8. http://macspoon.ru/apple/light-peak/ Rezhim dostupa: svobodnyj, Zagl. s ekrana, Jaz. rus.
9. http://technosci.net/news/2011-12-03-3479. Rezhim dostupa: svobodnyj, Zagl. s ekrana, Jaz. rus.
10. http://konspektiruem.ru/news/Cherez-shest-let-razvitie-sovremennoi-mikroehlektroniki-zaidet-v-tupik-buduwee-kompjuterov-lezhit-v-fotonike-opticheskoi-peredache-dannyh/ Rezhim dostupa: svobodnyj, Zagl. s ekrana, Jaz. rus.
11. Grebnev, A.K., Gridin, V.N. and Dmitriev, V.P. (1998), *Optojelektronnye jelementy i ustrojstva* [Optronic elements and devices], Radio i svjaz', Moskow.
12. Jushin, A.M. (2000-2003), *Optojelektronnye pribory i ih zarubezhnye analogi. Spravochnik* [Optronic devices and their foreign analogues], vol. 1, RadioSoft, Moskow, Russia.
13. Nosov, Ju.R. (1989), *Optojelektronika* [Optoelectronics], Radio i svjaz', Moskow.
14. Kozhemjako, V.P., Timchenko, L.I., Lysenko, G.L. and Kutaev, Ju.F. (1990) *Funkcional'nye jelementy i ustrojstva optojelektroniki* [Functional elements and devices of optoelectronics], UMK VO, Kiev.
15. Proskurin, N.P. and Grushko, S.S. (2011), “Simulation of optoelectronic inverter for models of micro-power optocouplers VHF range for optical interface of digital machines”, Sistemi obrobki informacii, no. 3(93), pp. 72-75.
16. Proskurin, M.P. (2013), *“*OIUS of the digital integrated circuits on Si lining”, *Naukoviy visnyk Cherniveckogo universitetu*, vol. 4, issue 4, pp. 125-130.

UDC 519.832.3+519.711.2+519.615.7

INVARIANT OF TWO DRAWING-NEAREST PROBLEMS AND OF THREE TYPES OF THE SECOND PLAYER OPTIMAL STRATEGIES CONTINUUM IN THE GAME, MODELING THE REDUCTION OF SINGLE-PARAMETER FOUR-ELEMENT UNCERTAINTY

Romanuke V. V., professor, d. t. s., associate professor

Khmelnitskiy National University, Institutskaya str., 11, Khmelnitskiy, Ukraine, 29016

romanukevadimv@mail.ru

There is considered an uncertainty in modeling mathematically, when for identifying or describing the object there are two or more mathematical models without the pattern one. Every model has the single output parameter. The study is directed at reducing uncertainties, when they aren’t featured with any statistical performance. The recital is divided into five sections: topicality, related sources, object and target, preparatory notations and completing the unresolved case, final conclusion. In topicality short substantiation, it is quoted that uncertainties of an event are generated everywhere and anytime due to imperfection and insufficiency or inadequacy in learning it. Thus reducing uncertainties on the whole is an applicable topic ever. Commonly, methods of reducing uncertainties operate with probability measure over the being learned event parameter, but minimax estimates are preferred to be used when information about the event properties appears poor. In observing related sources, it is recalled that two-element uncertainties without prior information are trivially resolved by the minimax estimator, where each of those elements is recommended to be used equiprobably. Three-element and four-element uncertainties without prior information were resolved previously in the author’s two corresponding articles by determining the set of probability distributions over those elements. However, the set generally was continuum. Then in author’s another two articles, there was partially proved the solution uniqueness in the problem of determining a single probability distribution for the criterion of drawing it nearest to the uniform distribution. Namely, having had referred to the previously determined three types of the optimal strategies continuum for the second player in the corresponding matrix 4×4-game, there had been found the same unique optimal strategy for two types to apply it over the fixed model output values as a quasiequiprobable distribution. And such a

distribution was determined as the nearest one to the equiprobable four-element probability distribution in the sense of the least-squares sum. The third unsolved type had been proved to be stated in the same linear combination view as the solved two types. Thus, for the problem of reducing four-element uncertainties, there remained a case of relationship for constituting the continuum set of probability distributions, where the single distribution has been not yet determined. Due to this, within the object-and-target section, there is formulated the generalized problem of removing strictly single-parameter four-model uncertainty, using the approach of minimizing assuredly the absolute deviations among the fixed model output values. The generally stated 4×4-game matrix depends on the relationship among three constants. Further, within the section of preparatory notations and completing the unresolved case, there is being completed the unresolved case in selecting the unique optimal strategy from the set of the second player optimal strategies in that matrix game, modeling four-element uncertainties reduction. In the game, there are assuredly minimized the absolute deviations, without any scaling or mapping. The selection criterion is to draw nearest the being searched strategy to the $\mathbb{R}^4$ uniform distribution, using the quadratic distance. There is proved the determined unique optimal strategy to be the invariant of the two drawing-nearest problems and of the three types of the optimal strategies continuum for the second player in the game. Finally, this solves completely the generalized problem of reducing single-parameter four-element uncertainty, using the minimax estimator approach, when any prior information about those elements estimation is unavailable.
Key words: uncertainty, four-element uncertainty, minimax estimator, second player optimal strategies, drawing-nearest problem, invariant of the problem, invariant of the continuum type.

ИНВАРИАНТ ДВУХ ЗАДАЧ ПОЛУЧЕНИЯ БЛИЖАЙШЕГО И ТРЁХ ТИПОВ КОНТИНУУМА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ВТОРОГО ИГРОКА В ИГРЕ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ УСТРАНЕНИЕ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧЕТЫРЁХЭЛЕМЕНТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Романюк В. В., профессор, д. т. н., доцент

Хмельницкий национальный университет,
ул. Институтская, 11, г. Хмельницкий, Украина, 29016

romanukevadimv@mail.ru

Рассматривается неопределённость в математическом моделировании, когда для идентификации или описания объекта существует две или более математических моделей без образцовой модели. У каждой модели есть единственный выходной параметр. Исследование направлено на устранение неопределённостей, когда они не снабжены какими-либо статистическими характеристиками. Изложение материала разделено на пять разделов: актуальность, соотнесённые источники, объект и цель, предварительные примечания и завершение неразрешённого случая, окончательный вывод. При коротком обосновании актуальности цитируется то, что неопределённости порождаются повсюду и в любое время вследствие неполноты и недостаточности или неадекватности изучения определённого явления. Поэтому устранение неопределённостей в целом является одной из тем, которые востребованы постоянно. Как правило, методы устранения неопределённостей оперируют вероятностной мерой, связываемой с параметром изучаемого явления, но минимаксные оценки предпочтительны в использовании, когда информация о свойствах явления довольно скудна. В обозрении соотнесённых источников напоминается, что двухэлементные неопределённости без априорной информации тривиально разрешимы по минимаксной оценке, где каждый из элементов рекомендуется использовать равновероятно. Трёхэлементные и четырёхэлементные неопределённости без априорной информации были разрешены прежде в двух соответствующих статьях автора при помощи определения множества вероятностных распределений на этих элементах. Однако это множество было континуумом. Затем в двух других статьях автора было частично доказано уникальность решения задачи определения единственного распределения вероятностей по критерию получения ближайшего к равномерному распределению. Именно сославшись на предварительно определённые три типа континуума оптимальных стратегий второго игрока в соответствующей матричной 4×4-игре, было найдено одну и ту же уникальную оптимальную стратегию для двух типов для того, чтобы применять её над зафиксированными значениями модельных выходов в качестве квазиравновероятного распределения. И такое распределение определялось как ближайшее к равновероятному четырёхэлементному распределению вероятностей в смысле суммы наименьших квадратов. Было доказано, что третий нерешённый тип может быть выписан в том же виде линейной комбинации, что и решённые два типа. Таким образом, для задачи устранения четырёхэлементных неопределённостей остался случай с соотношением для образования континуума распределений вероятностей, где единственное распределение ещё не было определено. В соответствии с этим, в разделе с объектом и целью формулируется обобщённая задача строгого устранения однопараметрической четырёхмодельной неопределённости с использованием подхода, где гарантировано минимизируются абсолютные отклонения среди зафиксированных значений модельных выходов. Матрица обобщённо выписанной 4×4-игры зависит от соотношения среди трёх констант. Далее в разделе с предварительными примечаниями и завершением неразрешённого случая закрывается вопрос о нерешённом случае выбора уникальной оптимальной стратегии из множества оптимальных стратегий второго

игрока в этой матричной игре, моделирующей устранение четырёхэлементных неопределённостей. В этой игре гарантировано минимизируются абсолютные отклонения без какого-либо масштабирования или отображения. Критерий выбора состоит в том, чтобы получить искомую стратегию ближайшей к равномерному распределению в $\mathbb{R}^4$, используя квадратичное расстояние. Доказывается, что эта определённая уникальная оптимальная стратегия является инвариантом двух задач получения ближайшего и трёх типов континуума оптимальных стратегий второго игрока в игре. Это, наконец, полностью решает обобщённую задачу устранения однопараметрической четырёхэлементной неопределённости с использованием подхода минимаксной оценки, когда недоступна никакая априорная информация об оценивании этих элементов.

Ключевые слова: неопределённость, четырёхэлементная неопределённость, минимаксная оценка, оптимальные стратегии второго игрока, задача получения ближайшего, инвариант задачи, инвариант типа континуума.

ІНВАРІАНТ ДВОХ ЗАДАЧ ОТРИМАННЯ НАЙБЛИЖЧОГО ТА ТРЬОХ ТИПІВ КОНТИНУУМА ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ ДРУГОГО ГРАВЦЯ У ГРІ, ЩО МОДЕЛЮЄ УСУНЕННЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ ЧОТИРЬОХЕЛЕМЕНТНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Романюк В. В., професор, д. т. н., доцент

Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, м. Хмельницький, Україна, 29016

romanukevadimv@mail.ru

Розглядається невизначеність у математичному моделюванні, коли для ідентифікації або опису об’єкта існує дві або більше математичних моделей без зразкової моделі. У кожної моделі є єдиний вихідний параметр. Дослідження спрямовано на усунення невизначеностей, коли вони не наділені якими-небудь статистичними характеристиками. Виклад матеріалу розділений на п’ять розділів: актуальність, співвіднесені джерела, об’єкт і ціль, попередні примітки і завершення нерозв’язаного випадку, остаточний висновок. За короткого обґрунтування актуальності цитується те, що невизначеності породжуються усюди й у будь-який час внаслідок неповноти і недостатності або неадекватності вивчення певного явища. Тому усунення невизначеностей загалом є однією з тем, котрі затребувані постійно. Як правило, методи усунення невизначеностей оперують імовірнісною мірою, котра пов’язується з параметром явища, що вивчається, але мінімаксним оцінкам надають перевагу у використанні, коли інформація про властивості явища доволі незначна. В огляді співвіднесених джерел нагадується, що двохелементні невизначеності без апріорної інформації є тривіально розв’язними за мінімаксною оцінкою, де кожен із елементів рекомендовано використовувати рівноймовірно. Трьохелементні та чотирьохелементні невизначеності без апріорної інформації були розв’язані раніше у двох відповідних статтях автора за допомогою визначення множини імовірнісних розподілів на цих елементах. Однак ця множина була континуумом. Потім у двох інших статтях автора було частково доведено унікальність розв’язку задачі визначення єдиного розподілу ймовірностей за критерієм отримання найближчого до рівномірного розподілу. Саме пославшись на попередньо визначені три типи континуума оптимальних стратегій другого гравця у відповідній матричній 4×4-грі, було знайдено одну й ту ж унікальну оптимальну стратегію для двох типів для того, щоб застосовувати її над зафіксованими значеннями модельних виходів як квазірівноймовірний розподіл. І такий розподіл визначався як найближчий до рівноймовірного чотирьохелементного розподілу у смислі суми найменших квадратів. Було доведено, що третій нерозв’язаний тип може бути виписаний у тому ж виді лінійної комбінації, що й розв’язані два типи. Отже, для задачі усунення чотирьохелементних невизначеностей залишився випадок зі співвідношенням для утворення континуума розподілів імовірностей, де єдиний розподіл ще не був визначений. Відповідно до цього, у розділі з об’єктом і метою формулюється узагальнена задача строгого усунення однопараметричної чотиримодельної невизначеності з використанням підходу, де гарантовано мінімізуються абсолютні відхилення серед зафіксованих значень модельних виходів. Матриця узагальнено виписаної 4×4-гри залежить від співвідношення серед трьох констант. Далі в розділі з попередніми примітками і завершенням нерозв’язаного випадку закривається питання щодо нерозв’язаного випадку з вибором унікальної оптимальної стратегії з множини оптимальних стратегій другого гравця у цій матричній грі, котра моделює усунення чотирьохелементних невизначеностей. У цій грі гарантовано мінімізуються абсолютні відхилення без будь-якого масштабування або відображення. Критерій вибору полягає в тому, щоб отримати шукану стратегію найближчою до рівномірного розподілу в $\mathbb{R}^4$, використовуючи квадратичну відстань. Доводиться, що ця визначена унікальна оптимальна стратегія є інваріантом двох задач отримання найближчого та трьох типів континуума оптимальних стратегій другого гравця у грі. Це, нарешті, повністю розв’язує узагальнену задачу усунення однопараметричної чотирьохелементної невизначеності з використанням підходу мінімаксної оцінки, коли недоступна ніяка апріорна інформація про оцінювання цих елементів.

Ключові слова: невизначеність, чотирьохелементна невизначеність, мінімаксна оцінка, оптимальні стратегії другого гравця, задача отримання найближчого, інваріант задачі, інваріант типу континуума.

TOPICALITY

Reducing uncertainties on the whole is an applicable topic ever. Uncertainties of an event are generated everywhere and anytime due to imperfection and insufficiency or inadequacy in learning it. Methods of reducing uncertainties operate with probability measure over the being learned event parameter, but sometimes, when there is poor information about the event properties, minimax estimates should be used.

RELATED SOURCES

One may make sure of that two-element uncertainties without prior information are trivially resolved by the minimax estimator, where each of those elements is recommended to be used equiprobably [1]. Three-element and four-element uncertainties without prior information are resolved in papers [2, 3] by determining the set of probability distributions over those elements. As such set generally is continuum, then in papers [4, 5] there was partially proved the solution uniqueness in the problem of determining a single probability distribution for the criterion of drawing it nearest to the uniform distribution. And for the problem of reducing four-element uncertainties there remains a case of relationship for constituting the continuum set of probability distributions, where the single one has been not determined.

OBJECT AND TARGET

May there be four elements (mathematical models, outputting just four theoretical values), describing the property (parameter) v of an event (object). The i-th element gives the value v_i and

$$\{v_i\}_{i=1}^{4} = \{v_1,\, v_1+a,\, v_1+a+b,\, v_1+a+b+c\},\quad v_1 \in \mathbb{R},\quad a>0,\quad b>0,\quad c>0. \tag{1}$$

Any prior information about the set (1) is unavailable. According to this, in the paper [3] there was got the four-element probability distribution over the set (1) via playing the 4×4 matrix game

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{4},\, \{c_j\}_{j=1}^{4},\, \left[u_{kj}\right]_{4\times 4} \right\rangle \tag{2}$$

on the side of the second player, in which the second player possesses an optimal strategy over the set of its pure strategies $\{c_j\}_{j=1}^{4}$ to minimize assuredly the absolute deviations

$$u_{kj} = \left|v_k - v_j\right| \quad \forall\ k=\overline{1,\,4} \ \text{ and } \ \forall\ j=\overline{1,\,4}. \tag{3}$$

The game (2) by (3) with the k-th pure strategy m_k of the first player and the j-th pure strategy c_j of the second is properly

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{4},\, \{c_j\}_{j=1}^{4},\, \begin{bmatrix} 0 & a & a+b & a+b+c \\ a & 0 & b & b+c \\ a+b & b & 0 & c \\ a+b+c & b+c & c & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{4}$$

due to the set of outputs (1). In the game (4) the second player has three types of continuums of optimal strategies, where each type depends on the relationship among constants $\{a,\, b,\, c\}$. For cases $a \in \left(0;\, c-b\right]$ and $a \in \left[b+c;\, \infty\right)$ the unique optimal strategy was selected in the paper [5], but the case $a \in \left[c-b;\, b+c\right]$ remained unresolved. So, now the target is to select the unique optimal strategy from the set of the second player optimal strategies in the game (4) at $a \in \left[c-b;\, b+c\right]$ by applying the known criterion [5] of the nearest approximation of the being searched strategy to the equiprobable four-element distribution.

PREPARATORY NOTATIONS AND COMPLETING THE UNRESOLVED CASE

A case of continuum $\breve{\mathcal{Q}}$ of the second player optimal strategies $\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3 \quad \breve{q}_4]$ in the game (2) with (3) from (1) is derived as convex combination of a subset [3] of six points

$$\breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{a-b-c}{2a} & \frac{a+b+c}{2a} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a+b+c}{2(b+c)} & 0 & \frac{b+c-a}{2(b+c)} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{a+b+c}{2c} & \frac{c-a-b}{2c} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{a+b-c}{2(a+b)} & 0 & \frac{a+b+c}{2(a+b)} & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\breve{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a+b-c}{2b} & \frac{b+c-a}{2b} & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

naturally belonging to the regular tetrahedron

$$\mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{Q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4] \in \mathbb{R}^4 : q_j \in [0;\, 1] \ \forall \ j = \overline{1,\, 4},\ \sum_{j=1}^{4} q_j = 1 \right\} \tag{11}$$

in such a way, that those three cases are begotten. At $a \in (0;\, c-b]$ there is a convex combination of three points (5), (7) and (8), begetting

$$\breve{\mathcal{Q}} = \left\{ \left[\frac{\beta}{2} \quad \alpha(1-\beta)\frac{a+b+c}{2(b+c)} \quad (1-\alpha)(1-\beta)\frac{a+b+c}{2c} \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{(\beta-1)\big((a+b)(b+c)(1-\alpha)+\alpha ac\big)+c(b+c)}{2c(b+c)} \right] \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in [0;\, 1],\ \beta \in [0;\, 1] \right\} \subset \mathcal{Q}. \tag{12}$$

At $a \in [c-b;\, b+c]$ there is a convex combination of four points (5), (7), (9) and (10), begetting

$$\breve{\mathcal{Q}} =$$

$$= \left\{ \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(a+b-c)+\gamma(a+b)}{2(a+b)} \quad (1-\gamma)\frac{(1-\beta)\alpha(b+c)(a+b-c)+\beta b(a+b+c)}{2b(b+c)} \right.\right.$$

$$\left. (1-\beta)(1-\gamma)\frac{\alpha a(c-a-b)+b(a+b+c)}{2b(a+b)} \quad \frac{\beta(1-\gamma)(b+c-a)+\gamma(b+c)}{2(b+c)} \right] \in$$

$$\left. \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in [0;\, 1],\ \beta \in [0;\, 1],\ \gamma \in [0;\, 1] \right\} \subset \mathcal{Q}. \tag{13}$$

At $a \in [b+c;\, \infty)$ there is a combination of three points (5), (6) and (9), begetting

$$\breve{\mathcal{Q}} = \left\{ \left[\frac{(\beta-1)\big((a+b)(b+c)(1-\alpha)+\alpha ac\big)+a(a+b)}{2a(a+b)} \quad (1-\alpha)(1-\beta)\frac{a+b+c}{2a} \right.\right.$$

$$\alpha(1-\beta)\frac{a+b+c}{2(a+b)} \quad \frac{\beta}{2}\Bigg] \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in [0;1],\ \beta \in [0;1] \Bigg\} \subset \mathcal{Q}. \tag{14}$$

The unique optimal strategy

$$\breve{\mathbf{Q}}^* = \begin{bmatrix} \breve{q}_1^* & \breve{q}_2^* & \breve{q}_3^* & \breve{q}_4^* \end{bmatrix} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q} \tag{15}$$

was selected [5] being the nearest to the equiprobable [4] four-element distribution

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

And there were proved two theorems on that selecting such a strategy (15) which would be the nearest to the point (16) is solved via either the problem [5, 6]

$$\arg\min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \sum_{p=1}^{j-1} \left(\breve{q}_p - \breve{q}_j \right)^2 \right\} = \arg\left(\min_{[\breve{q}_1 \ \breve{q}_2 \ \breve{q}_3 \ \breve{q}_4] \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \sum_{p=1}^{j-1} \left(\breve{q}_p - \breve{q}_j \right)^2 \right\} \right) \tag{17}$$

or the problem [1, 5, 6]

$$\arg\min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \left(\breve{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 \right\} = \arg\left(\min_{[\breve{q}_1 \ \breve{q}_2 \ \breve{q}_3 \ \breve{q}_4] \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left\{ \sum_{j=1}^{4} \left(\breve{q}_j - \frac{1}{4} \right)^2 \right\} \right) \tag{18}$$

for continuums (12) and (14), where each of the problems (17) and (18) has the single solution (15)

$$\breve{\mathbf{Q}}^* = \Bigg[\frac{3a^2+2b^2+c^2+3ab+bc}{2\left(4b^2+3a^2+3c^2+4ab+4bc+2ac\right)} \quad \frac{a^2+2b^2+c^2+3ab+bc+2ac}{2\left(4b^2+3a^2+3c^2+4ab+4bc+2ac\right)}$$

$$\frac{a^2+2b^2+c^2+ab+3bc+2ac}{2\left(4b^2+3a^2+3c^2+4ab+4bc+2ac\right)} \quad \frac{a^2+2b^2+3c^2+ab+3bc}{2\left(4b^2+3a^2+3c^2+4ab+4bc+2ac\right)} \Bigg], \tag{19}$$

being the invariant of these problems in the game (2) with (3) from (1). For the continuum (13) it was proved (Theorem 2 in [5]) that any solution (15) of the problems (17) and (18) as an element of the continuum of the second player optimal strategies (13) in the game (2) with (3) from (1) can be stated via fixing a variable from the set $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ and substituting it into other two variables, being the functions of the fixed variable, where there must be controlled whether each element from the set $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ belongs to the segment $[0;1]$. The sense of this is that when solving the problems (17) and (18) for the continuum (13), then there can be minimized a function of two variables like for (12) and (14), rather than three. The next assertion explains the cause of this fact.

Theorem 1. The $\mathbb{R}^4$ points (5), (7), (9) and (10), belonging to the part (11) of the three-dimensional hyperplane in $\mathbb{R}^4$, lie in a two-dimensional hyperplane of this three-dimensional $\mathbb{R}^4$ hyperplane.

Proof. For facility of proof let the matrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{a+b-c}{2(a+b)} & 0 & \frac{a+b+c}{2(a+b)} & 0 \\ 0 & \frac{a+b-c}{2b} & \frac{b+c-a}{2b} & 0 \\ 0 & \frac{a+b+c}{2(b+c)} & 0 & \frac{b+c-a}{2(b+c)} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

with its rows as the points (9), (10), (7), (5) respectively be considered. Let it be checked whether the expansion

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = k_1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{a+b-c}{2(a+b)} & 0 & \frac{a+b+c}{2(a+b)} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+k_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{a+b-c}{2b} & \frac{b+c-a}{2b} & 0 \end{bmatrix} + k_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{a+b+c}{2(b+c)} & 0 & \frac{b+c-a}{2(b+c)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

is true for some real constants k_1, k_2, k_3. With the first and fourth columns of the matrix (20) it is easy to see that

$$k_1 = \frac{a+b}{a+b-c} \quad (22)$$

and

$$k_3 = \frac{b+c}{b+c-a}. \quad (23)$$

As it is seen for the second and third columns of the matrix (20), the constant k_2 may be found either from the equation

$$k_2 \cdot \frac{a+b-c}{2b} + k_3 \cdot \frac{a+b+c}{2(b+c)} = 0 \quad (24)$$

or

$$k_1 \cdot \frac{a+b+c}{2(a+b)} + k_2 \cdot \frac{b+c-a}{2b} = 0. \quad (25)$$

Solving (24) with the substituted (23) and solving (25) with the substituted (22) gives the constant

$$k_2 = \frac{b(a+b+c)}{(a-b-c)(a+b-c)}. \quad (26)$$

Thus with the real constants (22), (26) and (23) the expansion (21) is true, that is the point (5) is the linear combination of the points (7), (9) and (10). This means that any point from the set of points (5), (7), (9) and (10) can be expanded as a linear combination of the other three points. So, the $\mathbb{R}^4$ points (5), (7), (9), (10), lying in the three-dimensional $\mathbb{R}^4$ hyperplane, due to the stated also lie in a two-dimensional hyperplane of this three-dimensional $\mathbb{R}^4$ hyperplane. The theorem has been proved.

Nevertheless, it is pretty hard to state the continuum $\breve{\mathcal{Q}}$ algebraically in the case of $a \in [c-b; b+c]$ with only $\alpha \in [0; 1]$ and $\beta \in [0; 1]$ for combining convexly the $\mathbb{R}^4$ points (5), (7), (9) and (10). However, even stated the continuum $\breve{\mathcal{Q}}$ as the convex combination of the $\mathbb{R}^4$ points (5), (7), (9), (10) with three independent $[0; 1]$-variables [3], below is the proof of that the unique optimal strategy (15) from this continuum, being the nearest to the equiprobable four-element probability distribution (16), is the same as for continuums (12) and (14).

Theorem 2. For the continuum of the second player optimal strategies (13) in the game (2) with (3) from (1) each of the problems (17), (18) has the single solution (19), being the invariant of these problems.

Proof. For the problem (17) there is the function

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\breve{q}_p-\breve{q}_j\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(a+b-c)+\gamma(a+b)}{2(a+b)}-(1-\gamma)\frac{(1-\beta)\alpha(b+c)(a+b-c)+\beta b(a+b+c)}{2b(b+c)}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(a+b-c)+\gamma(a+b)}{2(a+b)}-(1-\beta)(1-\gamma)\frac{\alpha a(c-a-b)+b(a+b+c)}{2b(a+b)}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(a+b-c)+\gamma(a+b)}{2(a+b)}-\frac{\beta(1-\gamma)(b+c-a)+\gamma(b+c)}{2(b+c)}\right)^2+$$
$$+\left((1-\gamma)\frac{(1-\beta)\alpha(b+c)(a+b-c)+\beta b(a+b+c)}{2b(b+c)}-(1-\beta)(1-\gamma)\frac{\alpha a(c-a-b)+b(a+b+c)}{2b(a+b)}\right)^2+$$
$$+\left((1-\gamma)\frac{(1-\beta)\alpha(b+c)(a+b-c)+\beta b(a+b+c)}{2b(b+c)}-\frac{\beta(1-\gamma)(b+c-a)+\gamma(b+c)}{2(b+c)}\right)^2+$$
$$+\left((1-\beta)(1-\gamma)\frac{\alpha a(c-a-b)+b(a+b+c)}{2b(a+b)}-\frac{\beta(1-\gamma)(b+c-a)+\gamma(b+c)}{2(b+c)}\right)^2=\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma) \quad (27)$$

to be minimized on the set (13). The function (27), defined on the unit $\mathbb{R}^3$ cube

$$[0;1]\times[0;1]\times[0;1] \quad (28)$$

of points $\left[\alpha \quad \beta \quad \gamma\right]$, is continuous nonnegative function. This means that the function (27) has at least a minimum [7, 8]. That minimum may be reached at stationary points of the function (27), and also on faces of the cube (28). For finding minima, reached at stationary points, determine zeros of partial derivatives of the function (27). Here [5]

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)=2(\beta-1)(\gamma-1)(a+b-c)\Big(\gamma ab^3+\gamma a^2b^2+2\alpha a^3c-2\alpha\beta b^4-2\alpha b^2c^2-2\beta\gamma b^4+$$
$$+5\beta ab^3-2\alpha a^2c^2-\beta b^2c^2+\beta b^3c-\gamma b^2c^2-2\alpha\gamma b^4-\gamma b^3c-a^2bc-3ab^2c+4\alpha ab^3+\beta a^3b+4\beta a^2b^2+$$
$$+2\alpha a^3b+4\alpha a^2b^2-abc^2+2\alpha\gamma abc^2-2\alpha\beta\gamma abc^2+2\alpha\beta abc^2-\beta\gamma abc^2-4\alpha\beta a^2b^2+2\alpha\beta\gamma b^4-$$
$$-4\beta\gamma a^2b^2-4\alpha\gamma a^2b^2+2\beta a^2bc+2\alpha\beta c^2b^2+2\alpha ab^2c+\beta\gamma b^2c^2+2\alpha\gamma b^2c^2-2\alpha\beta a^3b-2\alpha\beta a^3c-$$
$$-2\alpha\gamma a^3b-2\alpha\gamma a^3c-\beta\gamma a^3b-\beta\gamma b^3c+2\alpha\beta a^2c^2+2\alpha\gamma a^2c^2+2\gamma ab^2c-4\alpha\gamma ab^3+\gamma abc^2+5\beta ab^2c+$$
$$+\beta abc^2-2\alpha abc^2-5\beta\gamma ab^3-4\alpha\beta ab^3+2\alpha a^2bc+\gamma a^2bc-b^4+b^2c^2+2\beta b^4-2ab^3-a^2b^2+2\alpha b^4+$$
$$+4\alpha\beta\gamma ab^3+4\alpha\beta\gamma a^2b^2-2\alpha\beta\gamma b^2c^2+2\alpha\beta\gamma ab^2c+2\alpha\beta\gamma a^2bc-2\alpha\beta ab^2c-2\alpha\beta a^2bc-2\beta\gamma a^2bc-$$
$$-2\alpha\gamma ab^2c+2\alpha\beta\gamma a^3b+2\alpha\beta\gamma a^3c-2\alpha\beta\gamma a^2c^2-2\alpha\gamma a^2bc-5\beta\gamma ab^2c\Big)(a+b)^{-2}b^{-2}(b+c)^{-1}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)=2(\gamma-1)\Big(-12\alpha a^2b^4+2\alpha^2a^4b^2+6\alpha^2ab^5-9\alpha\gamma ab^2c^3+2b^2c^4-\alpha a^4b^2-2\beta a^4b^2+$$
$$+9\alpha\gamma ab^4c-4\beta b^6-6\alpha a^3b^3+4ab^5+16\alpha\beta ab^4c+4b^4c^2-4\alpha^2\gamma ab^4c+2a^2b^4+8\beta\gamma a^2b^3c-3\alpha b^6-$$
$$-6\alpha\gamma ab^3c^2-2\alpha^2\gamma b^6+16\alpha\gamma a^2b^3c+4b^3c^3+2\alpha\beta a^3bc^2+8\beta\gamma ab^3c^2+2\alpha\beta a^4bc-8\alpha a^3b^2c-5\alpha a^2b^2c^2+$$
$$+8\alpha^2a^3b^2c-4\beta a^2b^2c^2+10\alpha\beta a^3b^3-18\alpha a^2b^3c+6\alpha ab^3c^2+8\alpha^2a^2b^3c-8\gamma ab^4c-6\gamma ab^3c^2+8\alpha\gamma ab^5-$$
$$-4\alpha\gamma b^4c^2-6\alpha^2\gamma ab^5-\gamma ab^2c^3-16\beta ab^4c-8\beta ab^3c^2+\alpha a^2bc^3+2\alpha abc^4-6\alpha^2a^2b^2c^2-4\alpha^2a^2bc^3-$$
$$-8\beta a^2b^3c+18\alpha\beta a^2b^4+8\beta\gamma ab^5+6\beta\gamma b^4c^2+10\alpha ab^2c^3-8\alpha^2ab^3c^2-4\alpha^2ab^2c^3+14\alpha\beta ab^5-$$

$$
\begin{gathered}
-6\alpha\beta b^4c^2-6\alpha^2\beta ab^5-2\alpha a^3bc^2-2\alpha^2a^3bc^2-8\alpha^2\beta a^2b^4+4\alpha^2a^4bc+2\alpha\beta a^4b^2-12\alpha ab^4c+6\alpha^2a^3b^3-\\
-4\beta a^3b^3-6\beta a^2b^4-10\alpha ab^5+8\alpha^2a^2b^4+4a^2b^3c+2a^2b^2c^2+8ab^4c-5\gamma b^5c-5\gamma b^3c^3+2\alpha\gamma b^6-\\
-6\gamma b^4c^2-2\gamma b^2c^4-8\beta b^5c-4\beta b^3c^3-6\beta b^4c^2-2\beta b^2c^4-8\beta ab^5+4\beta\gamma b^6+5\alpha b^4c^2-2\alpha b^2c^4+4\alpha\beta b^6+\\
+4ab^3c^2-4\alpha^2a^3c^3+2\alpha^2a^2c^4-4\alpha^2b^4c^2+2\alpha^2b^2c^4+\alpha b^3c^3-2\alpha^2\beta b^6+2\alpha^2a^4c^2+4b^5c+2\alpha^2b^6-\\
-2\gamma b^6+12\alpha\beta a^3b^2c+4\alpha\gamma a^2b^2c^2-2\gamma a^2b^3c+4\alpha^2\gamma b^4c^2-8\alpha^2\gamma a^2b^4+11\alpha\gamma a^2b^4-8\alpha\beta ab^3c^2-\\
-12\alpha\beta ab^2c^3+24\alpha\beta a^2b^3c+16\beta\gamma ab^4c-14\alpha\beta\gamma ab^5-16\alpha\beta\gamma ab^4c-4\alpha^2\beta ab^4c-18\alpha\beta\gamma a^2b^4-\\
-24\alpha\beta\gamma a^2b^3c+8\alpha\beta\gamma ab^3c^2+8\alpha^2\beta\gamma a^2b^4+8\alpha^2\beta\gamma a^2b^3c+12\alpha\beta\gamma ab^2c^3+6\alpha\beta\gamma b^4c^2-2\alpha\beta\gamma b^2c^4-\\
-8\alpha^2\beta\gamma ab^3c^2-4\alpha^2\beta\gamma ab^2c^3-4\alpha\beta\gamma a^2b^2c^2-6\alpha^2\beta\gamma a^2b^2c^2+4\alpha\beta a^2b^2c^2-8\alpha^2\beta a^2b^3c+6\alpha^2\beta a^2b^2c^2+\\
+2b^6-8\alpha^2\gamma a^2b^3c+8\alpha^2\gamma ab^3c^2+2\alpha\gamma b^2c^4-2\gamma a^2b^2c^2+2\alpha\beta b^5c-2\alpha\beta b^3c^3+2\alpha\beta b^2c^4+2\alpha^2abc^4-\\
-4\alpha\beta\gamma b^6+6\beta\gamma a^2b^4+8\beta\gamma b^5c+4\alpha^2\beta b^4c^2-\alpha a^4bc-6\alpha^2\beta a^3b^3+2\beta\gamma b^2c^4+6\alpha\gamma a^3b^3-6\alpha^2\gamma a^3b^3+\\
+4\beta\gamma a^3b^3+4\beta\gamma b^3c^3+4\alpha^2ab^4c+2\alpha^2\beta\gamma b^6-2\alpha^2\beta b^2c^4-2\alpha^2\gamma b^2c^4-2\alpha^2\beta a^4b^2-2\alpha^2\beta a^4c^2+\\
+4\alpha^2\beta a^3c^3-2\alpha^2\gamma a^4b^2+\alpha\gamma a^4b^2-2\alpha^2\gamma a^4c^2+4\alpha^2\gamma a^3c^3+2\beta\gamma a^4b^2-2\alpha^2\beta a^2c^4-2\alpha^2\gamma a^2c^4-\\
-\alpha\gamma a^2bc^3-2\alpha\gamma abc^4-2\alpha\beta a^2bc^3-2\alpha\beta abc^4+8\alpha^2\beta ab^3c^2-\alpha b^5c+6\alpha^2\beta\gamma ab^5+6\alpha^2\beta\gamma a^3b^3+\\
+8\alpha^2\beta\gamma a^3b^2c-10\alpha\beta\gamma a^3b^3-4\alpha^2\beta\gamma b^4c^2+2\alpha^2\beta\gamma b^2c^4-4\alpha^2\beta\gamma a^2bc^3+2\alpha^2\beta\gamma abc^4+2\alpha\beta\gamma b^3c^3+\\
+4\alpha^2\beta\gamma ab^4c-2\alpha^2\beta\gamma a^3bc^2-12\alpha\beta\gamma a^3b^2c+4\alpha^2\beta ab^2c^3-8\alpha^2\beta a^3b^2c+2\alpha^2\beta a^3bc^2+4\alpha^2\beta a^2bc^3-\\
-2\alpha\beta\gamma b^5c+4\alpha^2\gamma ab^2c^3+8\alpha\gamma a^3b^2c-8\alpha^2\gamma a^3b^2c+2\alpha\gamma a^3bc^2+2\alpha^2\gamma a^3bc^2+4\beta\gamma a^2b^2c^2+6\alpha^2\gamma a^2b^2c^2+\\
+4\alpha^2\gamma a^2bc^3-2\alpha\beta\gamma a^3bc^2+2\alpha\beta\gamma a^2bc^3+2\alpha\beta\gamma abc^4-2\alpha^2\beta abc^4-2\alpha^2\gamma abc^4-4\alpha^2\beta a^4bc-\\
-4\alpha^2\gamma a^4bc+\alpha\gamma a^4bc-2\alpha\beta\gamma a^4b^2-2\alpha\beta\gamma a^4bc+2\alpha^2\beta\gamma a^4b^2+4\alpha^2\beta\gamma a^4bc+2\alpha^2\beta\gamma a^4c^2-4\alpha^2\beta\gamma a^3c^3+\\
+2\alpha^2\beta\gamma a^2c^4+\gamma a^3b^2c-3\gamma ab^5+\gamma a^3b^3\Big)\left(a+b\right)^{-2}b^{-2}\left(b+c\right)^{-2}, \qquad (30)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_2\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=2\Big(5\alpha a^2b^4+2\gamma a^2b^4-2\alpha^2a^4b^2-6\alpha^2ab^5+6\alpha\gamma ab^2c^3-2b^2c^4-2\beta^2a^4b^2-2\alpha\gamma ab^4c+\\
+4\beta b^6+2\alpha a^3b^3-2ab^5-21\alpha\beta ab^4c-5b^4c^2+4\alpha^2\gamma ab^4c-a^2b^4-4\beta\gamma a^2b^3c+\alpha b^6+4\alpha\gamma ab^3c^2+\\
+2\alpha\gamma b^5c+2\alpha^2\gamma b^6-8\alpha\gamma a^2b^3c-5b^3c^3-6\beta^2a^2b^4-4\beta^2a^3b^3-4\alpha\beta a^3bc^2-16\alpha\beta^2\gamma ab^4c+6\alpha\beta^2\gamma b^4c^2+\\
+24\alpha\beta^2a^2b^3c-4\alpha\beta^2\gamma b^6+8\beta^2\gamma ab^5+6\beta^2\gamma b^4c^2-14\alpha\beta^2\gamma ab^5+14\alpha\beta^2ab^5-12\alpha\beta^2ab^2c^3-8\beta^2ab^5-\\
-8\alpha\beta^2ab^3c^2-6\beta^2b^4c^2-2\beta^2b^2c^4+4\beta^2\gamma b^6+16\alpha\beta^2ab^4c-2\alpha\beta^2b^3c^3+2\alpha\beta^2b^5c-16\beta^2ab^4c+\\
+2\alpha\beta^2b^2c^4-6\alpha\beta^2b^4c^2-8\beta^2ab^3c^2-8\beta^2b^5c-4\beta^2b^3c^3-4\beta^2a^2b^2c^2+4\alpha\beta^2a^2b^2c^2+12\alpha\beta^2a^3b^2c+\\
+10\alpha\beta^2a^3b^3+18\alpha\beta^2a^2b^4-4\beta^2b^6+2\alpha^2\beta^2\gamma b^2c^4-2\alpha\gamma b^3c^3-8\alpha^2\beta^2a^2b^4-18\alpha\beta^2\gamma a^2b^4+8\alpha\beta^2\gamma ab^3c^2-\\
-8\alpha^2\beta^2\gamma ab^3c^2+8\alpha^2\beta^2\gamma a^2b^3c+6\alpha^2\beta^2\gamma ab^5+8\alpha^2\beta^2\gamma a^2b^4-4\alpha^2\beta^2ab^4c+4\alpha\beta^2b^6-2\alpha^2\beta^2b^6-\\
-6\alpha^2\beta^2ab^5+4\alpha^2\beta^2b^4c^2+2\alpha\beta^2a^4bc+2\alpha\beta^2a^3bc^2+2\alpha\beta^2a^4b^2-8\beta^2a^2b^3c+8\alpha^2\beta^2ab^3c^2+\\
+12\alpha\beta^2\gamma ab^2c^3-6\alpha^2\beta^2\gamma a^2b^2c^2+4\alpha^2\beta^2\gamma ab^4c-24\alpha\beta^2\gamma a^2b^3c-8\alpha^2\beta^2a^2b^3c+4\alpha^2\beta^2ab^2c^3+\\
+6\alpha^2\beta^2a^2b^2c^2-2\alpha\beta^2\gamma b^2c^4-12\beta\gamma ab^3c^2-4\alpha^2\beta^2\gamma b^4c^2-4\alpha^2\beta^2\gamma ab^2c^3+16\beta^2\gamma ab^4c+6\beta^2\gamma a^2b^4+\\
+8\beta^2\gamma b^5c-2\alpha\beta^2a^2bc^3-2\alpha\beta^2abc^4-12\alpha\beta^2\gamma a^3b^2c+2\alpha^2\beta^2\gamma abc^4-4\alpha^2\beta^2\gamma a^2bc^3+2\alpha\beta^2\gamma b^3c^3+\\
+6\alpha^2\beta^2\gamma a^3b^3+8\alpha^2\beta^2\gamma a^3b^2c-10\alpha\beta^2\gamma a^3b^3-4\alpha\beta^2\gamma a^2b^2c^2+8\beta^2\gamma ab^3c^2-8\alpha^2\beta^2a^3b^2c+2\alpha^2\beta^2a^3bc^2+\\
+4\alpha^2\beta^2a^2bc^3-2\alpha^2\beta^2\gamma a^3bc^2-6\alpha^2\beta^2a^3b^3+2\alpha^2\beta^2\gamma b^6+2\beta^2\gamma b^2c^4-2\alpha^2\beta^2b^2c^4+2\alpha\beta^2\gamma abc^4+\\
+2\alpha\beta^2\gamma a^2bc^3+8\beta^2\gamma a^2b^3c-2\alpha^2\beta^2abc^4+4\beta^2\gamma a^2b^2c^2-2\alpha\beta^2\gamma b^5c+4\beta^2\gamma a^3b^3+4\beta^2\gamma b^3c^3-2\alpha^2\beta^2a^4c^2+\\
+4\alpha^2\beta^2a^3c^3+2\beta^2\gamma a^4b^2-2\alpha^2\beta^2a^4b^2-2\alpha\beta^2\gamma a^3bc^2-2\alpha^2\beta^2a^2c^4-2\alpha\beta^2\gamma a^4b^2-2\alpha\beta^2\gamma a^4bc-\\
-4\alpha^2\beta^2a^4bc+2\alpha^2\beta^2\gamma a^2c^4+2\alpha^2\beta^2\gamma a^4c^2+2\alpha^2\beta^2\gamma a^4b^2+4\alpha^2\beta^2\gamma a^4bc-4\alpha^2\beta^2\gamma a^3c^3-2\alpha\beta a^4bc+\\
+4\alpha a^3b^2c+5\alpha a^2b^2c^2-8\alpha^2a^3b^2c-\beta a^3b^2c+4\beta a^2b^2c^2-12\alpha\beta a^3b^3+10\alpha a^2b^3c-4\alpha ab^3c^2-8\alpha^2a^2b^3c+\\
+10\gamma ab^4c+8\gamma ab^3c^2-2\alpha\gamma ab^5+2\alpha\gamma b^4c^2+6\alpha^2\gamma ab^5+2\gamma ab^2c^3+16\beta ab^4c+10\beta ab^3c^2+\beta ab^2c^3-
\end{gathered}
$$

$$-2\alpha abc^4+6\alpha^2a^2b^2c^2+4\alpha^2a^2bc^3+6\beta a^2b^3c-23\alpha\beta a^2b^4-6\beta\gamma ab^5-12\beta\gamma b^4c^2-7\alpha ab^2c^3+$$
$$+8\alpha^2ab^3c^2+4\alpha^2ab^2c^3-18\alpha\beta ab^5+9\alpha\beta b^4c^2+12\alpha^2\beta ab^5+2\alpha a^3bc^2+2\alpha^2a^3bc^2+16\alpha^2\beta a^2b^4-$$
$$-4\alpha^2a^4bc-2\alpha\beta a^4b^2+5\alpha ab^4c-6\alpha^2a^3b^3-\beta a^3b^3+2\beta a^2b^4+4\alpha ab^5-8\alpha^2a^2b^4-2a^2b^3c-a^2b^2c^2-$$
$$-5ab^4c-ab^2c^3+6\gamma b^5c+6\gamma b^3c^3+8\gamma b^4c^2+2\gamma b^2c^4+9\beta b^5c+9\beta b^3c^3+10\beta b^4c^2+4\beta b^2c^4+7\beta ab^5-$$
$$-4\beta\gamma b^6-3\alpha b^4c^2+2\alpha b^2c^4-5\alpha\beta b^6-4ab^3c^2+4\alpha^2a^3c^3-2\alpha^2a^2c^4+4\alpha^2b^4c^2-2\alpha^2b^2c^4+\alpha b^3c^3+$$
$$+4\alpha^2\beta b^6-2\alpha^2a^4c^2-3b^5c-2\alpha^2b^6+2\gamma b^6-16\alpha\beta a^3b^2c-4\alpha\gamma a^2b^2c^2+4\gamma a^2b^3c-4\alpha^2\gamma b^4c^2+$$
$$+8\alpha^2\gamma a^2b^4-4\alpha\gamma a^2b^4+12\alpha\beta ab^3c^2+19\alpha\beta ab^2c^3-34\alpha\beta a^2b^3c-16\beta\gamma ab^4c+16\alpha\beta\gamma ab^5+$$
$$+18\alpha\beta\gamma ab^4c+8\alpha^2\beta ab^4c+22\alpha\beta\gamma a^2b^4+32\alpha\beta\gamma a^2b^3c-12\alpha\beta\gamma ab^3c^2-16\alpha^2\beta\gamma a^2b^4-16\alpha^2\beta\gamma a^2b^3c-$$
$$-18\alpha\beta\gamma ab^2c^3-8\alpha\beta\gamma b^4c^2+4\alpha\beta\gamma b^2c^4+16\alpha^2\beta\gamma ab^3c^2+8\alpha^2\beta\gamma ab^2c^3+8\alpha\beta\gamma a^2b^2c^2+12\alpha^2\beta\gamma a^2b^2c^2-$$
$$-9\alpha\beta a^2b^2c^2+16\alpha^2\beta a^2b^3c-12\alpha^2\beta a^2b^2c^2-b^6+8\alpha^2\gamma a^2b^3c-8\alpha^2\gamma ab^3c^2-2\alpha\gamma b^2c^4+2\gamma a^2b^2c^2-$$
$$-\alpha\beta b^5c+\alpha\beta b^3c^3-4\alpha\beta b^2c^4-2\alpha^2abc^4+4\alpha\beta\gamma b^6-10\beta\gamma b^5c-8\alpha^2\beta b^4c^2+12\alpha^2\beta a^3b^3-4\beta\gamma b^2c^4-$$
$$-2\alpha\gamma a^3b^3+6\alpha^2\gamma a^3b^3+2\beta\gamma a^3b^3-10\beta\gamma b^3c^3-4\alpha^2ab^4c-4\alpha^2\beta\gamma b^6+4\alpha^2\beta b^2c^4+2\alpha^2\gamma b^2c^4+$$
$$+4\alpha^2\beta a^4b^2+4\alpha^2\beta a^4c^2-8\alpha^2\beta a^3c^3+2\alpha^2\gamma a^4b^2+2\alpha^2\gamma a^4c^2-4\alpha^2\gamma a^3c^3+4\alpha^2\beta a^2c^4+2\alpha^2\gamma a^2c^4+$$
$$+2\alpha\gamma abc^4+2\alpha\beta a^2bc^3+4\alpha\beta abc^4-16\alpha^2\beta ab^3c^2-\alpha b^5c-12\alpha^2\beta\gamma ab^5-12\alpha^2\beta\gamma a^3b^3-16\alpha^2\beta\gamma a^3b^2c+$$
$$+12\alpha\beta\gamma a^3b^3+8\alpha^2\beta\gamma b^4c^2-4\alpha^2\beta\gamma b^2c^4+8\alpha^2\beta\gamma a^2bc^3-4\alpha^2\beta\gamma abc^4-8\alpha^2\beta\gamma ab^4c+4\alpha^2\beta\gamma a^3bc^2+$$
$$+16\alpha\beta\gamma a^3b^2c-8\alpha^2\beta ab^2c^3+16\alpha^2\beta a^3b^2c-4\alpha^2\beta a^3bc^2-8\alpha^2\beta a^2bc^3-2\beta\gamma ab^2c^3-4\alpha^2\gamma ab^2c^3-$$
$$-4\alpha\gamma a^3b^2c+8\alpha^2\gamma a^3b^2c-2\alpha\gamma a^3bc^2-2\alpha^2\gamma a^3bc^2+2\beta\gamma a^3b^2c-4\beta\gamma a^2b^2c^2-6\alpha^2\gamma a^2b^2c^2-$$
$$-4\alpha^2\gamma a^2bc^3+4\alpha\beta\gamma a^3bc^2-2\alpha\beta\gamma a^2bc^3-4\alpha\beta\gamma abc^4+4\alpha^2\beta abc^4+2\alpha^2\gamma abc^4+8\alpha^2\beta a^4bc+$$
$$+4\alpha^2\gamma a^4bc+2\alpha\beta\gamma a^4b^2+2\alpha\beta\gamma a^4bc-4\alpha^2\beta\gamma a^4b^2-8\alpha^2\beta\gamma a^4bc-4\alpha^2\beta\gamma a^4c^2+$$
$$+8\alpha^2\beta\gamma a^3c^3-4\alpha^2\beta\gamma a^2c^4+4\gamma ab^5\Big)(a+b)^{-2}\,b^{-2}\,(b+c)^{-2}. \qquad (31)$$

In solving the system of three equations

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\beta}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0 \qquad (32)$$

it is easy to see [5] that $\beta=1$ and $\gamma=1$ are not the roots of (32), as then

$$\left.\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)\right|_{\beta=1,\ \gamma=1}=2\cdot\frac{a+b+c}{b+c}>0. \qquad (33)$$

So, instead of (32) it is convenient to solve the system [5]

$$\frac{1}{(\beta-1)(\gamma-1)}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad \frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0 \qquad (34)$$

with respect to variables α and β, that must be dependable [5] upon γ:

$$\alpha=\alpha_*=b\Big(-2a^3+3\gamma a^3+7\gamma a^2b-4a^2b-2a^2c+5\gamma a^2c-2ab^2+8\gamma ab^2+10\gamma abc+5\gamma ac^2-2ac^2+$$
$$+4\gamma b^3-2b^2c+8\gamma b^2c+7\gamma bc^2-4bc^2-2c^3+3\gamma c^3\Big)\Big(3\gamma a^4-3a^4+7\gamma a^3b-5a^3b+3a^3c-\gamma a^3c+$$
$$+8\gamma a^2b^2-3a^2b^2+2\gamma a^2bc+3a^2bc-a^2c^2+\gamma a^2c^2+ab^3+4\gamma ab^3+5ab^2c-\gamma abc^2-abc^2-$$
$$-3\gamma ac^3+ac^3+2b^4+b^3c-2b^2c^2-bc^3\Big)^{-1},$$
$$\beta=\beta_*=\Big(3\gamma a^2c+3\gamma a^2b+4\gamma ab^2+6\gamma abc+2\gamma ac^2+8\gamma b^2c+3\gamma c^3+4\gamma b^3+$$
$$+7\gamma bc^2-a^2b-a^2c-abc-ab^2-3c^3-2b^3-6bc^2-5b^2c\Big)\times$$

$$\times(1-\gamma)^{-1}\left(3a^3+a^2b-a^2c-2abc+ac^2-8b^2c-3c^3-4b^3-7bc^2\right)^{-1}. \qquad (35)$$

Having substituted (35) into (31), the partial derivative (31) turns into zero [5], what means that in the solution of the three equations system (32) the roots (35) are deduced [5] via a fixed $\gamma=\gamma_*\in[0;1)$ just to get $\alpha_*\in[0;1]$ and $\beta_*\in[0;1]$. Substituting any point $[\alpha_* \quad \beta_* \quad \gamma_*]$ as the function (27) stationary point into the set (13), get the strategy (19). Note that the sets (12) and (13) are identical at $a=c-b$, and the sets (13) and (14) are identical at $a=c+b$. And as the strategy (19) is the single solution of the problem (17) for the sets (12) and (14), then the strategy (19) is the single solution of the problem (17) for the set (13) at $a\in\{c-b,\, c+b\}$. At this strategy,

$$\varphi_2(\alpha_*,\beta_*,\gamma_*)=\frac{(a-c)^2}{4b^2+3a^2+3c^2+4ab+4bc+2ac}. \qquad (36)$$

Suppose that at $a\in(c-b;\, c+b)$ there is the point

$$[\alpha_{**} \quad \beta_{**} \quad \gamma_{**}]\neq[\alpha_* \quad \beta_* \quad \gamma_*] \qquad (37)$$

of the cube (28) such that its corresponding tetrahedron (11) element $\breve{\mathbf{Q}}^{**}\neq\breve{\mathbf{Q}}^{*}$ and

$$\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma)\geqslant\varphi_2(\alpha_{**},\beta_{**},\gamma_{**}) \quad \forall\,\alpha\in[0;1],\ \forall\,\beta\in[0;1],\ \forall\,\gamma\in[0;1]. \qquad (38)$$

Then, there is at least a partial derivative of the function (27), not turning into zero at the minimum point $[\alpha_{**} \quad \beta_{**} \quad \gamma_{**}]$. It is possible when the minimal value $\varphi_2(\alpha_{**},\beta_{**},\gamma_{**})$ is reached on a face of the cube (28). Therefore, there is at least $\alpha_{**}\in\{0,1\}$ or $\beta_{**}\in\{0,1\}$ or $\gamma_{**}\in\{0,1\}$. But note that for the case $a=c$ we have $\varphi_2(\alpha_*,\beta_*,\gamma_*)=0$, where $\breve{\mathbf{Q}}^{*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$, and only at the point (16) the function (27) turns into zero. The implication of this fact is that $\varphi_2(\alpha_{**},\beta_{**},\gamma_{**})=0$ by $a=c$. However, for $\alpha_{**}=0$ by $a=c$ there is the point

$$[\alpha_{**} \quad \beta_{**} \quad \gamma_{**}]=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{c}{2c+b}\end{bmatrix}=[\alpha_* \quad \beta_* \quad \gamma_*] \qquad (39)$$

in order to have the point (16). And for $\alpha_{**}=1$ by $a=c$ there is the point

$$[\alpha_{**} \quad \beta_{**} \quad \gamma_{**}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=[\alpha_* \quad \beta_* \quad \gamma_*]. \qquad (40)$$

The statement (40) is coming up also after $\beta_{**}=0$ by $a=c$. And $\beta_{**}=1$ obviously brings $\breve{q}_3^*=0$, what is impossible for $a=c$. For $\gamma_{**}=0$ by $a=c$ there is the point

$$[\alpha_{**} \quad \beta_{**} \quad \gamma_{**}]=\begin{bmatrix}\frac{2c}{c-b} & \frac{b+c}{2b} & 0\end{bmatrix}=[\alpha_* \quad \beta_* \quad \gamma_*]. \qquad (41)$$

At last, $\gamma_{**}=1$ obviously brings $\breve{q}_2^*=\breve{q}_3^*=0$, what is impossible for $a=c$. This is contrary to the supposition (37) and (38). So, the function (27) minimum is either reached on faces of the cube (28) at only stationary point (35) or not reached on the faces at all. If the function (27) reaches its minimum (36) at the stationary point (35) on the open cube

$$(0;1)\times(0;1)\times(0;1) \qquad (42)$$

then this minimum is single. But suppose that at $a\in(c-b;\, c+b)$ there is the point (37) of the open cube (42) such that its corresponding tetrahedron (11) element $\breve{\mathbf{Q}}^{**}\neq\breve{\mathbf{Q}}^{*}$ and

$$\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma) \geqslant \varphi_2(\alpha_{**},\beta_{**},\gamma_{**}) \quad \forall\,\alpha\in(0;1),\ \forall\,\beta\in(0;1),\ \ \forall\,\gamma\in(0;1). \tag{43}$$

Then

$$\varphi_2(\alpha_*,\beta_*,\gamma_*) \geqslant \varphi_2(\alpha_{**},\beta_{**},\gamma_{**}). \tag{44}$$

Clearly, the equality

$$\varphi_2(\alpha_*,\beta_*,\gamma_*) = \varphi_2(\alpha_{**},\beta_{**},\gamma_{**}) \tag{45}$$

is impossible as the point $[\alpha_{**} \quad \beta_{**} \quad \gamma_{**}]$ of the open cube (42) isn't stationary. Hence suppose that

$$\varphi_2(\alpha_*,\beta_*,\gamma_*) > \varphi_2(\alpha_{**},\beta_{**},\gamma_{**}) \tag{46}$$

for some $a_{**}\in(c-b;\,c+b)$. For the continuous function (27), this means that $\exists\, a_*\in(c-b;\,a_{**})$ such that (45) turns true, what is impossible again under condition of (37). Consequently, the function (27) reaches the single minimal value at the stationary point (35) with $\alpha_*\in[0;1]$ and $\beta_*\in[0;1]$ by a fixed $\gamma=\gamma_*\in[0;1)$, and the strategy (19) is the single solution of the problem (17).

For the problem (18) there is the function

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{4}\left(\breve{q}_j-\frac{1}{4}\right)^2 &= \left(\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(a+b-c)+\gamma(a+b)}{2(a+b)}-\frac{1}{4}\right)^2+\\ &+\left((1-\gamma)\frac{(1-\beta)\alpha(b+c)(a+b-c)+\beta b(a+b+c)}{2b(b+c)}-\frac{1}{4}\right)^2+\\ &+\left((1-\beta)(1-\gamma)\frac{\alpha a(c-a-b)+b(a+b+c)}{2b(a+b)}-\frac{1}{4}\right)^2+\\ &+\left(\frac{\beta(1-\gamma)(b+c-a)+\gamma(b+c)}{2(b+c)}-\frac{1}{4}\right)^2=\psi_2(\alpha,\beta,\gamma)\end{aligned} \tag{47}$$

to be minimized on the set (13). The function (47), defined on the unit $\mathbb{R}^3$ cube (28) of points $[\alpha \quad \beta \quad \gamma]$, is continuous nonnegative function. This means that the function (47) has at least a minimum [7, 8]. For finding minima, reached at stationary points, determine zeros of partial derivatives of the function (47). Here [5]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\alpha}\psi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0.5(\beta-1)(\gamma-1)(a+b-c)\big(\gamma ab^3+\gamma a^2b^2+2\alpha a^3c-2\alpha\beta b^4-2\alpha b^2c^2-2\beta\gamma b^4+\\ &+5\beta ab^3-2\alpha a^2c^2-\beta b^2c^2+\beta b^3c-\gamma b^2c^2-2\alpha\gamma b^4-\gamma b^3c-a^2bc-3ab^2c+4\alpha ab^3+\beta a^3b+4\beta a^2b^2+\\ &+2\alpha a^3b+4\alpha a^2b^2-abc^2+2\alpha\gamma abc^2-2\alpha\beta\gamma abc^2+2\alpha\beta abc^2-\beta\gamma abc^2-4\alpha\beta a^2b^2+2\alpha\beta\gamma b^4-\\ &-4\beta\gamma a^2b^2-4\alpha\gamma a^2b^2+2\beta a^2bc+2\alpha\beta b^2c^2+2\alpha ab^2c+\beta\gamma b^2c^2+2\alpha\gamma b^2c^2-2\alpha\beta a^3b-2\alpha\beta a^3c-\\ &-2\alpha\gamma a^3b-2\alpha\gamma a^3c-\beta\gamma a^3b-\beta\gamma b^3c+2\alpha\beta a^2c^2+2\alpha\gamma a^2c^2+2\gamma ab^2c-4\alpha\gamma ab^3+\gamma abc^2+5\beta ab^2c+\\ &+\beta abc^2-2\alpha abc^2-5\beta\gamma ab^3-4\alpha\beta ab^3+2\alpha a^2bc+\gamma a^2bc-b^4+b^2c^2+2\beta b^4-2ab^3-a^2b^2+2\alpha b^4+\\ &+4\alpha\beta\gamma ab^3+4\alpha\beta\gamma a^2b^2-2\alpha\beta\gamma b^2c^2+2\alpha\beta\gamma ab^2c+2\alpha\beta\gamma a^2bc-2\alpha\beta ab^2c-2\alpha\beta a^2bc-2\beta\gamma a^2bc-\\ &-2\alpha\gamma ab^2c+2\alpha\beta\gamma a^3b+2\alpha\beta\gamma a^3c-2\alpha\beta\gamma a^2c^2-2\alpha\gamma a^2bc-5\beta\gamma ab^2c\big)(a+b)^{-2}\,b^{-2}\,(b+c)^{-1}=\\ &=\frac{\partial}{4\partial\alpha}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma),\end{aligned} \tag{48}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\beta}\psi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0.5(\gamma-1)\Big(-12\alpha a^2b^4+2\alpha^2a^4b^2+6\alpha^2ab^5-9\alpha\gamma ab^2c^3+2b^2c^4-\alpha a^4b^2-2\beta a^4b^2+\\
&+9\alpha\gamma ab^4c-4\beta b^6-6\alpha a^3b^3+4ab^5+16\alpha\beta ab^4c+4b^4c^2-4\alpha^2\gamma ab^4c+2a^2b^4+8\beta\gamma a^2b^3c-3ab^6-\\
&-6\alpha\gamma ab^3c^2-2\alpha^2\gamma b^6+16\alpha\gamma a^2b^3c+4b^3c^3+2\alpha\beta a^3bc^2+8\beta\gamma ab^3c^2+2\alpha\beta a^4bc-8\alpha a^3b^2c-5\alpha a^2b^2c^2+\\
&+8\alpha^2a^3b^2c-4\beta a^2b^2c^2+10\alpha\beta a^3b^3-18\alpha a^2b^3c+6\alpha ab^3c^2+8\alpha^2a^2b^3c-8\gamma ab^4c-6\gamma ab^3c^2+8\alpha\gamma ab^5-\\
&-4\alpha\gamma b^4c^2-6\alpha^2\gamma ab^5-\gamma ab^2c^3-16\beta ab^4c-8\beta ab^3c^2+\alpha a^2bc^3+2\alpha abc^4-6\alpha^2a^2b^2c^2-4\alpha^2a^2bc^3-\\
&-8\beta a^2b^3c+18\alpha\beta a^2b^4+8\beta\gamma ab^5+6\beta\gamma b^4c^2+10\alpha ab^2c^3-8\alpha^2ab^3c^2-4\alpha^2ab^2c^3+14\alpha\beta ab^5-\\
&-6\alpha\beta b^4c^2-6\alpha^2\beta ab^5-2\alpha a^3bc^2-2\alpha^2a^3bc^2-8\alpha^2\beta a^2b^4+4\alpha^2a^4bc+2\alpha\beta a^4b^2-12\alpha ab^4c+\\
&+6\alpha^2a^3b^3-4\beta a^3b^3-6\beta a^2b^4-10\alpha ab^5+8\alpha^2a^2b^4+4a^2b^3c+2a^2b^2c^2+8ab^4c-5\gamma b^5c-5\gamma b^3c^3+\\
&+2\alpha\gamma b^6-6\gamma b^4c^2-2\gamma b^2c^4-8\beta b^5c-4\beta b^3c^3-6\beta b^4c^2-2\beta b^2c^4-8\beta ab^5+4\beta\gamma b^6+5\alpha b^4c^2-2\alpha b^2c^4+\\
&+4\alpha\beta b^6+4ab^3c^2-4\alpha^2a^3c^3+2\alpha^2a^2c^4-4\alpha^2b^4c^2+2\alpha^2b^2c^4+\alpha b^3c^3-2\alpha^2\beta b^6+2\alpha^2a^4c^2+4b^5c+\\
&+2\alpha^2b^6-2\gamma b^6+12\alpha\beta a^3b^2c+4\alpha\gamma a^2b^2c^2-2\gamma a^2b^3c+4\alpha^2\gamma b^4c^2-8\alpha^2\gamma a^2b^4+11\alpha\gamma a^2b^4-8\alpha\beta ab^3c^2-\\
&-12\alpha\beta ab^2c^3+24\alpha\beta a^2b^3c+16\beta\gamma ab^4c-14\alpha\beta\gamma ab^5-16\alpha\beta\gamma ab^4c-4\alpha^2\beta ab^4c-18\alpha\beta\gamma a^2b^4-\\
&-24\alpha\beta\gamma a^2b^3c+8\alpha\beta\gamma ab^3c^2+8\alpha^2\beta\gamma a^2b^4+8\alpha^2\beta\gamma a^2b^3c+12\alpha\beta\gamma ab^2c^3+6\alpha\beta\gamma b^4c^2-\\
&-2\alpha\beta\gamma b^2c^4-8\alpha^2\beta\gamma ab^3c^2-4\alpha^2\beta\gamma ab^2c^3-4\alpha\beta\gamma a^2b^2c^2-6\alpha^2\beta\gamma a^2b^2c^2+4\alpha\beta a^2b^2c^2-8\alpha^2\beta a^2b^3c+\\
&+6\alpha^2\beta a^2b^2c^2+2b^6-8\alpha^2\gamma a^2b^3c+8\alpha^2\gamma ab^3c^2+2\alpha\gamma b^2c^4-2\gamma a^2b^2c^2+2\alpha\beta b^5c-2\alpha\beta b^3c^3+2\alpha\beta b^2c^4+\\
&+2\alpha^2abc^4-4\alpha\beta\gamma b^6+6\beta\gamma a^2b^4+8\beta\gamma b^5c+4\alpha^2\beta b^4c^2-\alpha a^4bc-6\alpha^2\beta a^3b^3+2\beta\gamma b^2c^4+6\alpha\gamma a^3b^3-\\
&-6\alpha^2\gamma a^3b^3+4\beta\gamma a^3b^3+4\beta\gamma b^3c^3+4\alpha^2ab^4c+2\alpha^2\beta\gamma b^6-2\alpha^2\beta b^2c^4-2\alpha^2\gamma b^2c^4-2\alpha^2\beta a^4b^2-\\
&-2\alpha^2\beta a^4c^2+4\alpha^2\beta a^3c^3-2\alpha^2\gamma a^4b^2+\alpha\gamma a^4b^2-2\alpha^2\gamma a^4c^2+4\alpha^2\gamma a^3c^3+2\beta\gamma a^4b^2-2\alpha^2\beta a^2c^4-\\
&-2\alpha^2\gamma a^2c^4-\alpha\gamma a^2bc^3-2\alpha\gamma abc^4-2\alpha\beta a^2bc^3-2\alpha\beta abc^4+8\alpha^2\beta ab^3c^2-\alpha b^5c+6\alpha^2\beta\gamma ab^5+\\
&+6\alpha^2\beta\gamma a^3b^3+8\alpha^2\beta\gamma a^3b^2c-10\alpha\beta\gamma a^3b^3-4\alpha^2\beta\gamma b^4c^2+2\alpha^2\beta\gamma b^2c^4-4\alpha^2\beta\gamma a^2bc^3+2\alpha^2\beta\gamma abc^4+\\
&+2\alpha\beta\gamma b^3c^3+4\alpha^2\beta\gamma ab^4c-2\alpha^2\beta\gamma a^3bc^2-12\alpha\beta\gamma a^3b^2c+4\alpha^2\beta ab^2c^3-8\alpha^2\beta a^3b^2c+2\alpha^2\beta a^3bc^2+\\
&+4\alpha^2\beta a^2bc^3-2\alpha\beta\gamma b^5c+4\alpha^2\gamma ab^2c^3+8\alpha\gamma a^3b^2c-8\alpha^2\gamma a^3b^2c+2\alpha\gamma a^3bc^2+2\alpha^2\gamma a^3bc^2+\\
&+4\beta\gamma a^2b^2c^2+6\alpha^2\gamma a^2b^2c^2+4\alpha^2\gamma a^2bc^3-2\alpha\beta\gamma a^3bc^2+2\alpha\beta\gamma a^2bc^3+2\alpha\beta\gamma abc^4-2\alpha^2\beta abc^4-\\
&-2\alpha^2\gamma abc^4-4\alpha^2\beta a^4bc-4\alpha^2\gamma a^4bc+\alpha\gamma a^4bc-2\alpha\beta\gamma a^4b^2-2\alpha\beta\gamma a^4bc+2\alpha^2\beta\gamma a^4b^2+\\
&+4\alpha^2\beta\gamma a^4bc+2\alpha^2\beta\gamma a^4c^2-4\alpha^2\beta\gamma a^3c^3+2\alpha^2\beta\gamma a^2c^4+\gamma a^3b^2c-3\gamma ab^5+\gamma a^3b^3\Big)\times\\
&\times(a+b)^{-2}b^{-2}(b+c)^{-2}=\frac{\partial}{4\partial\beta}\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma),
\end{aligned}
\tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\gamma}\psi_2(\alpha,\beta,\gamma)=0.5\Big(5\alpha a^2b^4+2\gamma a^2b^4-2\alpha^2a^4b^2-6\alpha^2ab^5+6\alpha\gamma ab^2c^3-2b^2c^4-2\beta^2a^4b^2-\\
&-2\alpha\gamma ab^4c+4\beta b^6+2\alpha a^3b^3-2ab^5-21\alpha\beta ab^4c-5b^4c^2+4\alpha^2\gamma ab^4c-a^2b^4-4\beta\gamma a^2b^3c+\alpha b^6+\\
&+4\alpha\gamma ab^3c^2+2\alpha\gamma b^5c+2\alpha^2\gamma b^6-8\alpha\gamma a^2b^3c-5b^3c^3-6\beta^2a^2b^4-4\beta^2a^3b^3-4\alpha\beta a^3bc^2-16\alpha\beta^2\gamma ab^4c+\\
&+6\alpha\beta^2\gamma b^4c^2+24\alpha\beta^2a^2b^3c-4\alpha\beta^2\gamma b^6+8\beta^2\gamma ab^5+6\beta^2\gamma b^4c^2-14\alpha\beta^2\gamma ab^5+14\alpha\beta^2ab^5-\\
&-12\alpha\beta^2ab^2c^3-8\beta^2ab^5-8\alpha\beta^2ab^3c^2-6\beta^2b^4c^2-2\beta^2b^2c^4+4\beta^2\gamma b^6+16\alpha\beta^2ab^4c-2\alpha\beta^2b^3c^3+\\
&+2\alpha\beta^2b^5c-16\beta^2ab^4c+2\alpha\beta^2b^2c^4-6\alpha\beta^2b^4c^2-8\beta^2ab^3c^2-8\beta^2b^5c-4\beta^2b^3c^3-4\beta^2a^2b^2c^2+\\
&+4\alpha\beta^2a^2b^2c^2+12\alpha\beta^2a^3b^2c+10\alpha\beta^2a^3b^3+18\alpha\beta^2a^2b^4-4\beta^2b^6+2\alpha^2\beta^2\gamma b^2c^4-2\alpha\gamma b^3c^3-8\alpha^2\beta^2a^2b^4-\\
&-18\alpha\beta^2\gamma a^2b^4+8\alpha\beta^2\gamma ab^3c^2-8\alpha^2\beta^2\gamma ab^3c^2+8\alpha^2\beta^2\gamma a^2b^3c+6\alpha^2\beta^2\gamma ab^5+8\alpha^2\beta^2\gamma a^2b^4-4\alpha^2\beta^2ab^4c+\\
&+4\alpha\beta^2b^6-2\alpha^2\beta^2b^6-6\alpha^2\beta^2ab^5+4\alpha^2\beta^2b^4c^2+2\alpha\beta^2a^4bc+2\alpha\beta^2a^3bc^2+2\alpha\beta^2a^4b^2-8\beta^2a^2b^3c+\\
&+8\alpha^2\beta^2ab^3c^2+12\alpha\beta^2\gamma ab^2c^3-6\alpha^2\beta^2\gamma a^2b^2c^2+4\alpha^2\beta^2\gamma ab^4c-24\alpha\beta^2\gamma a^2b^3c-8\alpha^2\beta^2a^2b^3c+\\
&+4\alpha^2\beta^2ab^2c^3+6\alpha^2\beta^2a^2b^2c^2-2\alpha\beta^2\gamma b^2c^4-12\beta\gamma ab^3c^2-4\alpha^2\beta^2\gamma b^4c^2-4\alpha^2\beta^2\gamma ab^2c^3+16\beta^2\gamma ab^4c+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
+6\beta^2\gamma a^2b^4+8\beta^2\gamma b^5c-2\alpha\beta^2a^2bc^3-2\alpha\beta^2abc^4-12\alpha\beta^2\gamma a^3b^2c+2\alpha^2\beta^2\gamma abc^4-4\alpha^2\beta^2\gamma a^2bc^3+\\
+2\alpha\beta^2\gamma b^3c^3+6\alpha^2\beta^2\gamma a^3b^3+8\alpha^2\beta^2\gamma a^3b^2c-10\alpha\beta^2\gamma a^3b^3-4\alpha\beta^2\gamma a^2b^2c^2+8\beta^2\gamma ab^3c^2-8\alpha^2\beta^2a^3b^2c+\\
+2\alpha^2\beta^2a^3bc^2+4\alpha^2\beta^2a^2bc^3-2\alpha^2\beta^2\gamma a^3bc^2-6\alpha^2\beta^2a^3b^3+2\alpha^2\beta^2\gamma b^6+2\beta^2\gamma b^2c^4-2\alpha^2\beta^2b^2c^4+\\
+2\alpha\beta^2\gamma abc^4+2\alpha\beta^2\gamma a^2bc^3+8\beta^2\gamma a^2b^3c-2\alpha^2\beta^2abc^4+4\beta^2\gamma a^2b^2c^2-2\alpha\beta^2\gamma b^5c+4\beta^2\gamma a^3b^3+\\
+4\beta^2\gamma b^3c^3-2\alpha^2\beta^2a^4c^2+4\alpha^2\beta^2a^3c^3+2\beta^2\gamma a^4b^2-2\alpha^2\beta^2a^4b^2-2\alpha\beta^2\gamma a^3bc^2-2\alpha^2\beta^2a^2c^4-\\
-2\alpha\beta^2\gamma a^4b^2-2\alpha\beta^2\gamma a^4bc-4\alpha^2\beta^2a^4bc+2\alpha^2\beta^2\gamma a^2c^4+2\alpha^2\beta^2\gamma a^4c^2+2\alpha^2\beta^2\gamma a^4b^2+4\alpha^2\beta^2\gamma a^4bc-\\
-4\alpha^2\beta^2\gamma a^3c^3-2\alpha\beta a^4bc+4\alpha a^3b^2c+5\alpha a^2b^2c^2-8\alpha^2a^3b^2c-\beta a^3b^2c+4\beta a^2b^2c^2-12\alpha\beta a^3b^3+\\
+10\alpha a^2b^3c-4\alpha ab^3c^2-8\alpha^2a^2b^3c+10\gamma ab^4c+8\gamma ab^3c^2-2\alpha\gamma ab^5+2\alpha\gamma b^4c^2+6\alpha^2\gamma ab^5+2\gamma ab^2c^3+\\
+16\beta ab^4c+10\beta ab^3c^2+\beta ab^2c^3-2\alpha abc^4+6\alpha^2a^2b^2c^2+4\alpha^2a^2bc^3+6\beta a^2b^3c-23\alpha\beta a^2b^4-\\
-6\beta\gamma ab^5-12\beta\gamma b^4c^2-7\alpha ab^2c^3+8\alpha^2ab^3c^2+4\alpha^2ab^2c^3-18\alpha\beta ab^5+9\alpha\beta b^4c^2+12\alpha^2\beta ab^5+\\
+2\alpha a^3bc^2+2\alpha^2a^3bc^2+16\alpha^2\beta a^2b^4-4\alpha^2a^4bc-2\alpha\beta a^4b^2+5\alpha ab^4c-6\alpha^2a^3b^3-\beta a^3b^3+2\beta a^2b^4+\\
+4\alpha ab^5-8\alpha^2a^2b^4-2a^2b^3c-a^2b^2c^2-5ab^4c-ab^2c^3+6\gamma b^5c+6\gamma b^3c^3+8\gamma b^4c^2+2\gamma b^2c^4+9\beta b^5c+\\
+9\beta b^3c^3+10\beta b^4c^2+4\beta b^2c^4+7\beta ab^5-4\beta\gamma b^6-3\alpha b^4c^2+2\alpha b^2c^4-5\alpha\beta b^6-4ab^3c^2+4\alpha^2a^3c^3-\\
-2\alpha^2a^2c^4+4\alpha^2b^4c^2-2\alpha^2b^2c^4+\alpha b^3c^3+4\alpha^2\beta b^6-2\alpha^2a^4c^2-3b^5c-2\alpha^2b^6+2\gamma b^6-16\alpha\beta a^3b^2c-\\
-4\alpha\gamma a^2b^2c^2+4\gamma a^2b^3c-4\alpha^2\gamma b^4c^2+8\alpha^2\gamma a^2b^4-4\alpha\gamma a^2b^4+12\alpha\beta ab^3c^2+19\alpha\beta ab^2c^3-34\alpha\beta a^2b^3c-\\
-16\beta\gamma ab^4c+16\alpha\beta\gamma ab^5+18\alpha\beta\gamma ab^4c+8\alpha^2\beta ab^4c+22\alpha\beta\gamma a^2b^4+32\alpha\beta\gamma a^2b^3c-12\alpha\beta\gamma ab^3c^2-\\
-16\alpha^2\beta\gamma a^2b^4-16\alpha^2\beta\gamma a^2b^3c-18\alpha\beta\gamma ab^2c^3-8\alpha\beta\gamma b^4c^2+4\alpha\beta\gamma b^2c^4+16\alpha^2\beta\gamma ab^3c^2+8\alpha^2\beta\gamma ab^2c^3+\\
+8\alpha\beta\gamma a^2b^2c^2+12\alpha^2\beta\gamma a^2b^2c^2-9\alpha\beta a^2b^2c^2+16\alpha^2\beta a^2b^3c-12\alpha^2\beta a^2b^2c^2-b^6+8\alpha^2\gamma a^2b^3c-\\
-8\alpha^2\gamma ab^3c^2-2\alpha\gamma b^2c^4+2\gamma a^2b^2c^2-\alpha\beta b^5c+\alpha\beta b^3c^3-4\alpha\beta b^2c^4-2\alpha^2abc^4+4\alpha\beta\gamma b^6-10\beta\gamma b^5c-\\
-8\alpha^2\beta b^4c^2+12\alpha^2\beta a^3b^3-4\beta\gamma b^2c^4-2\alpha\gamma a^3b^3+6\alpha^2\gamma a^3b^3+2\beta\gamma a^3b^3-10\beta\gamma b^3c^3-4\alpha^2ab^4c-\\
-4\alpha^2\beta\gamma b^6+4\alpha^2\beta b^2c^4+2\alpha^2\gamma b^2c^4+4\alpha^2\beta a^4b^2+4\alpha^2\beta a^4c^2-8\alpha^2\beta a^3c^3+2\alpha^2\gamma a^4b^2+2\alpha^2\gamma a^4c^2-\\
-4\alpha^2\gamma a^3c^3+4\alpha^2\beta a^2c^4+2\alpha^2\gamma a^2c^4+2\alpha\gamma abc^4+2\alpha\beta a^2bc^3+4\alpha\beta abc^4-16\alpha^2\beta ab^3c^2-\alpha b^5c-\\
-12\alpha^2\beta\gamma ab^5-12\alpha^2\beta\gamma a^3b^3-16\alpha^2\beta\gamma a^3b^2c+12\alpha\beta\gamma a^3b^3+8\alpha^2\beta\gamma b^4c^2-4\alpha^2\beta\gamma b^2c^4+8\alpha^2\beta\gamma a^2bc^3-\\
-4\alpha^2\beta\gamma abc^4-8\alpha^2\beta\gamma ab^4c+4\alpha^2\beta\gamma a^3bc^2+16\alpha\beta\gamma a^3b^2c-8\alpha^2\beta ab^2c^3+16\alpha^2\beta a^3b^2c-4\alpha^2\beta a^3bc^2-\\
-8\alpha^2\beta a^2bc^3-2\beta\gamma ab^2c^3-4\alpha^2\gamma ab^2c^3-4\alpha\gamma a^3b^2c+8\alpha^2\gamma a^3b^2c-2\alpha\gamma a^3bc^2-2\alpha^2\gamma a^3bc^2+\\
+2\beta\gamma a^3b^2c-4\beta\gamma a^2b^2c^2-6\alpha^2\gamma a^2b^2c^2-4\alpha^2\gamma a^2bc^3+4\alpha\beta\gamma a^3bc^2-2\alpha\beta\gamma a^2bc^3-4\alpha\beta\gamma abc^4+\\
+4\alpha^2\beta abc^4+2\alpha^2\gamma abc^4+8\alpha^2\beta a^4bc+4\alpha^2\gamma a^4bc+2\alpha\beta\gamma a^4b^2+2\alpha\beta\gamma a^4bc-\\
-4\alpha^2\beta\gamma a^4b^2-8\alpha^2\beta\gamma a^4bc-4\alpha^2\beta\gamma a^4c^2+8\alpha^2\beta\gamma a^3c^3-4\alpha^2\beta\gamma a^2c^4+4\gamma ab^5\Big)\times\\
\times\left(a+b\right)^{-2}b^{-2}\left(b+c\right)^{-2}=\frac{\partial}{4\partial\gamma}\varphi_2\left(\alpha,\,\beta,\,\gamma\right). \qquad (50)
\end{gathered}
$$

In solving the system of three equations

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\psi_2\left(\alpha,\,\beta,\,\gamma\right)=0\,,\quad \frac{\partial}{\partial\beta}\psi_2\left(\alpha,\,\beta,\,\gamma\right)=0\,,\quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\psi_2\left(\alpha,\,\beta,\,\gamma\right)=0 \qquad (51)$$

there may be used the right terms of (48) — (50), whence $\alpha_*\in\left[0;\,1\right]$ and $\beta_*\in\left[0;\,1\right]$ in (35) by a fixed $\gamma=\gamma_*\in\left[0;\,1\right)$ constitute the function (47) stationary point, bringing the strategy (19). As the strategy (19) is the single solution of the problem (18) for the sets (12) and (14), then the strategy (19) is the single solution of the problem (18) for the set (13) at $a\in\left\{c-b,\,c+b\right\}$. At this strategy,

$$\psi_2(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*) = \varphi_2(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*) = \frac{(a-c)^2}{4b^2+3a^2+3c^2+4ab+4bc+2ac}. \tag{52}$$

Suppose that at $a \in (c-b;\, c+b)$ there is the point (37) of the cube (28) such that its corresponding tetrahedron (11) element $\breve{\mathbf{Q}}^{**} \neq \breve{\mathbf{Q}}^{*}$ and

$$\psi_2(\alpha, \beta, \gamma) \geqslant \psi_2(\alpha_{**}, \beta_{**}, \gamma_{**}) \quad \forall\, \alpha \in [0;1],\ \forall\, \beta \in [0;1],\ \ \forall\, \gamma \in [0;1]. \tag{53}$$

Then

$$\psi_2(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*) \geqslant \psi_2(\alpha_{**}, \beta_{**}, \gamma_{**}). \tag{54}$$

The equality

$$\psi_2(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*) = \psi_2(\alpha_{**}, \beta_{**}, \gamma_{**}) \tag{55}$$

means the $\mathbb{R}^4$ distance between the points $\breve{\mathbf{Q}}^{*}$ and (16) is the same as the $\mathbb{R}^4$ distance between the points $\breve{\mathbf{Q}}^{**}$ and (16). But there cannot be more than the one shortest distance between a point and a hyperplane. Hence, the points $\breve{\mathbf{Q}}^{*}$ and $\breve{\mathbf{Q}}^{**}$ must be identical. Then suppose that

$$\psi_2(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*) > \psi_2(\alpha_{**}, \beta_{**}, \gamma_{**}) \tag{56}$$

for some $a_{**} \in (c-b;\, c+b)$. For the continuous function (47), this means that $\exists\, a_* \in (c-b;\, a_{**})$ such that (55) turns true, what is impossible again unless $\breve{\mathbf{Q}}^{**} = \breve{\mathbf{Q}}^{*}$. Consequently, the function (47) reaches the single minimal value at the stationary point (35) with $\alpha_* \in [0;1]$ and $\beta_* \in [0;1]$ by a fixed $\gamma = \gamma_* \in [0;1)$, and the strategy (19) is the single solution of the problem (18), being the invariant of the problems (17), (18).

The theorem has been proved.

Just now, Theorem 2 completes the selection of the unique optimal strategy from the set of the second player optimal strategies in the game (2) with (3) from (1) at $a \in [c-b;\, b+c]$ by drawing it nearest to the uniform distribution (16). Undoubtedly, there may be brought forward any other worthwhile criterions for singularizing each of the sets (12) — (14), but the single probability distribution (19) is drawn from (12) — (14) with using the quadratic distance, what is very spread in practice [1, 9, 10].

FINAL CONCLUSION

With theorems in [5] and Theorem 2 it has been proved, that the single probability distribution (19) is the invariant of the problems (17), (18) for continuums (12) — (14) in the game (2) with (3) from (1). So it is natural to require that if sometime other singularization criterion is brought, then it must provide the invariant unique optimal strategy from continuums (12) — (14), which depends only on constants $\{a, b, c\}$ from (1). For the quadratic distance criterion as Euclidean $\mathbb{R}^4$ distance in (18) between a strategy of the continuum $\breve{\mathcal{Q}}$ and (16), the i-th element from (1) should be applied with the probability $\breve{q}_i^*$ in (19), what minimizes assuredly not only the absolute deviations (3), but also equalizes the four elements in their application as far as admissive. Sense of Theorem 1 is that the continuum $\breve{\mathcal{Q}}$ of the second player optimal strategies $\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3 \quad \breve{q}_4]$ in the game (2) with (3) from (1), belonging to the three-dimensional fundamental simplex (11), has the null measure in the $\mathbb{R}^3$ space, containing this simplex. And that is a good ground for assumptions about other similar uncertainty reduction problems, where it is likely to singularize a continuum with one-unit-lowered-dimension, although it is a matter of advanced analysis.

REFERENCES

1. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Трухаев Р. И. — М. : Наука, 1981. — 258 с.
2. Романюк В. В. Решение обобщённой нестрогой задачи устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости с минимумом отклонений / В. В. Романюк // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”. — 2012. — № 1037. — Випуск 20. — С. 175 — 189.
3. Romanuke V. V. Gaining with approach of assuredly minimized absolute deviations in solving the general nonstrict problem of elimination of single-parameter four-model uncertainty / V. V. Romanuke // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2012. — № 2. — С. 70 — 90.
4. Романюк В. В. Единственное решение в общей строгой задаче устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости с принципом гарантировано минимальных абсолютных отклонений / В. В. Романюк // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. — 2013. — № 2. — С. 176 — 182.
5. Romanuke V. V. Selection of quasiequiprobable distribution from continuum of optimal strategies to the generalized strictly formulated problem of removing single-parameter four-model uncertainty within assuredly minimized deviation approach / V. V. Romanuke // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2013. — № 1. — С. 93 — 110.
6. Романюк В. В. Преимущество принципа гарантировано минимальных абсолютных отклонений и максимальное сужение континуума оптимальных стратегий в задаче устранения однопараметрической четырёхмодельной $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-неопределённости / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2012. — № 4. — С. 30 — 39.
7. Городецкий В. В. Методы решения задач по функциональному анализу : [учеб. пособие] / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — К. : Вища школа, 1990. — 479 с.
8. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа / Кутателадзе С. С. — [3-е изд., испр.]. — Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2000. — 336 с.
9. Chew-Seng Chee. Minimum quadratic distance density estimation using nonparametric mixtures / Chew-Seng Chee, Yong Wang // Computational Statistics & Data Analysis. — 2013. — Volume 57, Issue 1. — P. 1 — 16.
10. Carvalho F. Fuzzy K-means clustering algorithms for interval-valued data based on adaptive quadratic distances / F. de A. T. de Carvalho, C. P. Tenório // Fuzzy Sets and Systems. — 2010. — Volume 161, Issue 23. — P. 2978 — 2999.

REFERENCES

1. Trukhayev R. I. Models of decision making under uncertainties, Moscow, Nauka, 1981, 258 p.
2. Romanuke V. V. Solving the generalized nonstrict problem of reduction of single-parameter three-model uncertainty minimal deviations, Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, 2012, N. 1037, Series “Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems”, Issue 20, pp. 175 — 189.

3. Romanuke V. V. Gaining with approach of assuredly minimized absolute deviations in solving the general nonstrict problem of elimination of single-parameter four-model uncertainty, Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physico-mathematical sciences, 2012, N. 2, pp. 70 — 90.
4. Romanuke V. V. Unique solution in general strict problem of convergence in single-parameter three-model uncertainty with principle of assuredly minimal absolute deviations, Bulletin of Donetsk National University. Series A. Natural Sciences, 2013, N. 2, pp. 176 — 182.
5. Romanuke V. V. Selection of quasiequiprobable distribution from continuum of optimal strategies to the generalized strictly formulated problem of removing single-parameter four-model uncertainty within assuredly minimized deviation approach, Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physico-mathematical sciences, 2013, N. 1, pp. 93 — 110.
6. Romanuke V. V. Preference of the principle of assuredly minimized absolute deviations and maximal contraction of optimal strategies continuum in a problem of removing single-parameter four-model $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-uncertainty, Bulletin of Khmelnitskiy National University. Technical Sciences, 2012, N. 4, pp. 30 — 39.
7. Gorodetskiy V. V., Nagnibida N. I., Nastasiyev P. P. Methods of solving tasks of functional analysis, Kyiv, Vyshcha shkola, 1990, 479 p.
8. Kutateladze S. S. Fundamentals of functional analysis, Novosibirsk, Inst. of mathematics, 2000, 336 p.
9. Chew-Seng Chee, Yong Wang. Minimum quadratic distance density estimation using nonparametric mixtures, Computational Statistics & Data Analysis, 2013, Volume 57, Issue 1, pp. 1 — 16.
10. Carvalho F., Tenório C. P. Fuzzy K-means clustering algorithms for interval-valued data based on adaptive quadratic distances, Fuzzy Sets and Systems, 2010, Volume 161, Issue 23, pp. 2978 — 2999.

УДК: 536.21:536.21

ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНА МОДЕЛЬ ТОПОЛОГІЧНИХ ПЕРЕХОДІВ У МЕТАЛАХ

Самар Г. В., асистент

Національний технічний університет України «КПІ»,
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна

zettarok@gmail.com

У статті розглянуто фазові переходи Ліфшиця 2,5 роду в металах, пов'язані зі зміною топології поверхні Фермі. Розглянуто теорію Бар'яхтара-Макарова, згідно з якою електронно-топологічний перехід до надпровідного стану в деяких металах має місце при порівняно невеликих зовнішніх тисках.
Описано метод побудови якісних та кількісних властивостей переходу Ліфшиця 2,5 роду на основі точно розв'язуваної моделі однозонного сепарабельного потенціалу Ламе. Отримані точні аналітичні вирази для функції густини електронних станів у металах та її першої похідної.
Проведено порівняння результатів розрахунків з експериментальними даними по фазовому переходу Ліфшиця 2,5 роду в перехідних металах (сплав $\mathrm{Mo-Re}$). Продемонстровано можливість використання методу для точного розрахунку тонкої структури електронного спектру.
Ключові слова: скінченно-зонні потенціали Ламе, точно розв'язувана модель, електронно-топологічний перехід Ліфшиця 2,5 роду, енергія Фермі, поверхня Фермі.