нехай $\omega(\nu)$ - голоморфна у смузі $|\mathrm{Re}\,\nu|<C$ функція комплексної змінної $\nu=\sigma+i\tau$, яка задовольняє умовам:

а) інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|(\sigma+i\tau)\,\omega(\sigma+i\tau)\right|d\tau$ збігається, якщо $\sigma\in(-C;C)$;

б) при $|\tau|\to\infty$ рівномірно для всіх $\sigma\in(-C;C)$: $\left|(\sigma+i\tau)\,\omega(\sigma+i\tau)\right|\to 0.$

Тоді, покладаючи

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty}\mu\,\omega(\mu)\,R_{-0,5+\mu}(ch\xi)\,d\mu, \tag{1}$$

для довільного ν, що у смузі $|\mathrm{Re}\,\nu|<C$, маємо:

$$\omega(\nu)=\frac{1}{sh\xi_0\varphi'(\xi_0,\xi_0,\nu)}\int\limits_{\xi_0}^{+\infty}f(\xi)\,\varphi(\xi,\xi_0,\nu)\,sh\xi\,d\xi\quad, \tag{2}$$

де

$$\varphi(\xi,\xi_0,\nu)=P_{-0,5+\nu}(ch\xi_0)\,L_{-0,5+\nu}(ch\xi)-P_{-0,5+\nu}(ch\xi)\,L_{-0,5+\nu}(ch\xi_0), \tag{3}$$

$$P_{-0,5+\nu}(ch\xi)=-\frac{\mathrm{ctg}\pi\nu}{\pi}\left[Q_{-0,5+\nu}(ch\xi)-Q_{-0,5-\nu}(ch\xi)\right], \tag{4}$$

$$L_{-0,5+\nu}(ch\xi)=\frac{1}{\pi}\left(Q_{-0,5+\nu}(ch\xi)+Q_{-0,5-\nu}(ch\xi)\right), \tag{5}$$

$$R_{-0,5+\nu}(ch\xi)=\frac{Q_{-0,5+\nu}(ch\xi)}{Q_{-0,5+\nu}(ch\xi_0)}, \tag{6}$$

$P_\mu(z),Q_\mu(z)$ - функції Лежандра відповідно першого та другого родів степеня μ [1]. Штрихом тут і далі позначено похідні функцій Лежандра по відповідній координаті, наприклад: $\varphi'(\xi,\xi_0,\nu)=\dfrac{d\varphi(\xi,\xi_0,\nu)}{\mathrm{d}\xi}$.

Доведення.◄ Підставимо вираз (1) для функції $f(\xi)$ у формулу (2), одержимо

$$\omega(\nu)=\frac{1}{\pi i\,sh\xi_0\varphi'(\xi_0,\xi_0,\nu)}\int\limits_{\xi_0}^{+\infty}\varphi(\xi,\xi_0,\nu)\,sh\xi\,d\xi\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty}\mu\omega(\mu)\mathrm{R}_{-0,5+\mu}(ch\xi)d\mu. \tag{7}$$

Розкладаючи функції Лежандра в гіпергеометричний ряд і враховуючи асимптотичні вирази для гама-функції [1], при $|\mu| \to \infty$ знаходимо

$$R_{-0,5+\mu}(ch\xi) \approx \mathrm{A}e^{-\mu(\xi-\xi_0)}, \tag{8}$$

де множник A не залежить від μ. Отже за умови а) теореми та асимптотичної формули (8) внутрішній інтеграл у формулі (7) збігається рівномірно. Змінивши порядок інтегрування у (7), маємо:

$$\omega(\nu) = \frac{1}{\pi i\, sh\xi_0 \varphi'(\xi_0,\xi_0,\nu)} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \mu\omega(\mu) I(\nu,\mu) d\mu, \tag{9}$$

де

$$I(\nu,\mu) = \int_{\xi_0}^{+\infty} \varphi(\xi,\xi_0,\nu) \mathrm{R}_{-0,5+\mu}(ch\xi)\, sh\xi\, d\xi. \tag{10}$$

З допомогою диференціальних співвідношень між функціями Лежандра встановлюємо, що первісною для невласного інтеграла (10) є функція

$$\mathrm{F}(\nu,\mu,\xi) = \frac{\mathrm{sh}\xi}{\mu^2-\nu^2}\left(\varphi(\xi,\xi_0,\nu)R'_{-0,5+\mu}(ch\xi) - R_{-0,5+\mu}(ch\xi)\varphi'(\xi,\xi_0,\nu)\right). \tag{11}$$

З'ясуємо умови, за яких $\mathrm{F}(\nu,\mu,\xi) \to 0$, коли $\xi \to \infty$. Враховуючи структуру виразу, спершу знайдемо асимптотичне наближення для функції Лежандра

$$Q_{-0,5+\nu}(ch\xi) \approx \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+0{,}5)}{\Gamma(\nu+1)} \mathrm{e}^{-\xi(\nu+0,5)} \quad (\xi \to \infty), \text{ де } \Gamma(z) - \text{гама-функція.} \tag{12}$$

Далі з допомогою формул (3) – (6), (11), (12) виводимо

$$\mathrm{F}(\nu,\mu,\xi) \approx \mathrm{M}\mathrm{e}^{-\xi(\mu-|\nu|)} \quad (\xi \to \infty), \tag{13}$$

де M – стала, що не залежать від змінної ξ. З виразу (13) випливає, що інтеграл $I(\nu,\mu)$ збігається при $\mathrm{Re}\mu > 0$, $\mathrm{Re}\mu > \mathrm{Re}\nu$ і його можна подати у вигляді:

$$I(\nu,\mu) = -\mathrm{F}(\nu,\mu,\xi_0) = \frac{\mathrm{sh}\xi_0}{\mu^2-\nu^2}\,\varphi'(\xi_0,\xi_0,\nu). \tag{14}$$

Після підстановки (14) у формулу (9) знаходимо:

$$\omega(\nu) = \frac{1}{\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\mu\omega(\mu)}{\mu^2-\nu^2} d\mu. \tag{15}$$

Далі маємо:

$$\omega(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\left(\frac{1}{\mu-\nu}+\frac{1}{\mu+\nu}\right)\omega(\mu)d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{\omega(\mu)}{\mu-\nu}d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int_{-C+i\infty}^{-C-i\infty}\frac{\omega(\mu)}{\mu-\nu}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_L \frac{\omega(\mu)}{\mu-\nu}d\mu - \int_{C+i\infty}^{-C+i\infty}\frac{\omega(\mu)}{\mu-\nu}d\mu - \int_{-C-i\infty}^{C-i\infty}\frac{\omega(\mu)}{\mu-\nu}d\mu\right] = \omega(\nu) + \frac{1}{\pi i}\int_{-C+i\infty}^{C+i\infty}\frac{\mu\omega(\mu)}{\mu^2-\nu^2}d\mu, \tag{16}$$

де L – прямокутник з вершинами $C-i\infty, C+i\infty, -C+i\infty, -C-i\infty$. За умови б) теореми інтеграл у правій частині рівності (16) зникає і теорема доведена.►

Застосуємо перетворення (1),(2) до розв'язування задачі Діріхле для скалярного потенціалу у нескінченному двопорожнинному гіперболоїді обертання з еліпсоїдальним вирізом. Будемо вважати, що межею цього гіперболоїда є координатні поверхні

$\xi = \xi_0 \ (0 \le \eta \le \eta_0)$ та $\eta = \eta_0 \ (\xi_0 \le \xi < +\infty)$ еліпсоїдальної системи координат. Еліпсоїдальні координати (ξ, η, ζ) пов'язані з циліндричними $(\mathrm{r}, \mathrm{z}, \varphi)$ за формулами $[2]$:

$$\mathrm{r} = \mathrm{c}\,\mathrm{sh}\xi \sin\eta\,, \mathrm{z} = \mathrm{c}\,\mathrm{ch}\xi \cos\eta\,,\ \varphi = \zeta \tag{17}$$

де $c = const$, $0 \le \xi < +\infty, 0 \le \eta \le \pi, 0 \le \zeta \le 2\pi$.

В еліпсоїдальних координатах рівняння Лапласа для скалярного потенціала $\vartheta(\xi,\eta)$ має вигляд:

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(sh\xi\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right) = 0. \tag{18}$$

Розв'язок рівняння (18) шукаємо у вигляді суми двох доданків:

$$\vartheta(\xi,\eta) = \vartheta_1(\xi,\eta) + \vartheta_2(\xi,\eta)\,, \tag{19}$$

де

$$\vartheta_1(\xi,\eta) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n R_{\lambda_n}(ch\xi) P_{\lambda_n}(\cos\eta)\,, \tag{20}$$

$$\vartheta_2(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \mu\, b(\mu) P_{-0,5+\mu}(\cos\eta) R_{-0,5+\mu}(ch\xi)\, d\mu\,, \tag{21}$$

$$\lambda_n:\ P_{\lambda_n}(\cos\eta_0) = 0, \quad \mathrm{Re}\,\mu > 0\,. \tag{22}$$

Функція $\vartheta_1(\xi,\eta)$ є загальним розв'язком зовнішньої задачі для еліпсоїда обертання. Вона подана у вигляді спектрального розкладення по базисних функціях $P_{\lambda_n}(\cos\eta)$ на поверхні $\xi = \xi_0 \ (0 \le \eta \le \eta_0)$. Функція $\vartheta_2(\xi,\eta)$ подана у вигляді інтегрального перетворення (1), (2) на поверхні $\eta = \eta_0 \ (\xi_0 \le \xi < +\infty)$ і є загальним розв'язком внутрішньої задачі для двопорожнинного гіперболоїда обертання.

Підпорядкувавши загальний розв'язок $\vartheta(\xi,\eta)$ умовам Діріхле

$$\vartheta(\xi_0,\eta) = \varphi(\eta)\,;\ \ \vartheta(\xi,\eta_0) = f(\xi)\,, \tag{23}$$

за стандартною процедурою прийдемо до співвідношень

$$a_{\mathrm{n}}^* + \frac{1}{\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \mu\, b^*(\mu) \frac{2\lambda_n + 1}{\left(\mu^2 - 0{,}25\right) - \lambda_n\left(\lambda_n + 1\right)} d\mu = \overline{\varphi}_n\,,\ \ b^*(\mu) = \bar{f}(\mu)\,, \tag{24}$$

де

$$a_{\mathrm{n}}^* = a_{\mathrm{n}} \dot{P}_{\lambda_n}(\cos\eta_0)\,, \quad b^*(\mu) = b(\mu) P_{-0,5+\mu}(\cos\eta_0)\,, \tag{25}$$

$$\overline{\varphi}_n = \frac{2\lambda_n + 1}{\sin\eta_0 P'_{\lambda_n}(\cos\eta_o)}\int_0^{\eta_0} \varphi(\eta) P_{\lambda_n}(\cos\eta)\sin\eta\, d\eta,$$

$$\dot{P}_{\lambda_n}(\cos\eta_0) = \left.\frac{dP_\lambda(\cos\eta_0)}{d\lambda}\right|_{\lambda = \lambda_n},\ \ P'_{\lambda_n}(\cos\eta_0) = \left.\frac{dP_{\lambda_n}(\cos\eta)}{d\eta}\right|_{\eta = \eta_0}, \tag{26}$$

$$\overline{f}(\mu) = \frac{1}{sh\xi_0\, \varphi'(\xi_0,\xi_0,\mu)}\int_{\xi_0}^{+\infty} f(\xi)\varphi(\xi,\xi_0,\mu) sh(\xi) d\xi.$$

Формально на цьому етапі задача може вважатись розв'язаною. Фактично ж при проведенні обчислень ще треба проаналізувати розв'зок для з'ясування швидкості збіжності рядів та інтегралів, а (при необхідності) і їх асимптотичного згортання.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Одержано комплексну форму узагальненого інтегрального перетворення Мелера-Фока. На основі цього перетворення побудовано загальний розв'язок рівняння Лапласа і доведено принципову можливість задоволення граничних умов на всій поверхні двопорожнинного гіперболоїда.

Наступним етапом дослідження має бути вивчення асимптотичних властивостей одержаного розв'язку і побудова методики його коректної числової реалізації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965 – 294 с.
2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952 – 476 с.
3. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.1 – М.: Изд-во иностр. лит. , 1960 – 278 с.
4. Улитко А. Ф Об одном обобщении интегрального преобразования. Мелера-Фока. – Прикл. механика, 1967, 3, № 5.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967 – 402 с.

Кильчинский А.А., Скрипка В.И.

ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЕРА-ФОКА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ДВУПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

Предлагается комплексная форма обобщенного интегрального преобразования Мелера-Фока для неполного интервала $[\xi_0,\infty)$. *На основе полученного преобразования строится общее решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в усеченном двуполостном гиперболоиде вращения.*

Ключевые слова: *интегральное преобразование, краевая задача, двуполостный гиперболоид, уравнение Лапласа.*

Kilchinsky A., Skrypka V.

GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORMATION OF THE MEHLER-FOCK IN THE PROBLEMS OF THE POTENTIAL THEORY FOR TWO HIPERBOLOID

An integrated form of the generalized integral transform of the Mehler-Fock for incomplete interval.On the basis of the obtained transformation is constructed the General solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a truncated two-hyperboloid of rotation.

Keywords: *integral transformation, boundary value problem, duopolistic hyperboloid, the Laplace equation.*