

в соответствующей ей точке вектором в масштабе. Это дает возможность визуально оценить изменение ускорения за величиной и направлением вдоль траектории движения точки.

Ключевые слова: кривошип, ведомое звено, трехгранник Френе, траектория, ускорение.

Pylypaka S.F., Chepyzhnyi A.V. Certain provisions and acceleration of planar mechanisms links with frenet trihedron

To determine the trajectories of individual points, which belong to the flat links of the mechanism, you can use the accompanying trihedron Frenet trajectory end of this link. It also makes it possible to determine the acceleration vectors of these points while driving. The paper deals with the mechanism of the driven member, which is pivotally connected to the drive - crank. General path of movement of the two ends of the units is a circle on which moves at a constant velocity joint. Frenet trihedron have such a way that its origin coincides with the hinge, the unit vector directed along the principal normal crank to the center of the circle, and the unit vector tangent to the circumference of the concerns. By rotating the crank trihedron moves along a circle and its principal normal coincide with the crank.

The system accompanying trihedron end of the driven member coincides with the beginning of the trihedron and unit itself forms a certain angle with the unit vector tangent. When the mechanism for changing the angle of a certain law, that is, the driven member in the trihedron system revolves around the beginning with a certain angular velocity. If we know the law of rotation of the driven member in the system of the trihedron in arc length function - the trajectory of the hinge, it is possible to determine the known formulas of the trajectory velocity and acceleration of any point of the driven member.

The work by the example of some of the mechanisms shown in the construction of trajectories of individual points of the driven member and the location of their accelerations. The value of the acceleration as a function of crank angle may be indicated on the graph, as well as directly on the path to the point vector corresponding to it on the scale. This makes it possible to visually assess the change in acceleration of the magnitude and direction of motion of a point along a path.

Key words: crank, the driven member, Frenet trihedron, the trajectory, acceleration.

Дата надходження до редакції: 09.09.2017

Рецензент: д.т.н., проф. Топілін Г.Є.

УДК 631.312

**РУХ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКІЙ ПЛОЩИНІ,
ЯКА ЗДІЙСНЮЄ ПОСТУПАЛЬНІ КОЛИВАННЯ У ВЕРТИКАЛЬНОМУ НАПРЯМІ**

С. Ф. Пилипака, д.т.н.

Т. С. Кремець, к.т.н.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

М. Б. Клендій, к.т.н.

О. М. Клендій, к.т.н.

Бережанський агротехнічний інститут НУБіП України

Складено узагальнені диференціальні рівняння відносного переміщення частинки по шорсткій площині, яка здійснює коливальний рух. Всі точки площини описують еліпси у вертикальних площинах. Розглянуто випадки коливань площини, коли півосі еліпсів рівні або одна із них дорівнює нулю, тобто площина здійснює зворотно-поступальний рух. Рівняння розв'язано чисельними методами і побудовано траєкторії відносного руху частинки по площині. Наведено графіки інших кінематичних характеристик у функції часу. Розглянуто окремі випадки, коли площина розташована горизонтально або є похилою.

Ключові слова: відносний рух, шорстка площина, поступальні коливання, частинка, диференціальні рівняння, кінематичні параметри.

Постановка проблеми. В праці [1] зазначено, що похила площина є універсальним конструктивним елементом багатьох сільськогосподарських машин. По площині, що коливається, в процесі обробки переміщується технологічний матеріал. Найбільш дослідженим є рух частинки по горизонтальній площині, яка здійснює коливальний прямолінійний або коловий рух. Для похилої площини дослідження в основному ведуться при її прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях в горизонтальному

напрямі, в напрямі нахилу площини або в поперечному напрямі [1]. Мало вивченим є рух частинки по похилій площині, у якій лінія найбільшого нахилу по різному орієнтована відносно вертикальних площин розташування еліпсів (а також їх окремих випадків – кіл або відрізків).

Аналіз останніх досліджень. Окрім фундаментальної монографії [1], в якій розглянуто прямолінійні зворотно-поступальні коливання, існують праці, присвячені криволінійним коливанням площини. Взагалі задача руху матеріальної

частинки по площині, яка здійснює коловий коливальний рух, вперше була розв'язана М.Є. Жуковським в геометричній інтерпретації [2], узагальнена і поширена на випадки еліптичних коливань І.І. Блехманом [3,4]. П.М. Василенко диференціальні рівняння руху частинки складав у проєкціях на осі рухомої системи координат, жорстко прив'язаної до площини, що коливається, а І.І. Блехман - у проєкціях на осі нерухомої системи координат. П.М. Заїка розглядав переміщення частинок по робочих площинах вібраційних зерноочисних машин [5]. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює горизонтальні поступальні коливання по різних кривих, розглянуто в праці [6]. В працях [7, 8] вивчено рух частинок по похилій площині, всі точки якої опису-

ють еліпси.

Мета та завдання дослідження. Дослідити закономірності руху матеріальних частинок по шорсткій площині, яка здійснює поступальні еліптичні коливання у вертикальних площинах, при різних співвідношеннях осей еліпса та їх орієнтації у цих площинах.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розташуємо площину у вигляді прямокутника, яка буде здійснювати коливальний рух, в просторовій системі координат $OXYZ$. Нехай спочатку вона збігається із горизонтальною площиною OXY , причому введемо на ній свої координатні осі: вісь Ou збігається із віссю OX просторової системи, а вісь Ov - із віссю OY . Повернемо площину навколо осі OY на деякий кут β (рис. 1,а) і зафіксуємо її в цьому положенні.

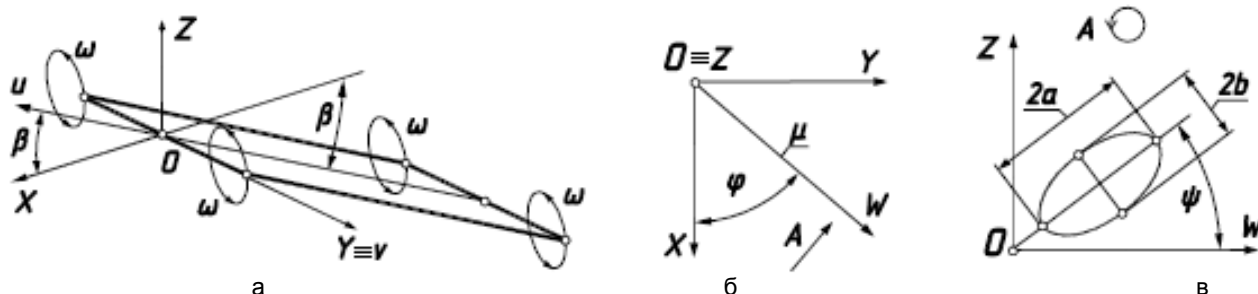


Рис. 1. Положення прямокутного відсіку площини в просторовій системі координат $OXYZ$

Після повороту параметричні рівняння площини в проєкціях на осі системи $OXYZ$ запишуться:

$$\begin{aligned} x_r &= u \cos \beta; \\ y_r &= v; \\ z_r &= u \sin \beta. \end{aligned} \quad (1)$$

Похила площина (при $\beta=0$ – горизонтальна) буде рухомою, оскільки всі її точки описуватимуть в загальному випадку еліпси. На похилій площині частинка ковзатиме і її положення на площині залежатиме від часу t : $u=u(t)$; $v=v(t)$. Таким чином, якщо u і v в (1) є функціями часу, то рівняння (1) будуть параметричними рівняннями траєкторії ковзання або відносного руху частинки. Залежності $u=u(t)$ і $v=v(t)$ є невідомими і їх потрібно розшукати.

Площина здійснює поступальні коливання таким чином, що всі її точки описують в загальному випадку еліпси у вертикальних паралельних площинах. На рис. 1,а показано окремий випадок, коли всі точки площини рухаються по еліпсах, паралельних координатній площині OYZ . Вертикальна площина μ з осями OZW (рис.1,б), в якій знаходяться еліпси, складає із координатною площиною OXZ кут φ . Для випадку, зображеному на рис. 1,а, цей кут рівний 90° . В площині μ задамо еліпс з великою a і малою b півосями – траєкторію поступальних коливань всіх точок площини (рис. 1,в). Напряму великої осі еліпса задається кутом ψ її нахилу до горизонтальної

площини. При $b=0$ циліндр буде здійснювати зворотньо-поступальні коливання вздовж заданого напрямку великої осі, при $a=b$ траєкторією коливального руху будуть кола (при цьому величина кута ψ не матиме значення). Абсолютний рух частинки будемо розглядати в проєкціях на осі системи координат $OXYZ$. Абсолютну траєкторію частинки можна записати як суму переносного руху площини, точки якої в загальному випадку описують еліпси, і відносного руху точки по поверхні площини:

$$\begin{aligned} x &= x_e + x_r; \\ y &= y_e + y_r; \\ z &= z_e + z_r, \end{aligned} \quad (2)$$

де $x_e = x_e(t)$; $y_e = y_e(t)$; $z_e = z_e(t)$ – траєкторія переносного руху площини у функції часу t .

Кожна точка похилої площини описує еліпс з півосями a і b . Радіус-вектор точки еліпса в площині μ його розташування має координати: $\{a \cos \omega t; b \sin \omega t\}$, де ω – частота коливань (при $a=b$ – кутова швидкість обертання точок площини по колах), t – час, незалежна змінна. Осі такого еліпса паралельні осям OX і OW . За відомими формулами повороту повернемо його на кут ψ . Після цього радіус-вектор точки еліпса запишеться:

$$\left\{ \begin{aligned} -a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t; \\ a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Враховуючи кут φ між площинами OZX і

OZW, можна записати параметричні рівняння еліпса в проєкціях на осі системи координат OXYZ:

$$\begin{aligned}x_e &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi; \\y_e &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi; \\z_e &= -a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t.\end{aligned}\quad (4)$$

Сумуючи переносний (4) і відносний (1) рухи за формулою (2), отримуємо рівняння абсолютної траєкторії частинки:

$$\begin{aligned}x &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u \cos \beta; \\y &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi + v; \\z &= -a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t + u \sin \beta.\end{aligned}\quad (5)$$

Задаючи значення півосей a і b , можна отримати різні траєкторії переносного руху площини (еліпси, кола, прямолінійні відрізки), які можуть бути орієнтовані у вертикальних площинах у всіх можливих положеннях за допомогою відповідних значень кутів φ і ψ .

Після диференціювання рівнянь (5) по часу t знайдемо проєкції абсолютної швидкості частинки:

$$\begin{aligned}x' &= \omega(-a \cos \psi \sin \omega t + b \sin \psi \cos \omega t) \cos \varphi + u' \cos \beta; \\y' &= \omega(-a \cos \psi \sin \omega t + b \sin \psi \cos \omega t) \sin \varphi + v'; \\z' &= \omega(a \sin \psi \sin \omega t + b \cos \psi \cos \omega t) + u' \sin \beta.\end{aligned}\quad (6)$$

Диференціювання виразів (6) дає проєкції абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned}x'' &= -\omega^2(a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u'' \cos \beta; \\y'' &= -\omega^2(a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi + v''; \\z'' &= \omega^2(a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t) + u'' \sin \beta.\end{aligned}\quad (7)$$

Складемо рівняння руху у вигляді $m\bar{w} = \bar{F}$, де m – маса частинки, \bar{w} – вектор абсолютного прискорення, \bar{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg ($g=9,81$ м/с²), реакція N поверхні циліндра та сила тертя fN при ковзанні частинки по поверхні циліндра (f – коефіцієнт тертя). Всі сили потрібно спроеціювати на осі системи координат OXYZ.

Сила ваги спрямована вниз, отже її проєкції запишуться:

$$\begin{aligned}m[-\omega^2(a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u'' \cos \beta] &= -N \sin \beta - fN \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\m[-\omega^2(a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi + v''] &= -fN \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\m[\omega^2(a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t) + u'' \sin \beta] &= -mg + N \cos \beta - fN \frac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}.\end{aligned}\quad (14)$$

До системи (14) входить три невідомі функції: $N=N(t)$, $u=u(t)$ і $v=v(t)$. Розв'язуючи її відносно N , u'' і v'' , отримуємо наступні вирази:

$$\{0; \quad 0; \quad -mg\}\quad (8)$$

Реакція N площини спрямована перпендикулярно до неї. Її напрям задає одиничний вектор із координатами:

$$\{-\sin \beta; \quad 0; \quad \cos \beta\}.\quad (9)$$

Оскільки сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну сторону, знайдемо проєкції вектора дотичної. Вони визначаються першими похідними рівнянь (1):

$$\begin{aligned}x'_r &= u' \cos \beta; \\y'_r &= v'; \\z'_r &= u' \sin \beta.\end{aligned}\quad (10)$$

Геометрична сума складових (10) дасть величину швидкості ковзання частинки по площині у відносному русі:

$$V_r = \sqrt{x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2} = \sqrt{u'^2 + v'^2}.\quad (11)$$

Одиничний вектор дотичної в проєкціях на осі системи OXYZ одержимо діленням проєкцій (10) на величину вектора (11):

$$\left\{ \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \quad \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \quad \frac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \right\}.\quad (12)$$

Розпишемо векторне рівняння $m\bar{w} = \bar{F}$ в проєкціях на осі системи координат, взявши до уваги, що сила тертя fN спрямована вздовж одиничного вектора (12) в протилежну до нього сторону:

$$mx'' = -N \sin \beta - fN \frac{u' \cos \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}};\quad (13)$$

$$my'' = -fN \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}};$$

$$mz'' = -mg + N \cos \beta - fN \frac{u' \sin \beta}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Підставимо в рівняння (13) другі похідні (проєкції абсолютного прискорення) із (7) і отримуємо систему із трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}u'' &= \frac{1}{V} [B \omega^2 \cos \varphi (V \cos \beta - fu' \sin \beta) - A (V \sin \beta + fu' \cos \beta)]; \\v'' &= \frac{1}{V} [B \omega^2 (V \sin \varphi - fv' \cos \varphi \sin \beta) - Afv' \cos \beta];\end{aligned}\quad (15)$$

$$N = m [B \omega^2 \cos \varphi \sin \beta + A \cos \beta],$$

$$\text{де } A = g + \omega^2 (a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t);$$

$$V = \sqrt{u'^2 + v'^2};$$

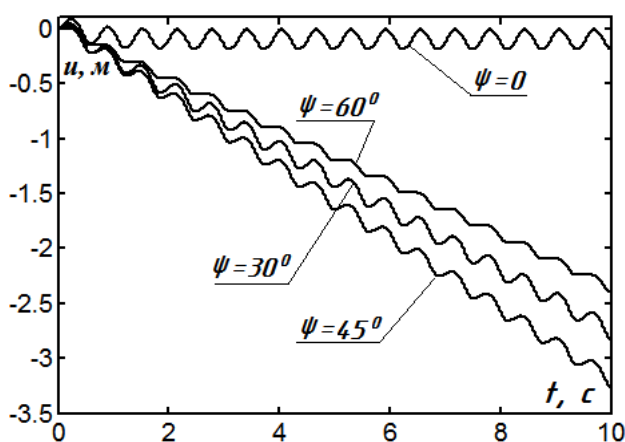
$$B = a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t.$$

Система (15) не може бути проінтегрована

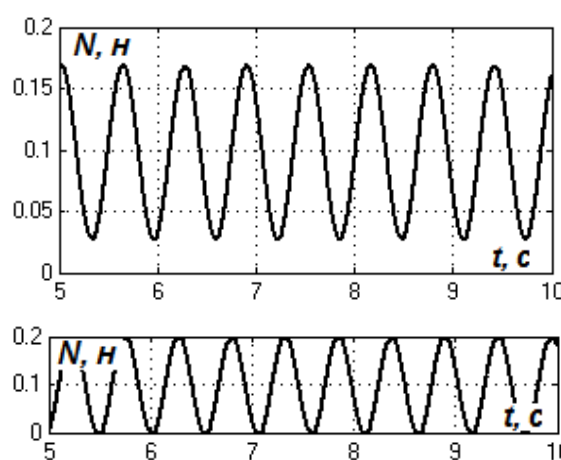
в аналітичному вигляді. Її потрібно розв'язувати чисельними методами. Знайшовши залежності $u=u(t)$ і $v=v(t)$ і підставивши їх у рівняння (1), ми одержимо відносну траєкторію руху частинки по площині, тобто траєкторію ковзання. Розглянемо окремі випадки.

Випадок перший. Кут $\beta=0$, тобто площина горизонтальна. Частинка здійснює зворотно-поступальний рух вздовж прямої лінії. Напрямок цього руху залежить від кута φ . Наприклад, при $\varphi=0$ цей напрям буде паралельний осі u рухомої системи координат. На рис. 2 представлені графічні ілюстрації відносного руху частинки при $b=0$, тобто для випадку, коли площина здійснює прямолінійний зворотно-поступальний рух. При $\psi=0$ (напрямок коливань горизонтальний) частинка на площині здійснює зворотно-поступальний рух, причому амплітуда його дещо менша амплітуди

коливань площини. Реакція площини є сталою і рівною вазі частинки: $N=mg$. Зі збільшенням частоти коливань амплітуда коливань частинки наближається до амплітуди коливань площини. При $\psi \neq 0$ характер коливань частинки змінюється. На рис. 2,а показано залежність відстані u від часу t для різних кутів ψ . Наявність горизонтальних ділянок графіка при $\psi=60^\circ$ свідчить про те, що частинка рухається прямолінійно із зупинками. Найбільшу відстань частинка проходить при $\psi=45^\circ$. Реакція площини є змінною і залежить від частоти коливань. Наприклад, збільшення ω від 10 c^{-1} (рис. 2,б вгорі) до 12 c^{-1} (рис. 2,б внизу) призводить до того, що в певний момент часу реакція площини стає рівною нулю. При подальшому збільшенні частоти відбувається відрив частинки від площини.



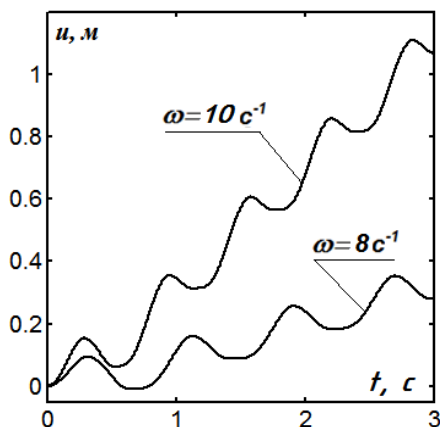
а



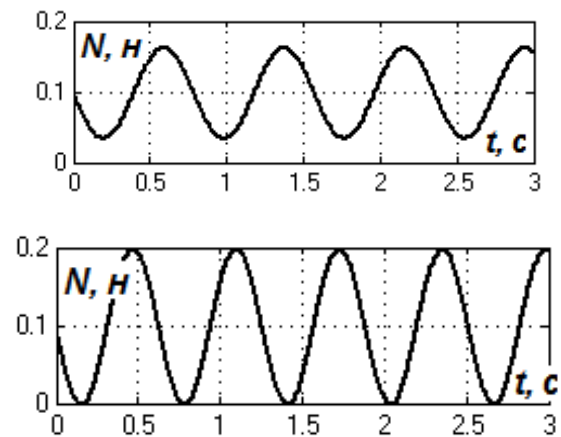
б

Рис. 2. Графічні ілюстрації відносного руху частинки по горизонтальній площині при $a=0,1 \text{ м}$, $b=0$, $f=0,3$:
а) графіки залежності $u=u(t)$ при $\omega=10 \text{ c}^{-1}$ і різних кутах ψ ;
б) графіки залежності $N=N(t)$ при $m=0,01 \text{ кг}$ для $\omega=10 \text{ c}^{-1}$ (вгорі) і $\omega=12 \text{ c}^{-1}$ (внизу)

На рис. 3 наведені аналогічні графічні ілюстрації для $a=b=0,1 \text{ м}$. Коли всі точки горизонтальної площини рухаються по колах, то частинка в коливальному русі переміщається на певну відстань, причому вона збільшується із збільшенням частоти коливань, тобто із зростанням кутової швидкості обертання точок площини по колах (рис. 3,а).



а



б

Рис. 3. Графічні ілюстрації відносного руху частинки по горизонтальній площині при $a=b=0,1 \text{ м}$, $\varphi=0$, $f=0,3$:
а) графіки залежності $u=u(t)$ при різних значеннях ω ;
б) графіки залежності $N=N(t)$ при $m=0,01 \text{ кг}$ для $\omega=8 \text{ c}^{-1}$ (вгорі) і $\omega=10 \text{ c}^{-1}$ (внизу)

Кутова швидкість $\omega=10 \text{ c}^{-1}$ коливання площини стає граничною, при якій частинка не відривається від неї (рис. 3,б). При зміні кута $\varphi=0^\circ$ на $\varphi=180^\circ$ частинка буде переміщатися в протилежну сторону. Цього ефекту можна досягти зміною напрямку кутової швидкості обертання точок площини по колах. Можна поставити запи-

тання: при яких коливаннях горизонтальної площини швидкість переміщення технологічного матеріалу по ній буде найбільшою? Для цього було досліджено різні режими поступальних коливань площини і побудовано відповідні графіки (рис. 4).

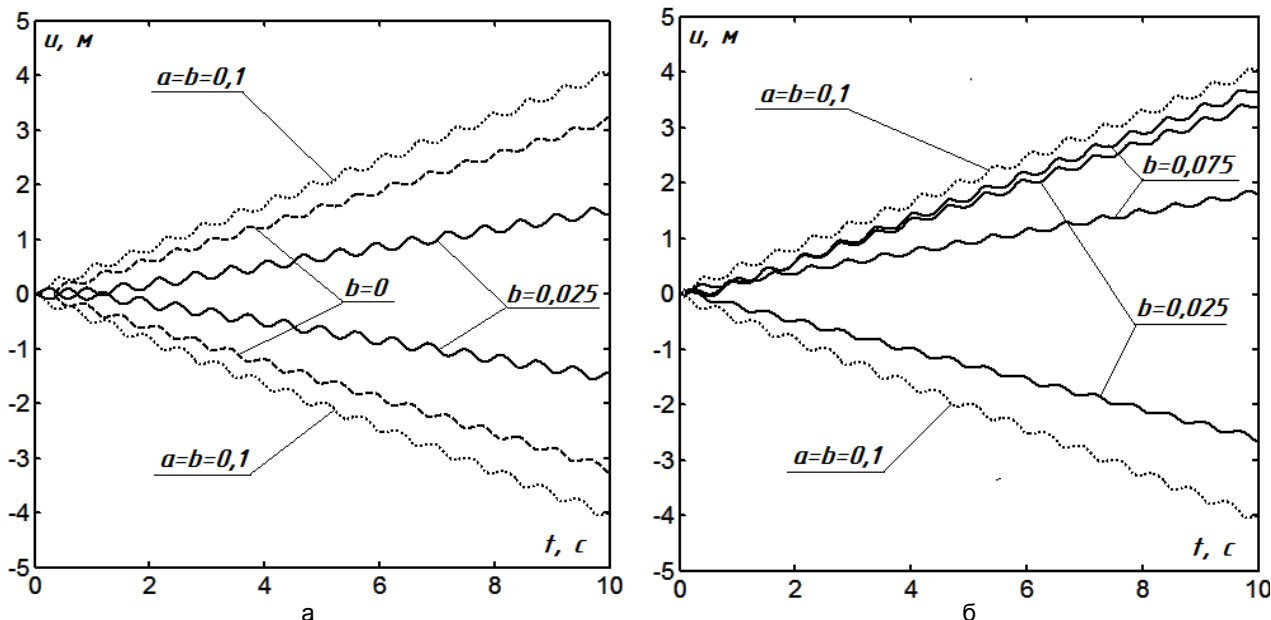


Рис. 4. Графіки залежностей $u=u(t)$ для $a=0,1 \text{ м}$, $\omega=10 \text{ c}^{-1}$, $f=0,3$ та різних значень півосей b і кутів φ та ψ

На рис. 4,а пунктирною лінією зображено графік залежності $u=u(t)$ для кутів $\varphi=0^\circ$ і $\varphi=180^\circ$ при русі точок площини по колах (величина кута ψ при цьому не має значення). Штриховою лінією зображено аналогічний графік для прямолінійних зворотно-поступальних коливань площини при $b=0$, причому кут $\psi=45^\circ$, тобто такий, який забезпечує максимальну швидкість переміщення. Суцільною лінією зображено графік для $b=0,025 \text{ м}$ при $\psi=0^\circ$, тобто для поступальних коливань площини, коли всі її точки рухаються по еліпсах. Всі графіки симетричні, тобто при зміні кута φ на 180° переміщення частинки відбувається у протилежну сторону, причому найбільшою є швидкість переміщення при $a=b$. Залишилося з'ясувати, чи не можна збільшити швидкість переміщення технологічного матеріалу за рахунок зміни співвідношення півосей еліпса і вибору належного значення кута ψ . Якщо для прямолінійних зворотно-поступальних коливань площини найбільшу швидкість переміщення забезпечують кути $\psi=\pm 45^\circ$, то для еліптичних коливань ці кути залежать від співвідношення півосей еліпса. Наприклад, для $a=0,1 \text{ м}$ і $b=0,025 \text{ м}$ такими кутами є $\psi=55^\circ$ і $\psi=-35^\circ$; для $a=0,1 \text{ м}$ і $b=0,05 \text{ м}$ - $\psi=60^\circ$ і $\psi=-30^\circ$; для $a=0,1 \text{ м}$ і $b=0,075 \text{ м}$ - $\psi=65^\circ$ і $\psi=-25^\circ$. У всіх випадках різниця між значеннями кутів складає 90° . На рис. 4,б показано графік залежності $u=u(t)$ для $a=0,1 \text{ м}$ і $b=0,025 \text{ м}$ із використанням зазначених кутів. При цьому порушується симетрія: швидкість переміщення ча-

стинки зростає в одну сторону більше, ніж в протилежну. Для $a=0,1 \text{ м}$ і $b=0,075 \text{ м}$ переміщення частинки відбувається в одну сторону з невеликою різницею у швидкості. При всіх режимах еліптичних коливань площини частинка не відривається від неї при одному і тому ж значенні ω . Отже найбільшу швидкість переміщення частинки по горизонтальній площині можна забезпечити при її колових коливаннях.

Випадок другий. Кут $\beta \neq 0$, тобто площина є похилою. Спочатку розглянемо прямолінійний зворотно-поступальний рух при $\psi=0^\circ$. Навіть при невеликому нахилу площини частинка в коливальному русі переміщається по ній вниз. На рис. 5,а,б наведено відносні траєкторії ковзання частинки по площині при $\beta=5^\circ$, $a=0,1 \text{ м}$, $b=0 \text{ м}$, $\psi=0^\circ$, $\omega=10 \text{ c}^{-1}$, $f=0,3$ і різних значеннях кута φ протягом 5 с .

Найбільший шлях частинка проходить при $\varphi=0^\circ$, тобто коли напрям коливань збігається із лінією найбільшого нахилу площини, при цьому переміщення відбувається вздовж лінії найбільшого нахилу. Швидкість ковзання є змінною, однак в цілому швидкість переміщення вниз є сталою (рис. 5,в, вгорі). По мірі збільшення кута φ величина переміщення зменшується, а загальний напрям переміщення складає із лінією найбільшого нахилу певний кут. Цей кут набирає найбільшого значення приблизно при $\varphi=45^\circ$, а потім починає зменшуватися. При $\varphi=90^\circ$ (коли напрям коливань перпендикулярний лінії

найбільшого нахилу площини), напрям загально-го переміщення знову збігається із лінією найбільшого нахилу, а відносно траєкторією є лінія, подібна до синусоїди. При збільшенні кута β нахилу площини частинка в коливальному русі починає переміщатися прискорено, причому та-

кий рух починається при β , меншому куту тертя. На рис.5,в внизу зображено графік зміни відносної швидкості при $\beta = \text{arctg } f$ (кут нахилу площини дорівнює куту тертя) і $\varphi = 0^\circ$. Із нього видно, що швидкість переміщення частинки по площині в цілому зростає.

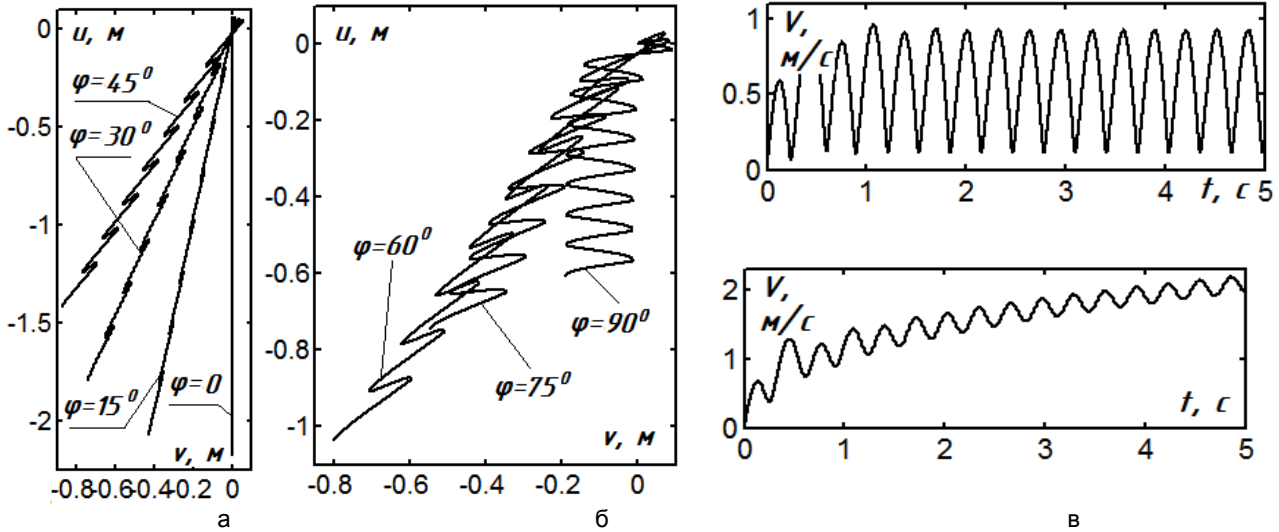


Рис. 5. Графічні ілюстрації відносного руху частинки по похилій площині при $b=0$ і різних значеннях кута $\varphi=0$

При коливанні горизонтальної площини було з'ясовано, що найбільша швидкість переміщення частинки по площині досягається при колових коливаннях. На похилій площині відбувається те ж саме. Якщо горизонтальну площину, яка коливається, і по якій переміщується частинка, повернути на невеликий кут β в сторону, протилежну переміщенню, то можливий варіант, що частинка буде підніматися вгору. На рис. 6,а наведено приклад такого переміщення (відносно

траєкторію ковзання) для кутів $\beta=5^\circ$, $\varphi=45^\circ$. Цифрою 1 позначено траєкторію руху частинки при прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях площини ($\psi=45^\circ$), цифрою 2 – при колових коливаннях. Стрілкою показано напрям вниз вздовж лінії найбільшого нахилу. В обох випадках частинка переміщується вгору під кутом до лінії найбільшого нахилу, причому при колових коливаннях вона піднімається швидше.

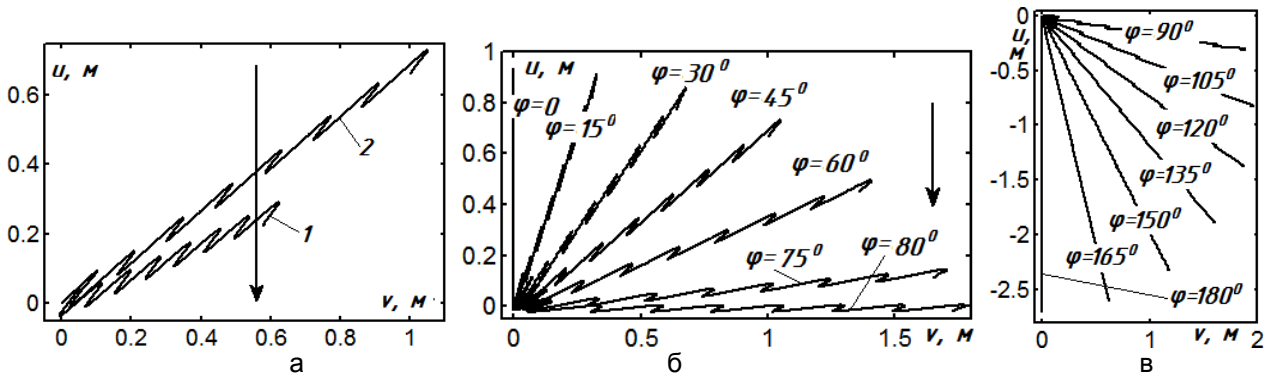


Рис. 6. Траєкторії відносного руху частинки по похилій площині при $\beta=5^\circ$, $\omega=10 \text{ c}^{-1}$, $f=0,3$ та різних кутах φ

На рис. 6,б,в побудовані траєкторії ковзання частинки для колових коливань площини ($a=b=0,1 \text{ м}$) для кутів φ в межах $0^\circ \dots 180^\circ$. По мірі збільшення кута φ частинка поступово змінює свій напрям підйому вгору і починає опускатися вниз, при цьому загальна швидкість переміщення зростає. За час $t=5 \text{ с}$ частинка піднімається вгору вздовж лінії найбільшого нахилу на відстань біля 1 м (при $\varphi=0^\circ$) і опускається в протилежну сторону на відстань понад $2,5 \text{ м}$ (при $\varphi=180^\circ$). При $\varphi=80^\circ$ частинка переміщується перпендикулярно

лінії найбільшого нахилу (рис. 6,б). Такого ж результату можна добитися при інших режимах коливань. Наприклад, збільшуючи кут нахилу β при $\varphi=0^\circ$ можна отримати результат, коли частинка при коливанні не переміщується вздовж лінії найбільшого нахилу, тобто коливається подібно, як при $\beta=0^\circ$. Такий момент настає при $\beta=8,7^\circ$. При збільшенні кута φ частинка починає переміщатися в сторону, не піднімаючись вгору. Перпендикулярне переміщення частинки при $\beta=8,7^\circ$ можна забезпечити при куту $\varphi=64,3^\circ$

(рис. 7,а). Частинки з коефіцієнтом тертя $f \geq 0,3$ рухаються перпендикулярно лінії найбільшого нахилу площини, а решта – вниз по своїх траєкторіях. Збільшивши кут φ до 90° , частинки з різним коефіцієнтом тертя будуть переміщатися

вниз, кожна по своїй траєкторії (рис. 7,б). Такий режим коливань похилої площини може бути покладений в основу фрикційного сепарування технологічного матеріалу.

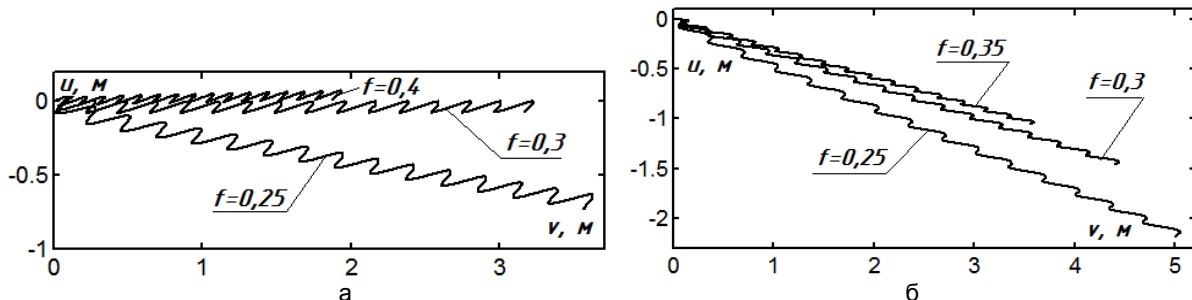


Рис. 7. Траєкторії відносного руху частинки по похилій площині, яка здійснює колові коливання, при $\beta=8,7^\circ$, $\omega=10 \text{ c}^{-1}$, $a=b=0,1 \text{ м}$:
а) кут $\varphi=64,3^\circ$, коефіцієнти тертя різні; б) кут $\varphi=90^\circ$, коефіцієнти тертя різні

Висновки та перспективи подальших досліджень. Поступальні коливання площини розглянуто в двох її положеннях: горизонтальному та похилому. На горизонтальній площині відносний рух частинки залежить від характеру коливань площини. При прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях площини в горизонтальному напрямі частинки теж здійснюють подібні коливання у відносному русі без переміщення по площині. При зміні напрямку коливань відбувається переміщення частинки по площині в прямолінійному напрямі, швидкість якого стає максимальною при куті 45° між напрямом коливань і горизонтальною площиною. При еліптичних та колових коливаннях площини теж спостерігається переміщення частинки в прямолінійному напрямі, причому швидкість цього

переміщення є максимальною при колових коливаннях.

На похилій площині відбувається коливальний рух частинок і їх переміщення із сталою швидкістю при малих кутах нахилу площини. Із збільшенням кута нахилу площини переміщення стає прискореним, при чому це відбувається ще до досягнення кута тертя. При колових коливаннях площини переміщення частинок є найбільш інтенсивне. В залежності від орієнтації площини колових коливань по відношенню до лінії найбільшого нахилу площини, що коливається, можливі різні траєкторії переміщення частинок по площині, в тому числі і вгору. Частинки із різним коефіцієнтом тертя переміщуються по різних траєкторіях, що робить можливим фрикційне сепарування технологічного матеріалу.

Список використаної літератури:

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – Киев: Изд-во Укр. акад. сельск. наук, 1960. – 283 с.
2. Гортинский В.В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В.В. Гортинский, А.Б. Демский, М.А. Борискин. -2-е изд., перераб. и доп. - М.:Колос, 1980. -304 с.
3. Блехман И.И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. - М.: Наука, 1964. -410 с.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика / И.И. Блехман. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
5. Заика П.М. Об одном семействе регулярных режимов движения частицы по колеблющейся плоскости вибрационной зерноочистительной машины / П.М. Заика // Теория механизмов и машин. - Х.: Изв. ХГУ им. М. Горького, 1966. - Вып.1. - С. 28-33.
6. Войтюк Д.Г. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій площині, яка здійснює горизонтальні криволінійні поступальні коливання / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Техніка АПК. -2004. - №№ 10-11. – С. 26 - 28.
7. Клендій М.Б. Взаємодія похилої площини, всі точки якої при поступальному коливанні описують еліпси, із частинками матеріалу / М.Б. Клендій, С.Ф. Пилипака // Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник. - Глеваха, 2013. –Вип. 98. –Т. 1. – С. 574 - 587.
8. Клендій М.Б. Ковзання частинки по похилій площині, всі точки якої здійснюють поступальні коливання у вертикальних площинах, паралельних горизонталям похилої площини / М.Б. Клендій // Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України. Збірник наукових праць. – Дослідницьке, 2014. – Вип. 18 (32), кн. 1. - С. 294 – 300.

Пилипака С.Ф., Кремець Т.С., Клендій Н.Б., Клендій О.Н. Движение частицы по шерохо-

ватої площини, котра совершає поступальні коливання у вертикальному напрямку

Составлено обобщенные дифференциальные уравнения относительного перемещения частицы по шероховатой плоскости, которая осуществляет колебательное движение. Все точки плоскости описывают эллипсы у вертикальных плоскостях. Рассмотрены случаи колебания плоскости, когда полуоси эллипсов равны или одна из них равна нулю, то есть плоскость осуществляет возвратно-поступательное движение. Уравнения решены численными методами и построены траектории относительного движения частицы по плоскости. Наведено графіки других кинематических характеристик у функции времени. Рассмотрено отдельные случаи, когда плоскость расположена горизонтально или же является наклонной.

Ключевые слова: относительное движение, шероховатая плоскость, поступательные колебания, частица, дифференциальные уравнения, кинематические параметры.

Pylypaka S., Kremets T., Klendiy M., Klendiy O. Movement of a particle along a rough plane that performs translational vibrations in the vertical direction

Generalized differential equations of the relative motion of a particle over a rough plane that performs the oscillatory motion are compiled. All points of the plane describe ellipses in vertical planes. The cases of the oscillation of the plane are considered when the semi-axes of the ellipses are equal or one of them is equal to zero, that is, the plane performs reciprocating motion. The equations are solved by numerical methods and trajectories of the relative motion of the particle along the plane are constructed. Graphs of other kinematic characteristics of the time function are plotted. We consider individual cases when the plane is horizontal or inclined.

Keywords: relative motion, rough plane, translational vibrations, particle, differential equations, kinematic parameters.

Дата надходження до редакції: 06.09.2017

Рецензент: д.т.н., проф. Ревенко І.І.

УДК 621.224

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПОТОКУ РІДИНИ

Н. С. Борозенець

В. І. Пугач

Сумський національний аграрний університет

В статті показана необхідність розгляду відривного обтікання тіл, просторових потоків рідини, вивчення їх взаємодії, взаємного впливу, а також в зв'язку з цим розгляд нових класів задач та шляхи їх вирішення.

Ключові слова: математичні моделі, потік рідини, турбулентність, в'язкість, обтікання, вихори, рівняння.

Постановка проблеми в загальному вигляді. При проектуванні гідравлічних машин вибір геометричних розмірів і форм проточних частин, врахування взаємного впливу елементів з метою забезпечення високих енергетичних і динамічних характеристик являє собою складну задачу. Вона вирішується, в основному, з використанням спрощених математичних моделей потоку рідини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На даний час дослідження структури турбулентного потоку в елементах проточної частини базуються на напівемпіричних теоріях, які використовують експериментальну інформацію про кореляції турбулентної швидкості, і наближених уявленнях про механізм турбулентної в'язкості [1, 2, 3, 7]. Ці теорії виявилися дуже цінними і дозволили вирішити ряд важливих практичних завдань. Проте зростаючі запити практики не вдається задовольнити тільки зазначеним шляхом.

Мета статті. Метою статті є показати необхідність розгляду відривного обтікання тіл, просторових потоків рідини, вивчення їх взаємодії, взаємного впливу, а також в зв'язку з цим розгляд нових класів задач та шляхи їх вирішення.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо одну із основних видів математичних моделей потоку рідини, а саме замкнену модель турбулентності при обтіканні тіл (гіпотеза С. М. Білоцерківського).

Створення замкнених моделей турбулентності і вирішення зазначених задач за допомогою комп'ютерних технологій відкриває нові можливості в цій області. Однією з важливих проблем при цьому є проблема правильного розуміння і опису механізму турбулентного перемішування [6]. Зазначимо також іншу суттєву проблему турбулентності - замкнення рівнянь Рейнольдса.

До останнього часу складається загальноприйняте уявлення про турбулентності ієрархії