УДК 517.911.5

Н. В. Скрипник
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Интегральные уравнения находят многочисленные приложения в различных областях знаний, таких как теория упругости, передача тепла и массы, теория колебаний, динамика жидкости, теория фильтрации, электростатика, электродинамика, биомеханика, теория игр, теория управления, теория голосования, электротехника, экономика и медицина. Исследование реальных процессов, основанных на идеализированных математических моделях, приводит чаще всего к уравнениям с малыми параметрами. Для их исследования широко используются различные асимптотические методы. Выбор конкретного асимптотического метода зависит от структуры уравнения, описывающего динамику объекта. В последнее время методы усреднения получили широкое развитие в нелинейной механике и теории колебаний. В статье обоснована возможность применения метода усреднения для нечеткого интегрального уравнения с постоянным запаздыванием.

MSC: 03E72, 34A07, 34C29.
Ключевые слова: нечеткие интегральные уравнения, метод усреднения, запаздывание

Введение. Теория нечетких множеств является очень удобным аппаратом моделирования неопределенности. С одной стороны, она дает более широкие возможности, чем, например, интервальный анализ, поскольку совмещает его с использованием вероятностных оценок. С другой стороны, она отличается от теории вероятностей в основных модельных предположениях, подходе и утверждениях. Теория нечетких множеств может использоваться в ситуациях, когда применить вероятностную интерпретацию невозможно, например, если флуктуации переменной не стохастичны по своей природе, если недоступны статистические данные, если имеющейся информации недостаточно для того, чтобы утверждать выполнение вероятностных аксиом.

Поэтому нечеткие системы — очень важная тема как с теоретической точки зрения, так и с практической. Они находят применение, например, в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в строительстве, в создании гидравлических и популяционных моделей, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений, при прогнозировании различных экономических, политических, биржевых ситуаций и т. д. Нечеткие системы являются естественным способом моделирования динамических систем в условиях неопределенности. Формализация нечетких понятий позволяет приближенно описывать поведение систем настолько сложных и плохо обусловленных, что они не поддаются точному математическому анализу. В ряде случаев такое описание является единственно возможным, потому что в реальных ситуациях закономерности, ограничения, критерии выбора в больший части субъективны и точно не определены. С 1965 г., когда L. Zadeh опубликовал свою новаторскую работу [1], были

Получена 05.10.2016

рассмотрены сотни примеров, где природа неопределенности в поведении процессов системы является нечеткой.

Пусть $conv(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $x : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x — нормально, т. е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

2) x — нечетко выпукло, т. е. для любых $y, z \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \min\{x(y), x(z)\}$;

3) x — полунепрерывно сверху по Бэру, т. е. для любого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $||y - y_0|| < \delta$, справедливо неравенство $x(y) < x(y_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. α-срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$ назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) \geqslant \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathbb{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$.

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to [0, +\infty)$, полагая

$$D(x, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h([x]^\alpha, [v]^\alpha).$$

В последнее время появилось много публикаций, посвященных нечетким дифференциальным и интегральным уравнениям, нечетким интегро-дифференциальным уравнениям, дифференциальным включениям с нечеткой правой частью и нечетким дифференциальным включениям, управляемым дифференциальным уравнениям с нечеткой правой частью, управляемым интегро-дифференциальным уравнениям, управляемым нечетким дифференциальным включениям ([2–4] и ссылки в них).

Рассмотрим нечеткое интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t f(t, s, x(s))ds, \tag{1}$$

где $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ время, $x : [a,b] \to \mathbb{E}^n$– фазовая переменная, нечеткое отображение $f : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$.

Определение 1. *Непрерывное отображение $x : [a,b] \to \mathbb{E}^n$ называется решением уравнения (1) на промежутке $[a,b]$, если оно удовлетворяет этому уравнению для всех $t \in [a,b]$.*

Теорема 1. [5] *Пусть в области $Q = \{(t,s,x) : t, s \in [a,b], x \in \mathbb{E}^n\}$ нечеткое отображение $f : Q \to \mathbb{E}^n$ непрерывно и удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной $\lambda \geq 0$. Тогда интегральное уравнение (1) имеет единственное решение.*

Работа по математическому обоснованию метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений началась в 1937 г. с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [6]. В последующем разработкой методов усреднения для различных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, а также для импульсных и управляемых систем занимались Е. А. Гребенников, Ю. А. Митропольский, Н. Н. Моисеев, Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, А. Н. Филатов и др. (см.: [2, 7–10] и ссылки в них).

В [5] обоснована возможность применения метода усреднения для нечеткого интегрального уравнения.

Рассмотрим нечеткое интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t f(t, s, x(s))ds, \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x : \mathbb{R}_+ \to G, G \subset \mathbb{E}^n$, ε — малый параметр.

Уравнению (2) поставим в соответствие следующее усредненное нечеткое интегральное уравнение

$$\bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(t, \bar{x}(s))ds, \tag{3}$$

где

$$\bar{f}(t, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t, s, x)ds. \tag{4}$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая близость решений уравнений (2) и (3) на конечном промежутке:

Теорема 2. [5] *Пусть в области $Q = \{(t, s, x) : t, s \in \mathbb{R}_+, x \in G \subset \mathbb{E}^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) нечеткое отображение $f(t, s, x)$ непрерывно и удовлетворяет по x условию Липшица с постоянной λ;

2) нечеткое отображение $\int\limits_0^t f(t, s, x(s))ds$ равномерно непрерывно на $\mathbb{R}_+$ с модулем непрерывности $\omega(\cdot)$, не зависящим от выбора непрерывного нечеткого отображения $x : \mathbb{R}_+ \to G$;

3) равномерно относительно $t, t_1 \in \mathbb{R}_+, x \in G$ существует предел (4);

4) решение $\bar{x}(\cdot)$ уравнения (3) при $x_0 \in G' \subset G$ определено при $t \in \mathbb{R}_+$ для всех $\varepsilon \in (0, \sigma]$ и лежит с некоторой ρ-окрестностью в области G.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D(x(t), \bar{x}(t)) \leqslant \eta, \tag{5}$$

где $x(\cdot)$ и $\bar{x}(\cdot)$– решения уравнений (2) и (3) соответственно.

В данной статье рассмотрим обоснование метода усреднения для нечеткого интегрального уравнения с постоянным запаздыванием.

Основные результаты. Рассмотрим нечеткое интегральное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\begin{gathered} x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t f(t, s, x(s), x(s-\tau))ds \text{ при } t > 0 \\ x(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-\tau, 0], \quad x_0 = \varphi(0), \end{gathered} \tag{6}$$

где $t \in \mathbb{R}_\tau = [-\tau, 0] \cup \mathbb{R}_+$ — время, $x : \mathbb{R}_\tau \to G \subset \mathbb{E}^n$ — фазовая переменная, ε — малый параметр, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times G \times G \to \mathbb{E}^n$ — нечеткое отображение, $\tau > 0$ — запаздывание, $\varphi : [-\tau, 0] \to G$ — начальное отображение.

Уравнению (6) поставим в соответствие усредненное нечеткое интегральное уравнение с запаздыванием

$$\begin{gathered} \bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \bar{f}(t, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\tau))ds \text{ при } t > 0, \\ \bar{x}(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-\tau, 0], \quad x_0 = \varphi(0), \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\bar{f}(t, x, z) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t, s, x, z)ds. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть в области $Q = \{(t, s, x, z) : t, s \in \mathbb{R}_+, x, z \in G\}$, $G \subset \mathbb{E}^n$ выполнены следующие условия:*

1) нечеткое отображение $f(t, s, x, z)$ непрерывно и удовлетворяет условию Липшица по x, z с постоянной λ, т. е.

$$D(f(t, s, x, z), f(t, s, x_1, z_1)) \leqslant \lambda[D(x, x_1) + D(z, z_1)];$$

2) нечеткое отображение $\int\limits_0^t f(t, s, x(s), x(s))ds$ равномерно непрерывно на $\mathbb{R}_+$ с модулем непрерывности $\omega(\cdot)$, не зависящим от выбора непрерывного нечеткого отображения $x : \mathbb{R}_+ \to G$;

3) начальное отображение $\varphi(t)$ непрерывно на $[-\tau, 0]$;

4) равномерно относительно $t, t_1 \geqslant 0, x, z \in G$ существует предел (8);

5) решение $\bar{x}(\cdot)$ уравнения (7) при $x_0 \in G' \subset G$ существует при $t \geqslant 0$ и $\varepsilon \in [0, \tau]$ и принадлежит G с некоторой ρ-окрестностью.

Тогда для произвольных $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon^0 \in (0, \sigma]$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оценка

$$D(x(t), \bar{x}(t)) \leqslant \eta, \tag{9}$$

где $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ — решения уравнений (6) и (7) соответственно.

Доказательство. Покажем, что нечеткое отображение $\bar{f}(t, x, z)$ удовлетворяет условию Липшица по x, z с постоянной λ.

Выберем произвольное $\delta > 0$ и найдем $T(\delta) > 0$ такое, что для $T > T(\delta)$ и произвольного $t_1 \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$D\left(\bar{f}(t, x, z), \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t, s, x, z)ds\right) < \delta.$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
D(\bar{f}(t,x,z),\bar{f}(t,x_1,z_1)) \leqslant D\left(\bar{f}(t,x,z),\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t,s,x,z)ds\right)+\\
+D\left(\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t,s,x,z)ds,\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t,s,x_1,z_1)ds\right)+\\
+D\left(\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t,s,x_1,z_1)ds,\bar{f}(t,x_1,z_1)\right)<\\
<2\delta+\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} D(f(t,s,x,z),f(t,s,x_1,z_1))ds\leqslant\\
\leqslant 2\delta+\lambda[D(x,x_1)+D(z,z_1)].
\end{gathered}
$$

В силу произвольности δ нечеткое отображение $\bar{f}(t,x,z)$ удовлетворяет условию Липшица по x,z с постоянной λ.

Далее рассмотрим вспомогательное уравнение

$$
z(t)=x_0+\varepsilon\int\limits_0^t f(t,s,z(s),z(s))ds, t\geq 0. \tag{10}
$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
D\left(x(t),z(t)\right)=\\
=D\left(x_0+\varepsilon\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s-\tau))ds,x_0+\varepsilon\int\limits_0^t f(t,s,z(s),z(s))ds\right)=\\
=\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s-\tau))ds,\int\limits_0^t f(t,s,z(s),z(s))ds\right)\leqslant\\
\leqslant\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s-\tau))ds,\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s))ds\right)+\\
+\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s)ds,\int\limits_0^t f(t,s,z(s),z(s))ds\right)\leqslant\\
\leqslant\varepsilon\lambda\int\limits_0^t D(x(s-\tau),x(s))ds+2\varepsilon\lambda\int\limits_0^t D(x(s),z(s))ds.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Отдельно оценим первое слагаемое. При $s\in[0,\tau)$, учитывая непрерывность, а, следовательно, и ограниченность начального отображения $\phi(\cdot)$, получим

$$
\begin{gathered}
D(x(s-\tau),x(s))\leqslant\\
\leqslant D(\phi(s-\tau),x_0)+D\left(x_0,x_0+\varepsilon\int\limits_0^s f(s,s_1,x(s_1),x(s_1-\tau))ds_1\right)\leqslant\\
\leqslant M+\varepsilon D\left(\int\limits_0^s f(s,s_1,x(s_1),x(s_1-\tau))ds_1,\int\limits_0^s f(s,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1\right)+\\
+\varepsilon D\left(\int\limits_0^s f(s,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1,\hat{0}\right)\leqslant\\
\leqslant M+\varepsilon\lambda\int\limits_0^s D(x(s_1-\tau),x(s_1))ds_1+\varepsilon\omega(\tau).
\end{gathered}
$$

Тогда в силу леммы Гроноулла—Беллмана имеем

$$D(x(s-\tau),x(s)) \leqslant (M+\varepsilon\omega(\tau))e^{\varepsilon\lambda s} \leqslant (M+\varepsilon\omega(\tau))e^{\varepsilon\lambda\tau}. \quad (12)$$

При $s\in[\tau,L\varepsilon^{-1}]$ имеем

$$\begin{gathered} D(x(s-\tau),x(s)) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon D\left(\int\limits_0^{s-\tau} f(s-\tau,s_1,x(s_1),x(s_1-\tau))ds_1, \int\limits_0^{s-\tau} f(s-\tau,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1\right)+ \\ +\varepsilon D\left(\int\limits_0^{s-\tau} f(s-\tau,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1, \int\limits_0^{s} f(s,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1\right)+ \\ +\varepsilon D\left(\int\limits_0^{s} f(s,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1, \int\limits_0^{s} f(s,s_1,x(s_1),x(s_1-\tau))ds_1\right) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\omega(\tau)+2\varepsilon\lambda\int\limits_0^{s} D(x(s_1-\tau),x(s_1))ds_1. \end{gathered}$$

В силу леммы Гроноулла—Беллмана имеем

$$D(x(s-\tau),x(s)) \leqslant \varepsilon\omega(\tau)e^{2\varepsilon\lambda t} \leqslant \varepsilon\omega(\tau)e^{2\lambda L}. \quad (13)$$

Из (13), (12) при $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ получаем

$$\begin{gathered} D\left(x(t),z(t)\right) \leqslant \varepsilon\lambda\int\limits_0^{\tau} D(x(s-\tau),x(s))ds+ \\ +\varepsilon\lambda\int\limits_\tau^{t} D(x(s-\tau),x(s))ds+2\varepsilon\lambda\int\limits_0^{t} D(x(s),z(s))ds \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\lambda(M+\varepsilon\omega(\tau))e^{\varepsilon\lambda\tau}\tau+2\varepsilon\lambda\omega(\tau)e^{2\lambda L}\left(L\varepsilon^{-1}-\tau\right)+2\varepsilon\lambda\int\limits_0^{t} D(x(s),z(s))ds \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\lambda(M\tau+L\omega(\tau))e^{2\lambda L}+2\varepsilon\lambda\int\limits_0^{t} D(x(s),z(s))ds, \end{gathered}$$

откуда в силу леммы Гроноулла—Беллмана получим

$$D(x(t),z(t)) \leqslant \varepsilon\lambda(M\tau+L\omega(\tau))e^{2\lambda L}e^{2\varepsilon\lambda t} \leqslant \varepsilon\lambda(M\tau+L\omega(\tau))e^{4\lambda L}. \quad (14)$$

Аналогично для решений уравнения (7) и вспомогательного уравнения

$$w(t)=x_0+\varepsilon\int\limits_0^{t}\bar f(t,w(s),w(s))ds, t\geq 0, \quad (15)$$

получим

$$D(\bar x(t),w(t)) \leqslant \varepsilon\lambda(M\tau+L\omega(\tau))e^{4\lambda L}. \quad (16)$$

Уравнение (15) является усредненным для уравнения (10). Соответственно в силу теоремы 2 получим, что для произвольных $\eta>0$ и $L>0$ можно выбрать $\varepsilon'\in[0,\sigma]$ такое, что для $\varepsilon\in(0,\varepsilon']$ и $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оценка

$$D(w(t),z(t)) \leqslant \frac{\eta}{2}. \quad (17)$$

Из (14), (16) и (17) получаем, что для $\varepsilon^0 = \min\{\varepsilon', \frac{\eta e^{-4\lambda L}}{4\lambda(M\tau + L\omega(\tau))}\}$ справедлива оценка (9).

Заключение. В работе получено обоснование схемы усреднения для нечеткого интегрального уравнения с запаздыванием. Данный результат обобщает аналогичный результат, полученный для многозначных интегральных уравнений [11], а также результаты по обоснованию схемы усреднения для нечетких дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием [2].

1. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets / L. A. Zadeh // Inf. Control. – 1965. – № 8. – P. 338–353.
2. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса: Астропринт, 2009. – 192 с.
3. **Gomes L. T.** Fuzzy differential equations in various approaches (SpringerBriefs in Mathematics) / L. T. Gomes, L. C. de Barros, B. Bede. – Berlin: Springer, 2015. – 120 p.
4. **Lakshmikantham V.** Theory of fuzzy differential equations and inclusions / V. Lakshmikantham, R. Mohapatra. – Taylor-Francis, 2003.
5. **Skripnik N.** Averaging of fuzzy integral equations / Skripnik N. // Discrete and Continuous Dynamical Systems, series B (in press)
6. **Крылов Н.М.** Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
7. **Перестюк Н. А.** Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник Н.В. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
8. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
9. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40) / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik. – Berlin;Boston: Walter De Gruyter GmbH Co., 2011. – 307 p.
10. **Sanders J. A.** Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems (Applied Mathematical Sciences, Volume 59) / J. A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock. – New York: Springer, 2007. – 433 p.
11. **Кац С. В.** Усереднення багатозначних інтегральних рівнянь з постійним запізненням / С. В. Кац, Н. В. Скрипник // Інноваційний потенціал світової науки XXI сторіччя : 33 міжнар. наук.-практ. конф. (20–27 травня 2015 р.) – 2015. – Т. 2 – С. 83.

Скрипник Н. В.

Усереднення нечітких інтегральних рівнянь зі сталим запізненням

Резюме

Інтегральні рівняння знаходять численні застосування в різних галузях знань, таких як теорія пружності, передача тепла та маси, теорія коливань, динаміка рідини, теорія фільтрації, електростатика, електродинаміка, біомеханіка, теорія ігор, теорія керування, теорія голосування, електротехніка, економіка і медицина. Дослідження реальних процесів, заснованих на ідеалізованих математичних моделях, призводить найчастіше до рівнянь з малими параметрами. Для їх дослідження широко використовуються різні асимптотичні методи. Вибір конкретного асимптотичного методу залежить від структури рівняння, що описує динаміку об'єкта. Останнім часом методи усереднення отримали широкий розвиток в нелінійній механіці й теорії коливань. В статті досліджено можливість застосування методу усереднення до нечіткого інтегрального рівняння зі сталим запізненням.

Ключові слова: нечіткі інтегральні рівняння, метод усереднення, запізнення.

Skripnik N. V.

Averaging of fuzzy integral equations with constant delay

Summary

Integral equations are encountered in various fields, including elasticity, plasticity, heat and mass transfer, oscillation theory, fluid dynamics, filtration theory, electrostatics, electrodynamics, biomechanics, game theory, control, queuing theory, electrical engineering, economics and medicine. The research of the real processes based on the idealized mathematical models often leads to the equations with small parameters. For their research various asymptotic methods are widely used. The choice of a concrete asymptotic method depends on structure of the equation, that describes the dynamics of the object. Recently the averaging methods have gained broad development in nonlinear mechanics and the oscillation of fluctuations. In this paper a possibility of application of averaging method to the fuzzy integral equation with continuous delay is investigated.

Key words: fuzzy integral equations, averaging method, delay.

References

1. Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy sets, *Inf. Control.*, no. 8, pp. 338–353.
2. Plotnikov, A. V. & Skripnik, N. V. (2009), Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side. Asymptotics methods, Odessa: Astroprint, 192 p. (in Russian)
3. Gomes, L. T., de Barros, L. C. & Bede, B. (2015), Fuzzy differential equations in various approaches *Springer Briefs in Mathematics, Berlin: Springer*, 120 p.
4. Lakshmikantham, V. & Mohapatra, R. (2003), Theory of fuzzy differential equations and inclusions, "Taylor-Francis".
5. Skripnik, N. (in press), Averaging of fuzzy integral equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, series B.
6. Krylov, N. M. & Bogoliubov, N. N. (1947), Introduction to nonlinear mechanics, Princeton University Press, Princeton.

7. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. & Skripnik, N. V. (2007), Impulsive differential equations with multivalued and discontinuous right-hand side, Kiev, 428 p. (in Russian)
8. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V. & Vityuk, A. N. (1999), Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods, Odessa: Astroprint, 356 p. (in Russian)
9. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. & Skripnik, N. V. (2011), Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities *De Gruyter Studies in Mathematics*, volume 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH Co., 307 p.
10. Sanders, J. A., Verhulst, F. & Murdock, J. (2007) Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems *Applied Mathematical Sciences*, volume 59, New York: Springer, 433 p.
11. Kats, S. V. & Skripnik, N. V. (2015), Averaging of set-valued integral equations with constant delay, *Perspective directions of world science: The 33-th International conference "Innovative Potential of World Science the XXI Century"*, № 2, P. 83–84.