УДК 65.011.561:621.865.8

А.И. Бохонский, А.К. Васильченко, М.М. Майстришин
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053
E-mail: mihail.maystrishin@gmail.com

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПЕРЕНОСНОМ ДВИЖЕНИИ

Показано, что при переносном движении упругой системы из исходного в конечное состояние абсолютного покоя (за минимальное время), колебания, возникающие в процессе движения, эффективно подавляются с использованием ПД-регулятора (в замкнутой системе с отрицательной обратной связью).

Ключевые слова: *упругий объект, переносное и относительное движение, оптимальное управление, отрицательная обратная связь.*

Введение. Решение задач синтеза специальных управлений переносным движением упругодеформируемых систем посвящены работы [1–3]. В [3], например, обоснован класс оптимальных «кососимметричных» управлений переносным движением упругих объектов с конечным и бесконечным числом степеней свободы.

При быстром перемещении упругих объектов, например из исходного в конечное состояние абсолютного покоя, во время движения перемещаемой системы возникают значительные колебания. Задачам подавления колебаний системы в относительном движении в литературе должного внимания не уделялось.

Цель исследования – построение алгоритма подавления колебаний упругого объекта во время его оптимального переносного движения из исходного состояния в новое состояние абсолютного покоя.

Исследования, результаты которых представлены в статье, включают: формирование управления переносным движением упругого объекта; определение параметров ПД-регулятора для подавления колебаний (при $T \ge t \ge 0$); анализ поведения системы с учетом и без учета обратной связи и случайных воздействиях.

Постановка задачи иллюстрируется на примере упругого объекта, схема которого изображена на рисунке 1. Сосредоточенная масса участвует в двух движениях: переносном – по отношению к неподвижной системе координат $0S_eY_e$; относительном по отношению к подвижной системе координат $0X_rY_r$, движущейся поступательно. Относительные движения – колебания сосредоточенной массы – обусловлены деформацией упругой связи.

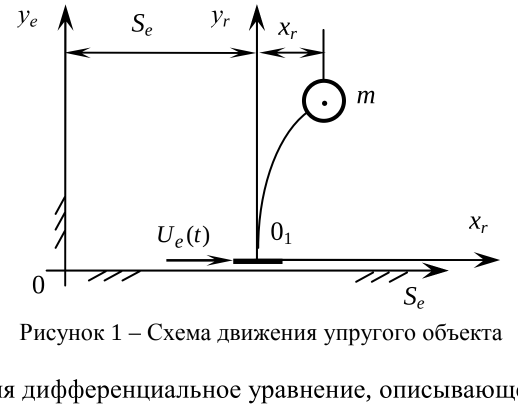


Рисунок 1 – Схема движения упругого объекта

Без учета сопротивления дифференциальное уравнение, описывающее колебания сосредоточенной массы (в относительном движении) имеет вид

$$m\frac{d^2X_r}{dt^2} + cx_r = -mU_e(t), \tag{1}$$

где m – сосредоточенная масса; c – коэффициент жесткости упругой связи; $U_e(t)$ – ускорение в переносном движении (управляющее воздействие на единицу массы). Уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{d^2x_r}{dt^2} + k^2x_r = -U_e(t), \tag{2}$$

где $k^2 = c/m$; k – частота собственных колебаний ($k = 2\pi/T_1$, где T_1 – период колебаний).

Поиск управлений состоит в следующем: необходимо найти такое $U_e(t)$, при котором система за минимальное время T перемещается на расстояние L из состояния абсолютного покоя ($x_r(0)=0$, $\dot{x}_r(0)=0$; $S_e(0)=0$, $\dot{S}_e(0)=0$) в новое состояние абсолютного покоя ($x_r(T)=0$, $\dot{x}_r(T)=0$; $S_e(T)=L$, $\dot{S}_e(T)=0$) с допущением колебаний только на временном интервале движения $T \ge t \ge 0$.

Условия на правом конце $x_r(T)=0$ и $\dot{x}_r(T)=0$ по существу являются моментными соотношениями, которые для системы, описываемой уравнением (2) при нулевых начальных условиях могут быть записаны как

$$\int_0^T U_e(t)\cos(kt)dt = 0\,, \qquad \int_0^T U_e(t)\sin(kt)dt = 0\,.$$

В управлении $U_e(t)$ учитываются как условия переносного движения, так и условия относительного движения (моментные соотношения).

Если, например, «кососимметричному» оптимальному управлению [4, 5] движением абсолютно твердого тела $U_e = \frac{6L}{T^2}\left(1-\frac{2t}{T}\right)$ соответствует критерий минимума нормы мощности $\int_0^T U_e^2(t)dt = \min$, то управлению $U_e = a\sin pt$, где $p = 2\pi/T$, соответствует критерий $\frac{1}{2}\int_0^T\left(\dot{U}_e^2 - p^2U_e^2\right)dt$.

При определении времени движения из моментных соотношений находится зависимость между T и периодом T_1. Моментные соотношения представляют собой два трансцендентных уравнения, которые в данном случае должны иметь одинаковые корни. В работах [1, 4] показано, что наименьший корень соответствует минимальному времени переносного движения (на расстояние L).

1. Определение параметров управления переносным движением. Для ускорения переносного движения $U_e(t)$ объекта как абсолютно твердого тела справедливо уравнение [1, 2]

$$\frac{d^2S_e}{dt^2} = a\sin pt$$

и после интегрирования которого $V_e(t) = -\frac{a\cos pt}{p} + C_1;\qquad S_e = -\frac{a\sin pt}{p^2} + C_1t + C_2\,.$

Константы C_1, C_2, a находятся из краевых условий

$$t=0\,,\quad S_e(0)=0\,,\quad V_e(0)=0\,;\qquad t=T\,,\quad S_e(T)=L\,,$$

т.е. $C_1 = \frac{Lp\cos(pT)}{-\sin(pT)+p\cos(pT)T}$, $\quad C_2 = 0$, $\quad a = \frac{Lp^2}{-\sin(pT)+p\cos(pT)T}$.

Итак, в переносном движении без учета сопротивлений движению функции ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и перемещения $S_e(t)$ принимают вид:

$$U_e(t) = \frac{2\pi L}{T^2}\sin(\frac{2\pi}{T}t)\,,\qquad V_e(t) = \frac{L}{T} - \frac{L\cos(\frac{2\pi}{T}t)}{T}\,,\qquad S_e(t) = \frac{Lt}{T} - \frac{L}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{T}t).$$

Теперь в относительном движении колебания упругой системы с одной степенью свободы, обусловленные переносным движением (без учета сопротивления), описываются уравнением

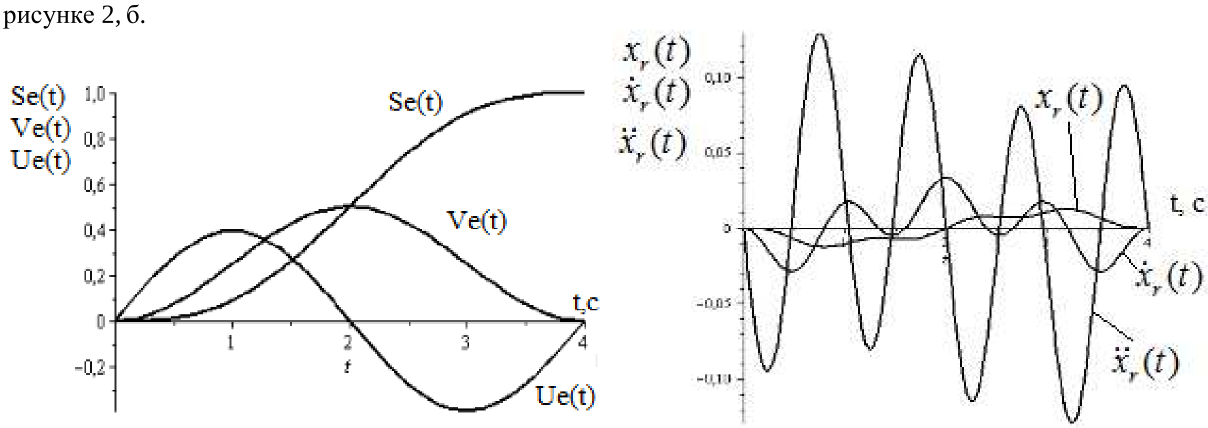
$$\frac{d^2x_r}{dt^2} + k^2x_r = -\frac{2L\pi}{T^2}\sin(\frac{2\pi}{T}t),$$

решение которого при нулевых начальных условиях ($x_r(0)=0, \dot{x}_r(0)=0$) следующее:

$$x_r(t) = \frac{2L\pi}{k^2T^2-4\pi^2}\cdot(\frac{2\pi}{Tk}\sin kt - \sin\frac{2\pi}{T}t)\,.$$

Здесь не рассматривается задача поиска общего времени движения, согласованного с периодом собственных колебаний транспортируемой упругой системы, которое находится на основании теории моментов [6] и сводится, как отмечалось ранее, к поиску одинаковых корней трансцендентных уравнений ($x_r(T)=0,\ \dot{x}_r(T)=0)$.

Пример. Исходные данные: $L = 1$ м, $p = k/4 = 1{,}5708 c^{-1}$, $k = 6{,}2832\ c^{-1}$, $T = 4$ с. Графики переносного движения (перемещения $S_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и ускорения $U_e(t)$) изображены на рисунке 2, а, а графики относительного движения (перемещения $x_r(t)$, скорости $\dot{x}_r(t)$ и ускорения $\ddot{x}_r(t)$) – на рисунке 2, б.



а) б)

Рисунок 2 – Графики переносного и относительного движений

Как следует из графиков относительного движения (рисунок 2, б), упругие перемещения во время могут быть достаточно большими.

2. Подавление вынужденных колебаний упругой системы при ее оптимальном переносном движении с использованием ПД-регулятора. Схема системы с отрицательной обратной связью изображена на рисунке 3.

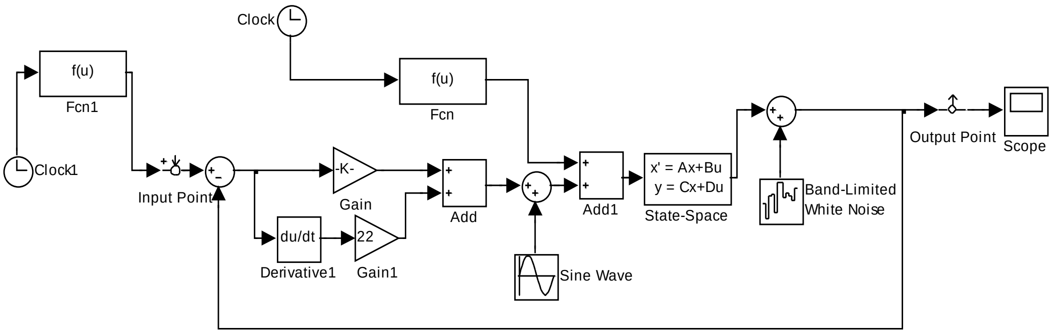


Рисунок 3 – Функциональная схема упругой системы при комбинированном управлении

Передаточная функция объекта управления записывается в виде: $W_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + k^2}$.

Уравнение ПД-регулятора имеет вид $R(s) = a + bs$, где a, b – константы, подлежащие определению. Из прямой цепи системы с регулятором следует: $W_2(s) = \dfrac{-a - bs}{s^2 + k^2}$.

Замкнутая система с отрицательной обратной связью имеет передаточную функцию

$$W_{охв}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)} = \frac{-a - bs}{s^2 + (k^2 + a) + bs}$$

и описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}_r + 2b\dot{x}_r + (k^2 + 2a)x_r = 0\,,$$

где k^2 – квадрат частоты собственных колебаний системы (без регулятора). Параметры a, b должны обеспечивать абсолютный покой упругой системы в конце переносного движения со снижением упругих колебаний объекта на интервале $T \geq t \geq 0$.

Время общего переносного движения должно быть согласовано с периодом собственных колебаний системы с регулятором $T = T_1\xi$, где в данном случае параметр $\xi = 4$, т.е. за время движения упругая система будет совершать четыре полных колебания. Квадрат частоты системы с обратной связью записывается как

$$k^2 + 2a - b^2 = k_1^2, \tag{3}$$

где $k_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$.

В переносном движении динамический коэффициент, характеризующий эффект воздействия, здесь принимается достаточно малым. Для упругой системы при гармоническом законе воздействия динамический коэффициент, как известно, равен:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{p^2}{k_1^2})^2 + 4(\frac{b}{k_1})^2(\frac{p}{k_1})^2}}. \tag{4}$$

Зависимости (3) и (4) образуют систему алгебраических уравнений

$$k^2 + 2a - b^2 - k_1^2 = 0, \qquad \eta^2\left[(1-\frac{p^2}{k_1^2})^2 + 4(\frac{b}{k_1})^2(\frac{p}{k_1})^2\right] - 1 = 0; \tag{5}$$

относительно неизвестных параметров a, b – коэффициентов усиления в обратной связи.

Пример. Исходные данные: $k = 6{,}2832\, c^{-1}$; $p = 1{,}5708\, c^{-1}$; $T = 4\, c$; $T_1 = \dfrac{T}{4} = 1\, c$; $k_1 = \dfrac{2\pi}{T_1} = 2\pi\, c^{-1}$; $\eta = 0{,}5$. Из системы (5) следует: $a = 246{,}432\, c^{-2}$; $b = 22{,}200\, c^{-1}$.

Структурная схема в Simulink (рисунок 4) позволила исследовать различные случаи движения: без обратной связи; с обратной связью; без учета и с учетом детерминированных и случайных воздействий.

Обратная связь эффективно снижает уровень колебаний системы на временном интервале, т.е. при достижении состояния покоя в конце движения эффективно снижается уровень колебаний в процессе движения.

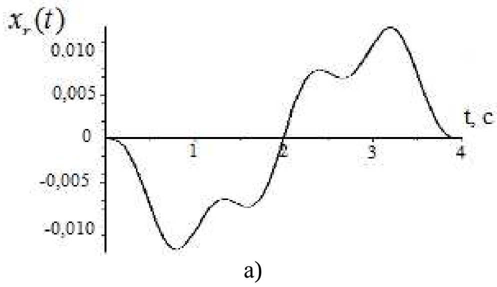
Если начальные условия в относительном движении не нулевые, то в соответствии с принципом суперпозиции в линейной системе может использоваться дополнительное управление, которое носит резонансный характер и находится согласно теории моментов [4]. Если, например, $x_r(0) = x_r^*$ и $\dot{x}_r(0) = 0$, то дополнительное управление примет следующий вид

$$U^*(t) = \frac{2x_r^* k_1^2}{n\pi} \sin k_1 t,$$

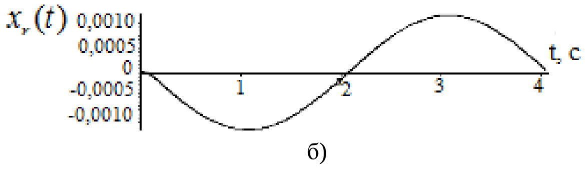
где параметр n следует найти из соотношения $n = \dfrac{k_1 T}{\pi}$.

Пример. Используются принятые ранее исходные данные: $T = 4c$, $k_1 = 6{,}2832\, c^{-1}$.

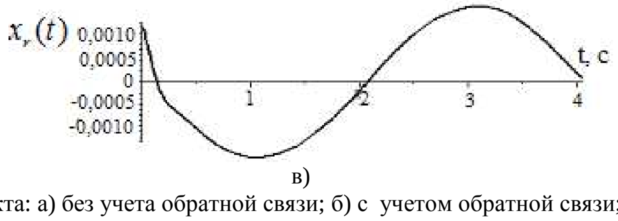
Случаи относительного перемещения с учетом и без учета обратной связи показаны на рисунке 4.



а)



б)



в)

Рисунок 4 – Относительное перемещение упругого объекта: а) без учета обратной связи; б) с учетом обратной связи; в) с учетом обратной связи и с не нулевыми начальными условиями в относительном движении

Выводы. При использовании ПД-регулятора изменяется период собственных колебаний упругой системы и для достижения цели управления следует скорректировать управление переносным движением. Отрицательная обратная связь эффективно снижает упругие перемещения системы в процессе движения.

В случае ненулевых начальных условий в относительном движении такие свободные колебания успешно подавляются к концу переносного движения с использованием дополнительного резонансного управления. Сочетание различных типов управления обеспечивает необходимое качество движения управляемого упругого объекта.

Авторы благодарят рецензента д.т.н., проф. А.Т. Барабанова .

Библиографический список использованной литературы

1. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. — Севастополь, 2007. — 246 с.

2. BokhonskyA.I. Modellingandanalysisofelasticsystemsinmotion / A.I. Bokhonsky, S.Y. Zolkiewski. — Gliwice: WydawnictwoPolitechniki, 2011. — 171 p.

3. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике: монография / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. — Севастополь, 2012. — 212 с.

4. Бохонский А.И. Оптимальное управление перемещением упругого объекта с учетом сопротивлений/ А.И. Бохонский, А.Н. Круговой // Оптимізація виробничих процесів. зб. наук. пр. — Севастополь, 2013. — Вип. 14. — С. 7–11.

5. Теория автоматического управления. Ч. II. / под. ред. А.А. Воронова. — М.: Высш. шк., 1977. — 288 с.

6. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.И. Почтман. — К: Высш. шк., 1982. — 176 с.

7. Зайцев Г.Ф. Основы автоматического управления и регулирования / Г.Ф. Зайцев, В.И. Костюк, П.И. Чинаев. — К.: Техніка, 1975. — 496 с.

8. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп; пер. с англ. — М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. — 832 с.

Поступила в редакцию 20.01.2014 г.

Бохонський О.І., Васильченко О.К., Майстрішин М.М. Управління коливаннями пружної системи при оптимальному переносному русі

Показано, що при оптимальному переносному русі пружної системи з вихідного стану в кінцевий стан абсолютного спокою за мінімальний час, коливання, що виникають в процесі руху, ефективно придушуються з використанням ПД-регулятора (в замкнутій системі з негативним зворотним зв'язком).

Ключові слова: пружний об'єкт, переносний і відносний рух, оптимальне управління, негативний зворотний зв'язок.

Bokhonsky A.I., Vasilchenko A.K., Maystrishin M.M. Control of vibrations of elastic system with optimal figurative movement

It is shown that an optimum figurative movement elastic system from the initial state to the final state of absolute rest in minimum time fluctuations occurring during the movement, effectively suppressed using a PD controller (in a closed system with a negative feedback).

Keywords: elastic object, portable and relative motion, optimal control, negative feedback.