Mathematical Subject Classification: 35J25, 31B10
УДК 519.6

Ю. А. Музичук
Львівський національний університет імені І. Франка

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ РОБІНА, ОТРИМАНИХ У РЕЗУЛЬТАТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРРА МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Музичук Ю. А. Метод граничних інтегральних рівнянь в крайових задачах Робіна, отриманих у результаті перетворення Лагерра мішаних задач для еволюційних рівнянь. У тривимірних областях з ліпшицевою межею розглянуто зовнішню граничну задачу Робіна для нескінченної системи еліптичних рівнянь, отриманої в результаті застосування перетворення Лагера до змішаних задач для еволюційних рівнянь. За допомогою введеного поняття q-згортки для розглянутої задачі побудовано інтегральне зображення розв'язку. Досліджено існування і єдиність розв'язку отриманої системи граничних інтегральних рівнянь.
Ключові слова: метод граничних інтегральних рівнянь, перетворення Лагерра, еволюційне рівняння, крайова умова Робіна.

Музычук Ю. А. Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах Робина, полученных в результате преобразования Лагерра смешанных задач для эволюционных уравнений. В трехмерных областях с липшицевой границей рассмотрена внешняя краевая задача Робина для бесконечной системы эллиптических уравнений, полученной в результате применения преобразования Лагерра к смешанным задачам для эволюционных уравнений. С помощью введенного понятия q-свертки для рассматриваемой задачи построено интегральное представление решения. Исследовано существование и единственность решения полученной системы граничных интегральных уравнений.
Ключевые слова: метод граничных интегральных уравнений, преобразования Лагерра, эволюционное уравнение, краевое условие Робина.

Muzychuk Yu. On the boundary integral equations method for Robin boundary value problems received as a result of the Laguerre Transformation of mixed problems for evolution equations. We consider exterior boundary value problems for an infinite triangular system of elliptic equations obtained as a result of the application of the Laguerre transformation to mixed problems for evolution equations in 3d Lipschitz domains. With the help of introduced q-convolution the integral representation of the generalized solution of the formulated problem is built. We investigate the existence and uniqueness of the solution of the received system of boundary integral equations.
Key words: boundary integral equation method, Laguerre transformation, evolution equation, Robin condition.

Вступ. Універсальність методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) полягає в тому, що він використовується для теоретичного дослідження і чисельного розв'язування як крайових задач для еліптичних рівнянь, так і мішаних задач для параболічних та гіперболічних рівнянь. Характерною особливістю його застосування є пониження розмірності задачі на одиницю за рахунок переходу до даних Коші шуканого розв'язку, які розглядаються лише на межі області. Ця властивість методу є особливо важливою для чисельного розв'язування зовнішніх крайових задач, коли область, в якій шукають розв'язок задачі, є необмеженою.

У випадку еліптичних рівнянь теоретичні аспекти методу ГІР є добре дослідженими і висвітленими в літературі, див., наприклад, монографії [1, 2], де також подано широку бібліографію по ключових історичних віхах розвитку цього методу. Численні інженерні застосування методу в різних галузях науки та техніки підтверджують його ефективність [3].

У випадку мішаних (початково-крайових) задач для еволюційних рівнянь метод ГІР також використовується як для теоретичного дослідження, так і для чисельного моделювання, див., наприклад, [4, 5, 6, 7]. Але специфічна залежність ядер відповідних інтегральних операторів від просторових та часової координат ускладнює знаходження чисельного розв'язку інтегральних рівнянь. Тому поряд з безпосереднім застосуванням методів типу Гальоркіна та колокації, які добре зарекомендували себе у стаціонарних випадках, для розв'язування мішаних задач розвиваються спеціалізовані підходи, огляд яких можна знайти у згаданих вище працях і наведених там посиланнях. Зазвичай це комбіновані підходи, серед яких поширеними є інтегральні перетворення за часовою змінною, наприклад, Лапласа [4, 5, 6] чи Лагерра (ПЛ) [8, 9]. У першому випадку в просторі зображень отримують еліптичні крайові задачі, чисельне розв'язування яких комбінують зі складними алгоритмами оберненого перетворення.

Другий підхід приводить до нескінченної трикутної системи еліптичних крайових задач, а обернене перетворення полягає у підсумовуванні розвинення за простим ортогональним базисом. Основна ідея цього підходу полягає в поширенні на нескінченні послідовності функцій поняття поверхневих потенціалів із використанням згортки послідовностей. Компонентами згорток є дані Коші розв'язків (слід і нормальна похідна) нескінченної системи, з одного боку, з іншого — фундаментальний розв'язок оператора цієї системи та його нормальна похідна.

Використання таких потенціалів дає змогу побудувати інтегральне зображення розв'язку крайової задачі для нескінченної трикутної системи і перейти до послідовності інтегральних рівнянь. Вони відрізняються між собою лише правими частинами, до яких входять розв'язки рівнянь з попередніми номерами, а інтегральний оператор лівої частини не змінюється. Ця обставина створює передумову для розробки ефективних алгоритмів чисельного розв'язування інтегральних рівнянь.

Обґрунтування коректності внутрішніх крайових задач у просторі зображень і відповідних ГІР виконано у праці [10], а у [11] цей підхід поширено на зовнішні задачі і розглянуто ГІР першого та другого роду, які відповідають крайовій задачі Діріхле. Метою цієї роботи є отримання і дослідження системи ГІР для зовнішньої задачі Робіна з ліпшицевою межею. У першому розділі подано операторне формулювання крайової задачі і означення узагальненого розв'язку. У другому розділі за допомогою спеціальної згортки нескінченних послідовностей побудовано інтегральне зображення узагальненого розв'язку задачі Робіна, введено відповідні граничні оператори і подано граничні співвідношення для сліду і нормальної похідної узагальненого розв'язку. В третьому розділі виведено систему ГІР, для якої встановлено еквівалентність вихідній крайовій задачі і доведено існування та єдиність її розв'язку.

Основні результати.

1. Формулювання крайової задачі

Нехай Ω і $\Omega^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ — відповідно обмежена однозв'язна область і доповнення її замикання до повного простору $\mathbb{R}^3$, Γ — їх спільна межа, яка є ліпшицевою поверхнею. Розглядатимемо нескінченну систему рівнянь в Ω^+:

$$\begin{cases} Pu_0 = f_0 \ , \\ c_{1,0}u_0 + Pu_1 = f_1 \ , \\ c_{2,0}u_0 + c_{2,1}u_1 + Pu_2 = f_2 \ , \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ c_{k,0}u_0 + c_{k,1}u_1 + ... + c_{k,k-1}u_{k-1} + Pu_k = f_k \ , \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{cases} \tag{1}$$

де $u_i \, (i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$ — невідомі функції, $f_i \; (i \in \mathbb{N}_0)$ — задані в Ω^+ функції. У формальному диференціальному операторі другого порядку

$$P := -\Delta + \kappa^2$$

Δ позначає оператор Лапласа, а коефіцієнт κ залежить від параметра $\sigma > 0$ перетворення Лагерра, за допомогою якого система (1) була отримана з деякого еволюційного рівняння [9]. Зокрема, $\kappa = \sqrt{\sigma}$, якщо це було рівняння теплопровідності, і $\kappa = \sigma$ – хвильове рівняння. Задані сталі $c_{i,j} \; (i, j \in \mathbb{N}_0)$ є елементами нескінченної трикутної матриці, $c_{i,j} = 0$ при $j \geqslant i$.

Нехай одиничний вектор нормалі $\bar{\nu}(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ до Γ напрямлений назовні з області Ω. Розглядатимемо крайову задачу для системи (1), яка полягає у відшуканні її розв'язків, що задовольняють на межі Γ таку умову:

$$(\partial_{\bar{\nu}} u_k - (b_{k,0}u_0 + b_{k,1}u_1 + ... + b_{k,k-1}u_{k-1} + b_{k,k}u_k))\,|_\Gamma = \tilde{g}_k, \; k \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Тут $\tilde{g}_i \; (i \in \mathbb{N}_0)$ – задані функції (функціонали)на Γ, $b_{i,j} \in L^\infty(\Gamma) \; (i, j \in \mathbb{N}_0)$ – задані функції на Γ, причому $b_{i,j} = 0$ при $j > i \geqslant 0$ та $b_{i,i} \geqslant \tilde{b}_i > 0$, де $\tilde{b}_i$ – деякі сталі. При $k = 0$ це співвідношення має вигляд $(\partial_{\bar{\nu}} u_0 - b_{0,0}u_0)\,|_\Gamma = \tilde{g}_0$ і відоме як крайова умова Робіна [16]. За аналогією (2) також називатимемо умовою Робіна і, відповідно, задачу (1), (2) – крайовою задачею Робіна.

Зауважимо, що трикутний характер системи (1) дає змогу покроково знаходити невідомі функції $u_k, \; k \in \mathbb{N}_0$. А саме, розв'язуючи k-те рівняння $(k \geqslant 1)$, можна вважати, що усі розв'язки $u_i, \; 0 \leqslant i \leqslant k-1$, вже знайдені на попередніх кроках і перенести їх у праву частину рівняння. Однак такий підхід нівелює переваги методу ГІР, оскільки вимагатиме додаткового обрахунку об'ємних потенціалів від комбінації функцій $u_i, \; 0 \leqslant i \leqslant k-1$, знайдених на попередніх кроках. Метод, запропонований у [10] для розв'язування внутрішніх задач для системи (1), дає змогу уникнути цього недоліку та побудувати ефективний алгоритм знаходження чисельного розв'язку. У праці [11] цей метод поширено також на зовнішню задачу Діріхле.

Ми використовуватимемо простір Лебега $L_2(\Omega^+)$ та простори Соболєва $H^1(\Omega^+)$ і $H^1_0(\Omega^+)$ скалярних дійснозначних функцій та спряжені з ними, відповідно,

$\widetilde{H}^{-1}(\Omega^+) := \left(H^1(\Omega^+)\right)'$ та $H^{-1}(\Omega^+) := \left(H^1_0(\Omega^+)\right)'$. Під $\mathcal{D}(\Omega^+)$ та $\mathcal{D}'(\Omega^+)$ розумітимемо простори тестових функцій та розподілів над ними.

Наступна білінійна форма

$$a_{\Omega^+}(u,v) := \int_{\Omega^+} \left[\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + \kappa^2 u(x)v(x)\right] dx \tag{3}$$

є визначеною для довільних функцій $u, v \in H^1(\Omega^+)$. Відомо (див., наприклад, [15] та [4, 7]), що її можна розглядати як скалярний добуток у $H^1(\Omega^+)$, через який можна ввести нову норму $|||u||| := (a_{\Omega^+}(u,u))^{1/2}$, яка буде еквівалентною звичайній нормі. Очевидно, що ця форма є $H^1(\Omega^+)$-еліптичною.

Також будемо розглядати у $H^1(\Omega^+)$ такий підпростір

$$H^1(\Omega^+, P) := \left\{\ u \in H^1(\Omega^+)\ \middle|\ Pu \in L_2(\Omega^+)\ \right\},$$

наділений нормою

$$||u||_{H^1(\Omega^+,P)} := \left(\ ||u||^2_{H^1(\Omega^+)} + ||Pu||^2_{L_2(\Omega^+)}\ \right)^{1/2}.$$

Нехай $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — оператор сліду та $\gamma_1^+ : H^1(\Omega^+, P) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ — оператор нормальної похідної, який у випадку функцій з $H^2(\Omega^+)$ і достатньо гладкої межі Γ співпадає з нормальною похідною

$$\partial_{\bar\nu} u(x) := \nabla u(x)\cdot\nu(x),\ x \in \Gamma.$$

Відомо ([1], Теорема 4.4), що для функцій $u \in H^1(\Omega^+, P)$ та $v \in H^1(\Omega^+)$ справедлива перша формула Гріна

$$(Pu, v)_{\Omega^+} = a_{\Omega^+}(u,v) + \langle \gamma_1^+ u, \gamma_0^+ v\rangle_\Gamma, \tag{4}$$

де $(\cdot,\cdot)_{\Omega^+}$ та $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ позначають, відповідно, скалярний добуток у $L_2(\Omega^+)$ та відношення двоїстості між $H^{-1/2}(\Gamma)$ та $H^{1/2}(\Gamma)$.

Нехай X — довільний лінійний простір над полем дійсних чисел, $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Під X^∞ позначатимемо лінійний простір відображень $\mathbf{u} : \mathbb{Z} \to X$, де $u(k) = 0$ при $k < 0$. Для довільного елемента $\mathbf{u} \in X^\infty$ матимемо $u_k \equiv (\mathbf{u})_k := \mathbf{u}(k), k \in \mathbb{Z}$, та позначатимемо його як $\mathbf{u} := (u_0, u_1, ..., u_k, ...)^\top$. Надалі називатимемо елементи X^∞ послідовностями.

Будемо використовувати трикутні матричні оператори $\mathbf{C} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ та $\mathbf{B} : (L_2(\Gamma))^\infty \to (L_2(\Gamma))^\infty$, які діють таким чином: $(\mathbf{Cu})_k = \sum\limits_{l=0}^{k} c_{k,l}\cdot(\mathbf{u})_l$, $(\mathbf{Bu})_k = \sum\limits_{l=0}^{k} b_{k,l}\cdot(\mathbf{u})_l,\ k \in \mathbb{N}_0$, де $c_{k,l}$ і $b_{k,l}$ коефіцієнти системи (1) та крайової умови (2).

Позначимо послідовності

$$\mathbf{a}_{\Omega^+}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := (a_{\Omega^+}(u_0,v_0),\ a_{\Omega^+}(u_1,v_1),\ ...)^\top,\ \ \mathbf{u},\mathbf{v} \in (H^1(\Omega^+))^\infty,$$

та

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_X := ((u_0,v_0)_X,\ (u_1,v_1)_X,\ ...)^\top,\ \ \mathbf{u},\mathbf{v} \in (X)^\infty,$$

де X — деякий Гільбертів простір. Подібним чином позначатимемо послідовності на основі відношення двоїстості. Наприклад, якщо $\mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ та $\mathbf{v} \in H^{1/2}(\Gamma)$, то писатимемо $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma := (\langle u_0, v_0 \rangle_\Gamma, \langle u_1, v_1 \rangle_\Gamma, ...)^\top$. Аналогічно покомпонентно будемо трактувати дію деяких лінійних операторів (функціоналів) на нескінченні послідовності. Зокрема, для послідовності $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+))^\infty$ введемо поняття сліду як послідовності слідів її компонентів, тобто послідовність $\gamma_0^+ \mathbf{u} := (\gamma_0^+ u_0, \gamma_0^+ u_1, ...)^\top$ вважаємо слідом послідовності $\mathbf{u}$ на поверхні Γ. Якщо $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+, P))^\infty$, то послідовність $\gamma_1^+ \mathbf{u} := (\gamma_1^+ u_0, \gamma_1^+ u_1, ...)^\top$ будемо називати зовнішньою нормальною похідною послідовності $\mathbf{u}$ на межі області.

Враховуючи попередні означення, узагальнений розв'язок задачі Робіна для системи (1) можна визначити так.

Означення 1. *Нехай* $\mathbf{f} \in (\widetilde{H}^{-1}(\Omega))^\infty$ *і* $\tilde{\mathbf{g}} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$. *Послідовність* $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+))^\infty$ *називатимемо узагальненим розв'язком задачі Робіна* (1), (2), *якщо вона задовольняє варіаційну рівність*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\Omega^+}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\Omega^+} + \langle \boldsymbol{B}\gamma_0^+ \boldsymbol{u}, \gamma_0^+ \boldsymbol{v} \rangle_\Gamma = \\ = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\Omega^+,1} - \langle \tilde{\mathbf{g}}, \gamma_0^+ \boldsymbol{v} \rangle_\Gamma, \ \ \forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega^+))^\infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут і далі $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega^+,1}$ позначає відношення двоїстості між просторами $\tilde{H}^{-1}(\Omega^+)$ та $H^1(\Omega^+)$.

Відомо [11], що задача Робіна (1), (2) має єдиний узагальнений розв'язок. На основі оператора P задамо матричний (діагональний) оператор $\mathbf{P}$, який діє на послідовність $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+))^\infty$ за правилом: $(\mathbf{P}\mathbf{u})_k = P u_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Тоді за умови $\mathbf{f} \in (L_2(\Omega^+))^\infty$ можна подати таке еквівалентне операторне формулювання задачі Робіна [11]: для заданих послідовностей $\mathbf{f} \in (L_2(\Omega^+))^\infty$ і $\tilde{\mathbf{g}} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$ знайти розв'язок $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+, P))^\infty$, який задовольняє операторне рівняння

$$\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ в } (L_2(\Omega^+))^\infty, \ \mathbf{G} := \mathbf{P} + \mathbf{C}, \tag{6}$$

і крайову умову Робіна

$$\gamma_1^+ \mathbf{u} - \mathbf{B}\gamma_0^+ \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{g}} \ \text{ в } \ (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty. \tag{7}$$

2. Основні співвідношення для узагальненого розв'язку задачі

Зазначимо, що фундаментальний розв'язок оператора $\mathbf{G}$ є необхідною складовою частиною для побудови методу ГІР. Називатимемо послідовність $\widetilde{\mathbf{E}}(x, y) = \left(\widetilde{E}_0(x, y), \ \widetilde{E}_1(x, y), \ ...\right)^\top$, $x, y \in \mathbb{R}^3$, фундаментальним розв'язком оператора $\mathbf{G}$, якщо вона задовольняє рівняння

$$\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\delta}_y \text{ in } \left(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\right)^\infty,$$

де $\boldsymbol{\delta}_y(x) = (\ \delta_y(x), \ \delta_y(x), \ ...\ )^\top$ та $\delta_y(\cdot) := \delta(\cdot - y)$ — дельта-функція Дірака. Перший компонент цієї послідовності є фундаментальним розв'язком оператора P:

$$\widetilde{E}_0(x, y) := \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \ x, y \in \mathbb{R}^3. \tag{8}$$

У статті [12] розглядаються такі розв'язки за умови виконання співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i}\xi_i\eta_{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i}\eta_i\xi_{n-k}, \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^\infty, \tag{9}$$

що є характерним для систем (1), отриманих у результаті застосування перетворення Лагерра до рівняння теплопровідності або до хвильового рівняння [9]. Наприклад, якщо система (1) відповідає хвильовому рівнянню, то компоненти фундаментального розв'язку оператора $\mathbf{G}$ є такими:

$$\widetilde{E}_i(x,y) := \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}\mathcal{L}_i(\kappa|x-y|), \quad \forall i\in\mathbb{N}_0, \quad x,y\in\mathbb{R}^3, \tag{10}$$

де $\mathcal{L}_i$ позначає многочлен Лагерра [14].

Далі для зображення розв'язків вихідної нескінченної системи будемо використовувати спеціальну операцію згортки послідовностей. Нехай X, Y та Z — довільні лінійні простори і $q : X\times Y\to Z$ — деяке відображення.

Означення 2. *q-згорткою послідовностей $\boldsymbol{u}\in X^\infty$ та $\boldsymbol{v}\in Y^\infty$ називатимемо послідовність $\boldsymbol{w}\in Z^\infty$, яка визначається за правилом*

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\underset{q}{\circ}\boldsymbol{v}, \tag{11}$$

де $w_n \equiv (\boldsymbol{u}\underset{q}{\circ}\boldsymbol{v})_n := \sum_{i=0}^{n} q\,(u_{n-i}, v_i)$, якщо $n\ge 0$, та $w_n = 0$ при $n<0$.

Для деяких відображень спрощуватимемо позначення q-згортки. Наприклад, у випадку $q(u,v) := \langle u,v\rangle_\Gamma$ будемо записувати $\mathbf{u}\underset{\Gamma}{\circ}\mathbf{v} := \mathbf{u}\underset{q}{\circ}\mathbf{v}$.

За допомогою q-згортки побудуємо послідовності, які за аналогією з теорією еліптичних рівнянь також називатимемо потенціалами. Для цього використаємо послідовність $\mathbf{E}(x,y) = (E_0(x,y),\ E_1(x,y),\ \ldots)^\top$, де

$$E_i(x,y) := \widetilde{E}_i(x,y) - \widetilde{E}_{i-1}(x,y),\ i\in\mathbb{N},\ \ E_0(x,y) = \widetilde{E}_0(x,y),\ x,y\in\mathbb{R}^3. \tag{12}$$

Означення 3. *Нехай $\boldsymbol{\lambda}\in\left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ та $\boldsymbol{\mu}\in\left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$. Послідовності*

$$\boldsymbol{V\mu}(x) := (\boldsymbol{V\mu})(x) \equiv \boldsymbol{\mu}(\cdot)\underset{\Gamma}{\circ}\boldsymbol{E}(x-\cdot),\ x\in\Omega^+, \tag{13}$$

та

$$\boldsymbol{W\lambda}(x) := (\boldsymbol{W\lambda})(x) \equiv \partial_{\bar{\nu}(\cdot)}\boldsymbol{E}(x-\cdot)\underset{\Gamma}{\circ}\boldsymbol{\lambda}(\cdot),\ x\in\Omega^+, \tag{14}$$

називатимемо відповідно потенціалами простого і подвійного шару стосовно поверхні Γ для оператора $\boldsymbol{G}$.

Відомо ([11], лема 1), що для довільних $\boldsymbol{\lambda}\in\left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ та $\boldsymbol{\mu}\in\left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ поверхневі потенціали $\mathbf{u} = \mathbf{V}\boldsymbol{\mu}$ і $\mathbf{u} = \mathbf{W}\boldsymbol{\lambda}$ є узагальненими розв'язками однорідного рівняння

$$\mathbf{Gu} = \mathbf{0}\ \text{ в } \mathbb{R}^3\setminus\Gamma. \tag{15}$$

Подібно до поверхневих потенціалів, за допомогою q-згортки можна також визначити об'ємний потенціал в $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ та використати його для отримання часткового розв'язку системи (1). Оскільки його основні властивості досліджені в [10], то далі будемо розглядати лише однорідну систему (15).

Нехай $\gamma_0^- : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — оператор сліду, а $\gamma_1^- : H^1(\Omega, P) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ — оператор нормальної похідної і $[\gamma_0 u] := \gamma_0^+ u - \gamma_0^- u$, $[\gamma_1 u] := \gamma_1^+ u - \gamma_1^- u$ — їхні стрибки при переході через межу Γ. Тоді розв'язок рівняння (15) можна виразити через його дані Коші [11]:

Теорема 1. *Послідовність* $\boldsymbol{u} \in \left(H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, P)\right)^\infty$*, яка задовольняє рівняння* (15) *в* $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$*, можна подати у вигляді*

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{W\lambda}(x) - \boldsymbol{V\mu}(x),\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \tag{16}$$

де $\boldsymbol{\lambda} := [\gamma_0 \boldsymbol{u}]$ *та* $\boldsymbol{\mu} := [\gamma_1 \boldsymbol{u}]$.

Нагадаємо основні властивості поверхневих потенціалів. Розглянемо граничні оператори

$$\begin{aligned} &\mathbf{V} : (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{1/2}(\Gamma))^\infty, \quad &&\mathbf{K}' : (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty, \\ &\mathbf{K} : (H^{1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{1/2}(\Gamma))^\infty, \quad &&\mathbf{D} : (H^{1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty, \end{aligned}$$

визначені для довільних послідовностей $\boldsymbol{\lambda} \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ та $\boldsymbol{\mu} \in \left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ за допомогою q-згортки таким чином:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{V}\boldsymbol{\mu})_i := \sum_{j=0}^{i} V_j \mu_{i-j}, \quad &&(\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda})_i := \sum_{j=0}^{i} K_j \lambda_{i-j}, \\ &\left(\mathbf{K}'\boldsymbol{\mu}\right)_i := \sum_{j=0}^{i} K'_j \mu_{i-j}, \quad &&(\mathbf{D}\boldsymbol{\lambda})_i := \sum_{j=0}^{i} D_j \lambda_{i-j},\ i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Компоненти цих послідовностей визначені так:

$$\begin{aligned} &V_j\mu := \gamma_0^+ V_j \mu,\ D_j\lambda := -\gamma_1^+ W_j \lambda,\ \ j \in \mathbb{N}_0, \\ &K'_0\mu := \gamma_1^+ V_0 \mu - \frac{1}{2}\mu,\ \ K'_j\mu := \gamma_1^+ V_j \mu,\ \ j \in \mathbb{N}, \\ &K_0\lambda := \gamma_0^+ W_0 \lambda + \frac{1}{2}\lambda,\ \ K_j\lambda := \gamma_0^+ W_j \lambda,\ \ j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Наступна теорема [11] стосується даних Коші узагальненого розв'язку однорідного рівняння (15):

Теорема 2. ***(i)*** *Якщо пара послідовностей* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty \times \left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ *є даними Коші деякого узагальненого розв'язку рівняння* (15)*, то вона задовольняє рівняння*

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{V\mu} = 0 \quad \text{у} \ \ (H^{1/2}(\Gamma))^\infty \tag{17}$$

та

$$\boldsymbol{D\lambda} + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}'\right)\boldsymbol{\mu} = 0 \quad \text{у} \ \ (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty. \tag{18}$$

(ii) *Якщо пара послідовностей* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty \times \left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ *задовольняє одне з двох рівнянь* (17) *чи* (18)*, то вона задовольняє і друге та є даними Коші деякого узагальненого розв'язку рівняння* (15)*.*

3. Граничні інтегральні рівняння

Теорема 2 обґрунтовує перехід від крайових задач в області Ω^+ до ГІР на межі Γ стосовно невідомих даних Коші узагальненого розв'язку. Оскільки у крайових умовах Діріхле і Неймана в явному вигляді присутні слід або нормальна похідна розв'язку відповідних задач, то для знаходження невідомих даних можна отримати ГІР першого або другого роду, використавши одне із співвідношень (17) чи (18). Такі рівняння досліджені в [10, 11]. У випадку задачі Робіна (1), (2) жодна з частин даних Коші розв'язку не є заданою окремо, а натомість вони взаємопов'язані крайовою умовою (2). Визначимо з неї нормальну похідну $\boldsymbol{\mu}$ і підставимо її у (18). Тоді від рівностей (17) і (18) прийдемо до такої системи ГІР

$$\begin{cases} \mathbf{V}\boldsymbol{\mu} + \left(\dfrac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}\right)\boldsymbol{\lambda} = 0 \quad \text{в} \ \ (H^{1/2}(\Gamma))^\infty, \\ \left(-\dfrac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}'\right)\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{B} + \mathbf{D})\,\boldsymbol{\lambda} = -\tilde{\mathbf{g}} \quad \text{в} \ \ (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 3. *Слід і нормальна похідна узагальненого розв'язку* $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega, P))^\infty$ *задачі Робіна* (1), (2) *задовольняють систему граничних рівнянь* (19)*. Навпаки, якщо пара послідовностей* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ *є розв'язком системи граничних рівнянь* (19)*, то функція, побудована за формулою* (16)*, є узагальненим розв'язком задачі Робіна* (1), (2)*.*

Доведення. Нехай послідовність $\mathbf{u}$ є узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2). Оскільки $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega, P))^\infty$, то за теоремою про сліди і лемою 3.2 [13] існують слід і нормальна похідна кожного компонента цієї послідовності, тобто існує пара послідовностей $\gamma_0\mathbf{u} =: \boldsymbol{\lambda} \in (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$ і $\gamma_1\mathbf{u} =: \boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$. Згідно з теоремою 2 ця пара послідовностей задовольняє рівність (17) (яка також є першим рівнянням системи (19)), а також рівність (18). Як дані Коші узагальненого розв'язку, ця пара також задовольняє крайову умову (2). Якщо з (2) визначити нормальну похідну розв'язку через його слід і підставити її в рівність (18), то отримаємо друге рівняння системи (19).

Нехай тепер пара послідовностей $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in (H^{1/2}(\Gamma))^\infty \times (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$ є розв'язком системи граничних рівнянь (19). Оскільки ці послідовності задовольняють рівність (17), то згідно з теоремою 2 вони задовольняють і (18), а також є даними Коші узагальненого розв'язку рівняння (15) (тобто системи (1)). Легко бачити, що якщо з рівності (18) визначити

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{K}'\boldsymbol{\mu}$$

і підставити цей вираз у друге рівняння системи (19), то отримаємо рівність

$$-\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} = -\tilde{\mathbf{g}} \quad \text{в} \ \ (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty,$$

яка є записом крайової умови (2) через пару послідовностей $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$.

Введемо гільбертів простір $\mathcal{H}(\Gamma) := H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, елементами якого є пари $\phi := (\mu, \lambda)^\top, \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$, зі скалярним добутком $(\phi_1, \phi_2)_{\mathcal{H}(\Gamma)} := (\mu_1, \mu_2)_{H^{-1/2}(\Gamma)} + (\lambda_1, \lambda_2)_{H^{1/2}(\Gamma)}$ та нормою $||\phi||_{\mathcal{H}(\Gamma)} := (\phi, \phi)^{1/2}_{\mathcal{H}(\Gamma)}$, а також простір $\mathcal{H}^*(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Розглядатимемо такі матричні оператори

$$A_0 = \begin{pmatrix} V_0 & (\frac{1}{2}I - K_0) \\ (-\frac{1}{2}I + K_0') & (b_{0,0}I + D_0) \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} V_j & -K_j \\ K_j' & (B_j + D_j) \end{pmatrix}, \ j \in \mathbb{N}_0. \tag{20}$$

Тоді ліву частину системи (19) можна трактувати як дію оператора $\mathbf{A} : (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty \to (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty$ на довільну послідовність $\boldsymbol{\phi} \in (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty$ за правилом

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{\phi})_k := \sum_{i=0}^{k} A_{k-i}\phi_i, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{21}$$

Лема 1. *Оператор* $\boldsymbol{A} : (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty \to (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty$ *є бієктивним.*

Доведення. Спочатку покажемо ін'єктивність оператора $\mathbf{A}$, що еквівалентно існуванню лише тривіального розв'язку для однорідного рівняння

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{\phi} \in (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty. \tag{22}$$

Якщо перейти до покомпонентного запису, то стосовно компонента ϕ_0 матимемо рівняння

$$A_0\phi_0 = 0, \quad \phi_0 \in \mathcal{H}(\Gamma). \tag{23}$$

Дослідимо оператор $A_0 : \mathcal{H}(\Gamma) \to \mathcal{H}^*(\Gamma)$. Якщо взяти до уваги еліптичність операторів V_0 і D_0, а також спряженість K_0' і K_0, то $\forall \phi = (\mu, \lambda)^\top \in \mathcal{H}(\Gamma)$ матимемо таку оцінку

$$\begin{aligned} &\langle A_0\phi, \phi\rangle_{\mathcal{H}^*(\Gamma)\times\mathcal{H}(\Gamma)} = \left\langle A_0 \begin{pmatrix}\mu \\ \lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu \\ \lambda\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^*(\Gamma)\times\mathcal{H}(\Gamma)} = \\ &= \langle V_0\mu, \mu\rangle_\Gamma + \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K_0\right)\lambda, \mu \right\rangle_\Gamma + \left\langle \left(-\frac{1}{2}I + K_0'\right)\mu, \lambda \right\rangle_\Gamma + \langle (b_{0,0}I + D_0)\lambda, \lambda\rangle_\Gamma \geqslant \\ &\geqslant c_V ||\mu||^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + c_D ||\lambda||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + b_{0,0}\langle\lambda, \lambda\rangle_\Gamma \geqslant \\ &\geqslant c\left(||\mu||^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + ||\lambda||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right) = c||\phi||^2_{\mathcal{H}(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{24}$$

де $c_V, c_D, c > 0$ — деякі сталі. Отже, цей оператор є $\mathcal{H}(\Gamma)$-еліптичним, тому рівняння (23) має лише нульовий розв'язок $\phi_0 = 0$. Тоді для компонента ϕ_1 з (22) отримаємо те ж саме рівняння $A_0\phi_1 = 0, \quad \phi_1 \in \mathcal{H}(\Gamma)$, звідки $\phi_1 = 0$. Якщо повторювати такі кроки далі, то кожного разу матимемо те ж саме граничне рівняння з тривіальним розв'язком. Отже, рівняння (22) має лише тривіальний розв'язок $\boldsymbol{\phi} = 0$, тобто оператор $\mathbf{A}$ — ін'єктивний.

Доведемо тепер сюр'єктивність оператора $\mathbf{A}$. Нехай $\boldsymbol{\psi} \in (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty$ — задана послідовність. Розглянемо граничне рівняння

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\psi} \quad \text{в} \quad (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty. \tag{25}$$

Зокрема, для компонента ϕ_0 маємо таке матричне рівняння

$$A_0\phi_0 = \psi_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^*(\Gamma). \tag{26}$$

Оскільки оператор A_0 є $\mathcal{H}(\Gamma)$-еліптичним і неперервним (всі його елементи-оператори обмежені), то з леми Лакса–Мільграма випливає існування та єдиність розв'язку $\phi_0 \in \mathcal{H}(\Gamma)$ рівняння (26).

Після знаходження ϕ_0 його можна перенести у праву частину граничного рівняння, яке отримаємо з (25) відносно вектора ϕ_1. Тоді в лівій частині цього рівняння з невідомих залишиться лише один компонент ϕ_1. Якщо вважати, що для довільного значення $k \in \mathbb{N}$ вже розв'язані рівняння з індексами $0 \leqslant i \leqslant k-1$, то у рівнянні з індексом k завжди можна виокремити і залишити у лівій частині вираз, до якого входить лише невідомий компонент ϕ_k, а решту перенести у праву частину:

$$A_0\phi_k = \psi_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i}\phi_i \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^*(\Gamma). \tag{27}$$

Отримане рівняння відрізняється від (26) лише правою частиною

$$\tilde{\psi}_k := \psi_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i}\phi_i, \tag{28}$$

до якої входять також компоненти ϕ_i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, – розв'язки попередніх рівнянь. Легко бачити, що $\tilde{\psi}_k \in \mathcal{H}^*(\Gamma)$. Тоді, за аналогією до рівняння (26), на кожному кроці існуватиме єдиний розв'язок $\phi_k \in \mathcal{H}(\Gamma)$ рівняння (27). Отже, для довільної послідовності $\boldsymbol{\psi} \in (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty$ існує розв'язок $\boldsymbol{\phi} \in (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty$ рівняння (25), тобто оператор $\mathbf{A}$ — сюр'єктивний.

Теорема 4. *Для довільної послідовності $\tilde{\boldsymbol{g}} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$ система граничних рівнянь* (19) *має єдиний розв'язок* $(\mu_0, \lambda_0, \mu_1, \lambda_1, ...)^\top \in (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty$.

Доведення. Твердження теореми справджується на підставі попередньої леми, якщо в рівнянні (25) покласти

$$\boldsymbol{\psi} := (0, -\tilde{g}_0, 0, -\tilde{g}_1, ...)^\top \in (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty. \tag{29}$$

Висновки. Як виявилося при доведенні попередньої леми, систему граничних рівнянь (19) можна подати у вигляді послідовності матричних рівнянь (27). Подібно до послідовностей ГІР, еквівалентних задачам Діріхле та Неймана, в отриманій послідовності оператор у лівій частині залишається незмінним для довільного значення індексу $k \in \mathbb{N}_0$, а права частина рекурентно залежить від розв'язків зі значеннями індексу $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Зазначимо, що ця обставина є наслідком використання q-згортки для інтегрального зображення розв'язку. Вона створює передумови для ефективної чисельної реалізації запропонованого підходу.

Отож, розв'язуючи систему ГІР (25), можна за формулою (16) послідовно знаходити компоненти узагальненого розв'язку задачі (1), (2). Використовуючи їх як коефіцієнти розвинення по ортогональних функціях Лагерра, можна знаходити чисельний розв'язок відповідних мішаних задач для еволюційних рівнянь [9].

1. **McLean W.** Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations / W. McLean – Cambridge University Press, 2000. – 357 p.
2. **Hsiao G.C.** Boundary Integral Equations / G. C. Hsiao, W. L. Wendland – Springer-Verlag, Berlin, 2008. – 640 p.
3. **Steinbah O.** Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems / O. Steinbah – Springer Science, 2008. – 396 p.
4. **Bamberger A.** Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retarde de la diffraction d'une onde acoustique (I) / A. Bamberger, T. Ha-Duong // Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – V. 8(3). – P. 405–435.
5. **Bamberger A.** Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide / A. Bamberger, T. Ha-Duong // Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – V. 8(4). – P. 598–608.
6. **Lubich C.** On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations / C. Lubich // Numer. Math. – 1994. – V. 67. – P. 365–389.
7. **Laliena A.R.** A distributional version of Kirchhoff's formula / A. R. Laliena, F. J. Sayas // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – V. 359. – P. 197–208.
8. **Літинський С.** Про слабкі розв'язки крайових задач для нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь / С. Літинський, Ю. Музичук, А. Музичук // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. інформ. – 2009. – Вип. 15. – С. 52–70.
9. **Chapko R.** On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications. – 2000. – V. 2. – P. 55–69.
10. **Muzychuk Yu. A.** On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu. A. Muzychuk, R. S. Chapko // Matematychni Studii. – 2012. – V. 38(1). – P. 12–34.
11. **Muzychuk Yu. A.** On the boundary integral equation method for exterior boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu. A. Muzychuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2014. (в друці)
12. **Музичук Ю.** Про метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування крайових задач для систем еліптичних рівнянь спеціального виду у частково–необмежених областях / Ю. Музичук, Р. Хапко // Доповіді НАН України. – 2012. – Т. 11. – С. 20–27.
13. **Costabel M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – V. 19. – P. 613–626.
14. **Funaro D.** Polynomial Approximations of Differential Equations / D. Funaro – Springer-Verlag, 1992.
15. **Sybil Yu.** Three-dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu. Sybil // Matematychni Studii. – 1997. – V. 8. – P. 79–96.
16. **Dautray R.** Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, vol. 2. Functional and Variational Methods / R. Dautray, J.-L. Lions – Springer-Berlin, 2000.