

### ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЕНТОЧНОГО ПЬЕЗОМАГНИТНОГО КОМПОЗИТА

Фильштинский Л. А., д. ф.-м. н., профессор, Шрамко Ю. В., к. ф.-м. н.,  
Носов Д. Н., аспирант, Еременко А. А., аспирант, Сушко Т. С., к. ф.-м. н.

*Сумский государственный университет,  
ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, Украина*

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

Методом регулярных структур построена макромодель двоякопериодического пьезомагнитного композитного материала, армированного упругими лентами. Соответствующая граничная задача связанной магнитоупругости сведена к интегро-дифференциальному уравнению, которое было решено численно при помощи метода механических квадратур. В результате макромодули получены в замкнутом виде через функционалы, построенные на решениях соответствующей граничной задачи и содержащие полную информацию о микроструктуре фундаментальной ячейки. Приводятся результаты расчета.

*Ключевые слова: пьезомагнитная матрица, ленточный композит, двоякопериодическая задача, эффективные характеристики.*

### ЕФЕКТИВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРИЧКОВОГО П'ЄЗОМАГНІТНОГО КОМПОЗИТА

Фільштинський Л. А., д. ф.-м. н., професор, Шрамко Ю. В., к. ф.-м. н.,  
Носов Д. М., аспірант, Єременко Г. А., аспірант, Сушко Т. С., к. ф.-м. н.

*Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, Україна*

leonid@mphis.sumdu.edu.ua

Методом регулярних структур побудована макромодель двоєперіодичного п'єзокомпозита, армованого пружними стрічками. Відповідна гранична задача зв'язаної магнітопружності зведена до інтегро-диференціального рівняння, яке було розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Як результат, макромодулі отримані в замкнутому вигляді через функціонали, які побудовані на розв'язках відповідної граничної задачі та містять у собі вичерпну інформацію про микроструктуру комірки. Наведені результати розрахунків.

*Ключові слова: п'єзомагнітна матриця, стрічковий композит, двоєперіодична задача, ефективні характеристики.*

### EFFECTIVE MODULI OF COMPOSITE MATERIAL WITH RIBBON FIBERS

Filshhtinskii L. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,  
Shramko Yu. V., Ph.D. in Physics and Maths, Nosov D. N., Graduate Student,  
Eremenko A. A., Graduate Student, Sushko T. S., Ph.D. in Physics and Maths

*Sumy State University,  
Rimsky-Korsakov str., 2, Sumy, Ukraine*

Here we study the properties of piezomagnetic materials reinforced with regular double periodic system of elastic ribbons. It is assumed that average values of the component of magnetic induction vector and average components of elastic tensor are set in the structure.

General representation of solution is investigated in class of quasi-periodic functions and described with Weierstrass zeta-function. As a result, the complex potentials are obtained using Cauchy type generalized integrals form. The representations provide: 1) a double periodical distribution of mechanical strains, magnetic induction and magnetic intensity in a structure; 2) a quasi-periodicity distribution of components of mechanical displacement vector and magnetic potential component; 3) an existence of given average values in structure. Using obtained formulas, a coupled magnetoelasticity boundary problem is reduced to singular integral-differential equation (SIDE) that was solved using numerical scheme of mechanical quadrature method.

A homogeneous piezoceramic medium is regarded as a macromodel of a regularly reinforced piezoceramic material with equation of state coincided with the relationship between the mean values of the components of stresses and the vector of magnetic-field intensity in the structure on the one hand and the mean values of strains and the vector of

magnetic induction on the other hand. Thus, using regular structure methods we have constructed the algorithm of calculations of the macroscopic structure parameters via functionals, defined on solutions of SIDE, and contained complete information about the microstructure of the cell. As a result of computation, we have obtained that reinforcing of piezomagnetic matrix with piezopassive but rigid ribbons is yielded in strengthening of the all structure and enhancing of a piezo characteristic of composite material.

*Key words: piezomagnetic matrix, ribbon reinforced composite, double periodic boundary value problem, effective moduli.*

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Решение наиважнейших задач, которые возникают в науке и производстве по повышению надежности, снижению материалоемкости конструкций и сооружений, тесно связано с разработкой и использованием композитных материалов (КМ). Одним из новых классов таких материалов являются КМ с пьезомагнитными компонентами структуры.

Создание пьезокерамики, проявляющей «гигантскую магнитострикцию» [1] - Терфинол-Д - явилось мощным толчком к использованию пьезомагнетиков в современных областях науки и техники, в основном в радиоэлектронике, управляющих системах и вычислительной технике. Учитывая дороговизну таких материалов, а также недостаточную механическую прочность, на практике прибегают к использованию пьезокомпозитов на их основе. Возможность оптимизации и управления структурой КМ открывает путь к созданию новых пьезомагнитных материалов с наперед заданными магнитомеханическими свойствами. В связи с этим, для разработки эффективного метода проектирования состава и структуры КМ необходимы аналитические соотношения, которые описывают зависимости макромодулей КМ от геометрических параметров и физико-механических свойств компонентов.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЕ И ПУБЛИКАЦИЙ

В механике композиционных материалов сформировалось два основных направления – механика стохастических [2-4] и механика регулярных структур [5-7].

Современное производство ленточных (волоконистых) композитов позволяет получать двоякопериодические структуры или близкие к ним. Поэтому при построении макромоделей таких материалов в силу геометрической симметрии можно предположить о двоякопериодическом характере распределения соответствующих полевых величин, которые действуют в композите, и для их описания использовать двоякопериодические функции. Именно эта идея лежит в основе метода регулярных структур [8]. С использованием указанного метода, а так же техники сингулярных интегральных уравнений, одним из авторов в [6] построена модель ленточного упругого композита с анизотропными компонентами структуры в условиях плоской деформации. В работе [8] получены макромодули упругого анизотропного регулярного композита с тонкими неоднородностями, при этом использовался аппарат метода граничных элементов. Методом Мори–Танака в [9] получены макромодули ленточного упругого композита, при этом ленты рассматривались как предельный случай эллиптических волокон.

### ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной работе, которая основана на результатах исследований [6], проведем осреднение магнитных и механических свойств ленточного пьезомагнитного композита. Эти задачи интересны еще и тем, что являются основой для решения более сложных задач электромагнитоупругости [11].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель ленточного композиционного материала (ЛКМ):

1. Пьезомагнитная матрица армирована в направлении оси  $Ox_3$  двоякопериодической системой групп тонких упругих инородных лент, параллельных плоскости  $Ox_1x_2$ . Основные периоды армирования  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 1).

2. Вследствие малости толщины ленты  $d_j$  будем считать, что она непрерывно скреплена с матрицей вдоль своей срединной плоскости, сечение которой плоскостью  $Ox_1x_2$  представляет собой отрезок  $\Gamma_j$ , ( $j = \overline{1, M}$ ) с концевыми точками  $a_j$ ,  $b_j$ , ( $\text{Im } a_j = \text{Im } b_j = h_j$ ).
3. При нагружении в плоскости поперечного сечения ЛКМ лента работает лишь на растяжение – сжатие, причем жесткость ее значительно превышает жесткость матрицы. Напряжения  $\sigma_{22}$ , смещения  $u_1$ ,  $u_2$  и компонента вектора магнитной индукции  $B_2$  непрерывно продолжимы через  $\Gamma_j$ , а  $\sigma_{12}$  претерпевает скачок.
4. В структуре ЛКМ имеют место средние напряжения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и средние компоненты вектора магнитной индукции  $\langle B_j \rangle$ .

Модель магнитоупругости в комплексных переменных содержит материальные уравнения (плоское напряженное состояние) [12]:

$$e_{11} = s_{11}\sigma_{11} + s_{12}\sigma_{22} + g_{21}B_2, \quad e_{22} = s_{12}\sigma_{11} + s_{22}\sigma_{22} + g_{22}B_2, \quad 2e_{12} = s_{66}\sigma_{12} + g_{16}B_1 \quad (1)$$

$$H_1 = -g_{16}\sigma_{12} + \chi_{11}B_1, \quad H_2 = -g_{21}\sigma_{11} - g_{22}\sigma_{22} + \chi_{22}B_2.$$

Здесь  $s_{ij} = s_{ij}^B$  – коэффициенты деформации материала;  $g_{kj} = g_{kj}^{\sigma, B}$  – пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженности;  $\chi_{kl} = \chi_{kl}^{\sigma}$  – коэффициенты магнитной восприимчивости;  $e_{ij}$ ,  $H_j$ ,  $B_j$  – тензор деформации, векторы напряженности и индукции магнитного поля соответственно.

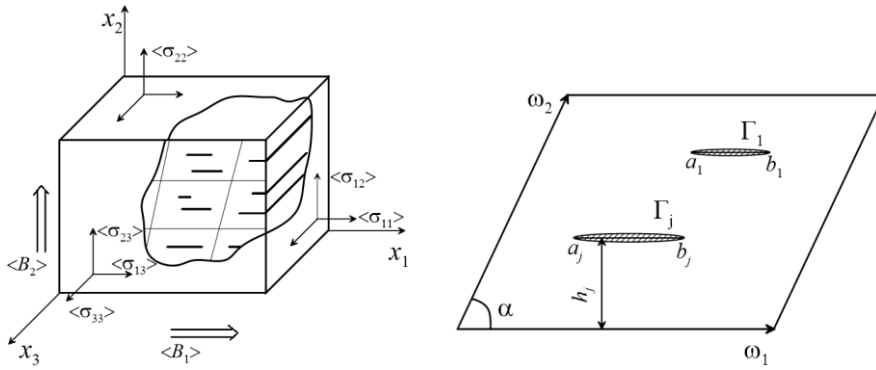


Рис. 1. Структура фундаментальной ячейки

Уравнения равновесия и магнитостатики

$$\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} = 0, \quad \partial_1\sigma_{12} + \partial_2\sigma_{22} = 0, \quad \partial_1B_1 + \partial_2B_2 = 0, \quad \partial_2H_1 - \partial_1H_2 = 0, \quad \partial_m = \partial/\partial x_m. \quad (2)$$

Соотношения Коши

$$e_{11} = \partial_1u_1, \quad e_{22} = \partial_2u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1u_2 + \partial_2u_1. \quad (3)$$

Условия совместности деформации

$$\partial_2^2e_{11} + \partial_1^2e_{22} - 2\partial_1\partial_2e_{12} = 0. \quad (4)$$

К уравнениям (1)-(4) необходимо присоединить соответствующие механические и магнитные краевые условия.

Для записи модели в комплексных переменных введем функцию напряжений  $F_1(x_1, x_2)$  и магнитный потенциал  $F_2(x_1, x_2)$  по формулам:

$$\sigma_{11} = \partial_2^2 F_1, \quad \sigma_{22} = \partial_1^2 F_1, \quad \sigma_{12} = -\partial_1 \partial_2 F_1, \quad B_1 = \partial_2 F_2, \quad B_2 = -\partial_1 F_2. \quad (5)$$

С учетом соотношений (1) и (5) приведем уравнение совместности (4) и последнее уравнение в (2) к системе:

$$\begin{aligned} L_{11}(\partial_1, \partial_2)F_1 - L_{12}(\partial_1, \partial_2)F_2 = 0, \quad L_{21}(\partial_1, \partial_2)F_1 + L_{22}(\partial_1, \partial_2)F_2 = 0, \\ L_{11}(\partial_1, \partial_2) = s_{11}\partial_2^4 + (2s_{12} + s_{66})\partial_1^2\partial_2^2 + s_{22}\partial_1^4, \\ L_{12}(\partial_1, \partial_2) = g_{22}\partial_1^3 + g_{26}\partial_1\partial_2^2 = L_{21}(\partial_1, \partial_2), \quad L_{22}(\partial_1, \partial_2) = \chi_{22}\partial_1^2 + \chi_{11}\partial_2^2, \quad g_{26} = g_{21} + g_{16}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть

$$F_1 = -L_{22}U, \quad F_2 = L_{21}U. \quad (7)$$

Тогда, второе уравнение в (6) выполнится тождественно, а первое дает:

$$\Delta(\partial_1, \partial_2) = -(L_{11}L_{22} + L_{12}^2) = 0.$$

Это уравнение – однородное, эллиптического типа. Соответствующее ему характеристическое алгебраическое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^3 a_{2m} \mu^{2m} = 0, \quad a_0 = s_{22}\chi_{22} + g_{22}^2, \\ a_2 = s_{22}\chi_{11} + (2s_{12} + s_{66})\chi_{22} + 2g_{26}g_{22} \\ a_4 = s_{11}\chi_{22} + (2s_{12} + s_{66})\chi_{11} + g_{26}^2, \quad a_6 = s_{11}\chi_{11}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) не может иметь действительных корней, в дальнейшем считаем, что они простые  $\text{Im } \mu_1 > 0, \text{Im } \mu_2 > 0, \text{Im } \mu_3 > 0, \mu_4 = \overline{\mu_1}, \mu_5 = \overline{\mu_2}, \mu_6 = \overline{\mu_3}$ .

Функцию напряжений, магнитный потенциал и полевые величины определим последовательно, исходя из соотношений (7), (5). Имеем:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k f_k''(z_k), \quad F_2(x_1, x_2) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k f_k'''(z_k), \quad \Phi_k(z_k) = f_k^{(IV)}(z_k), \\ \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} \gamma_k \Phi_k(z_k) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\{B_1, B_2\} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k, -1\} \lambda_k \Phi_k(z_k), \quad \{H_1, H_2\} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \{1, \mu_k\} \mu_k r_k \Phi_k(z_k),$$

$$\gamma_k = -\chi_{22} - \chi_{11}\mu_k^2, \quad \lambda_k = g_{22} + g_{26}\mu_k^2, \quad r_k = g_{16}\gamma_k + \chi_{11}\lambda_k, \quad z_k = x_1 + \mu_k x_2 = \text{Re } z + \mu_k \text{Im } z.$$

Наконец, в результате совместного интегрирования соотношений (3), получим вектор механического перемещения в виде:

$$\{u_1, u_2\} = 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \{p_{1k}, p_{2k}\} \varphi_k(z_k), \quad \varphi_k'(z_k) = \Phi_k(z_k), \quad (10)$$

$$P_{1k} = (s_{11}\mu_k^2 + s_{12})\gamma_k - g_{21}\lambda_k, \quad P_{2k} = (s_{12}\mu_k + s_{22}\mu_k^{-1})\gamma_k - g_{22}\mu_k^{-1}\lambda_k.$$

Компоненты вектора напряжения, нормальная компонента вектора магнитной индукции и касательная компонента вектора магнитной напряженности на некоторой дуге  $AB$  определяется согласно (9) формулами:

$$\{X_{1n}, X_{2n}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k, -1\} \gamma_k a_k(\psi) \Phi_k(z_k), \quad a_k(\varphi) = dz_k/ds \quad (11)$$

$$B_n = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k a_k(\psi) \Phi_k(z_k), \quad H_s = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k r_k a_k(\psi) \Phi_k(z_k).$$

Интегрируя (11), определяем главный вектор механических усилий, действующих на  $AB$ , поток вектора магнитной индукции через  $AB$  и работу вектора магнитной напряженности на  $AB$ . Имеем:

$$X_1 = \int_{AB} X_{1n} ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \gamma_k \varphi_k(z_k) \Big|_A^B, \quad X_2 = \int_{AB} X_{2n} ds = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \varphi_k(z_k) \Big|_A^B, \quad (12)$$

$$\Pi = \int_{AB} B_n ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \varphi_k(z_k) \Big|_A^B, \quad \Gamma = \int_{AB} H_s ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k r_k \varphi_k(z_k) \Big|_A^B.$$

Согласно принятой модели контакта по линии усилие на ленту передается за счет разности контактных касательных напряжений на берегах  $\Gamma_j$ . Запишем согласно рис. 1:

$$F_j d\sigma_{11}^j/dx = \sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+ = q_j(x), \quad \sigma_{11}^j(x_0) = - \int_{x_0}^{b_j} q_j(x) F_j^{-1} ds, \quad x_1 = x, \quad (13)$$

где  $F_j$  – площадь поперечного сечения  $j$ -го волокна,  $\sigma_{11}^j$  – погонное растягивающее напряжение в точке  $x_0 \in \Gamma_j$ .

Условия сопряжения волокна и матрицы представим согласно (1) и (13) в виде:

$$[e_{11}] = s_{11}[\sigma_{11}] = 0, \quad [e_{22}] = s_{12}[\sigma_{11}], \quad [2e_{12}] = s_{66}q(x) + g_{16}[B_1], \quad [\partial_1 u_2] = 0. \quad (14)$$

Здесь учтено, что  $[f] = f^- - f^+$ ,  $[\sigma_{22}] = 0$ ,  $[e_{11}] = 0$ ,  $[B_2] = 0$ ,  $[\sigma_{12}] = q_j(x)$  на оси ленты  $\Gamma_j$ .

### КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Представим комплексные потенциалы, фигурирующие в (9) в виде обобщенных интегралов типа Коши:

$$\Phi_k(z_k) = A_k - c_k \int_{\Gamma} q(t) \zeta(t_k - z_k) dt = \varphi_k'(z_k), \quad q(t) = \{q_j(t), t \in \Gamma_j\}, \quad (15)$$

$$\varphi_k(z_k) = A_k z_k + c_k \int_{\Gamma} q(t) \ln \sigma(z_k - t) dt, \quad \Gamma = U\Gamma_j, \quad t = x + ih_j, \quad t_k = x + \mu_k h_j,$$

где  $\zeta(z)$  и  $\sigma(z)$ , соответственно, мероморфная дзета-функция и целая сигма-функция Вейерштрасса [13],  $A_k$  – константы, отвечающие за существование средних величин  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ,  $\langle B_j \rangle$ ,  $c_k$  – константы, введенные для выполнения условий сопряжения (14).

Представления (15) обеспечивают двоякопериодическое распределение механических напряжений, полей магнитной индукции и напряженности, а также квазипериодический

характер поля перемещений и потока индукции магнитного поля. В самом деле, в силу групповых свойств эллиптических функций [13], имеем:

$$\begin{aligned} \zeta(z_k + \omega_m^{(k)}) - \zeta(z_k) &= \delta_m^{(k)}, \quad \ln \sigma(z_k + \omega_m^{(k)}) - \ln \sigma(z_k) = \pi i + \delta_m^{(k)}(z_k + 0,5\omega_m^{(k)}), \\ \omega_1^{(k)} &= \omega_1, \quad (\operatorname{Im} \omega_1 = 0), \quad \omega_2^{(k)} = \operatorname{Re} \omega_2 + \mu_k \operatorname{Im} \omega_2 = h + \mu_k H, \\ \delta_m^{(k)} &= 2\zeta(0,5\omega_m^{(k)}), \quad m = \overline{1,2}, \quad k = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Причем, необходимо иметь в виду, что  $\zeta(z_k)$  и  $\sigma(z_k)$  построены на периодах  $\omega_1^{(k)}$  и  $\omega_2^{(k)}$ . Соответственно этому записывается соотношение Лежандра [13]:

$$\delta_1^{(k)} \omega_2^{(k)} - \delta_2^{(k)} \omega_1^{(k)} = 2\pi i. \quad (17)$$

Из (15) с учетом соотношений (16) и двойкой периодичности  $\Phi_k(z_k)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k + \omega_m^{(k)}) - \Phi_k(z_k) &= c_k \delta_m^{(k)} \int_{\Gamma} q(t) dt = 0, \quad (m = \overline{1,2}; k = \overline{1,3}) \\ \varphi_k(z_k + \omega_m^{(k)}) - \varphi_k(z_k) &= A_k \omega_m^{(k)} - c_k \delta_m^{(k)} l_k, \quad l_k = \int_{\Gamma} t_k q(t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, из дополнительного условия равновесия  $j$ -го включения

$$\int_{\Gamma_j} q_j(t) dt = 0, \quad (j = \overline{1, M}) \quad (19)$$

вытекают условия периодичности и квазипериодичности в (18).

Обоснование интегральных представлений (15). Покажем, что константы  $c_k$ , фигурирующие в этих представлениях, вполне определяются из контактных условий сопряжения (14). Для этого запишем следы функций  $\Phi_k(z_k)$  на берегах  $\Gamma$ . Имеем, с учетом формул Сохоцкого–Племеля [13]:

$$\Phi_k^{\pm}(t_{ok}) = A_k \mp \pi i c_k q(t_0) - c_k \int_{\Gamma} q(t) \zeta(t_k - t_{ok}) dt, \quad t_0 \in \Gamma, \quad (20)$$

$$[\Phi_k(t_{ok})] = \Phi_k^-(t_{ok}) - \Phi_k^+(t_{ok}) = 2\pi i c_k q(t_0), \quad t_{ok} = \operatorname{Re} t_0 + \mu_k \operatorname{Im} t_0.$$

С учетом скачков в (20) и формул для полевых величин (9), (10), сводим условия сопряжения (14), после преобразований к системе:

$$2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^3 \mu_k^m c_k = Q_m, \quad (m = \overline{1,4}), \quad (21)$$

$$Q_0 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_4 = 0, \quad a_0 = s_{22} \chi_{22} + g_{22}^2, \quad Q_1 = g_{21} / 2\pi \Delta_0, \quad Q_3 = (g_{16} \chi_{22} - g_{22} \chi_{11}) / 2\pi \chi_{11} \Delta_0,$$

$$Q_{-1} = (2\pi a_0)^{-1} (s_{12} - g_{21} m_0 \Delta_0^{-1}), \quad m_0 = s_{22} \chi_{11} + g_{22} g_{26}, \quad \Delta_0 = \chi_{11} g_{22} - \chi_{22} g_{26}.$$

Система Вандермонда (21) в принятых ранее предположениях относительно чисел  $\mu_k$ , однозначно разрешима [13]. Для нахождения  $A_k$ , будем исходить из формул (12) для интегральных величин и учитывать выражения для приращений (18). Имеем (рис. 1):

на грани ячейки  $BC$  ( $\psi = \alpha + 3\pi/2$ )

$$H\langle\sigma_{11}\rangle - h\langle\sigma_{12}\rangle = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3\mu_k\gamma_k\alpha_2^{(k)}, \quad H\langle\sigma_{12}\rangle - h\langle\sigma_{22}\rangle = -2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3\gamma_k\alpha_2^{(k)}, \quad (22)$$

$$H\langle B_1\rangle - h\langle B_2\rangle = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3\lambda_k\alpha_2^{(k)};$$

на грани ячейки  $CD$  ( $\psi = \pi/2$ )

$$\omega_1\{\langle\sigma_{12}\rangle, \langle\sigma_{22}\rangle, \langle B_2\rangle\} = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3\{-\mu_k\gamma_k, \gamma_k, -\lambda_k\}\alpha_1^{(k)},$$

$$\alpha_m^{(k)} = A_k\omega_m^{(k)} - c_k l_k \delta_m^{(k)}, \quad (k = \overline{1, 3}, m = \overline{1, 2}), \quad \alpha_2^{(k)}\omega_1^{(k)} - \alpha_1^{(k)}\omega_2^{(k)} = 2\pi i c_k l_k.$$

Из этих равенств с учетом соотношения Лежандра (17), находим:

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3\{\mu_k\gamma_k, \gamma_k, \lambda_k\}A_k^* = \{-\langle\sigma_{12}\rangle, \langle\sigma_{22}\rangle, -\langle B_2\rangle\},$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3\lambda_k\mu_k A_k^* = \langle B_1\rangle + 4\pi F_0^{-1}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^3 c_k l_k \lambda_k, \quad (23)$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3\gamma_k\mu_k^2 A_k^* = \langle\sigma_{11}\rangle + 4\pi F_0^{-1}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^3 c_k l_k \gamma_k \mu_k, \quad A_k^* = A_k - \delta_1^{(k)}\omega_1^{-1}c_k l_k, \quad F_0 = H\omega_1.$$

Уравнения (23) получены при условии совместности

$$\operatorname{Im}\sum_{k=1}^3\gamma_k c_k l_k = 0. \quad (24)$$

Соотношения (23) содержат пять вещественных уравнений относительно трех комплексных постоянных  $A_1, A_2, A_3$ . Для их однозначного определения зафиксируем средний угол поворота ячейки  $\langle\varepsilon\rangle$ , положив его равным нулю. Имеем, с учетом (10), шестое уравнение

$$2\langle\varepsilon\rangle = (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3(p_{2k} - \mu_k p_{1k})A_k^* + 4\pi F_0^{-1}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^3 p_{1k} c_k l_k = 0. \quad (25)$$

Из равенств (23), (25) приходим после преобразований к системе линейных алгебраических уравнений типа Вандермонда

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^3\mu_k^m A_k^* = R_m, \quad (m = \overline{-1, 4}), \quad (26)$$

где

$$\Delta_0 R_0 = g_{26}\langle\sigma_{22}\rangle - \chi_{11}\langle B_2\rangle, \quad \Delta_0 R_1 = \chi_{11}\langle B_1\rangle - g_{26}\langle\sigma_{12}\rangle, \quad \Delta_0 R_2 = \chi_{22}\langle B_2\rangle - g_{22}\langle\sigma_{22}\rangle,$$

$$\Delta_0 R_3 = g_{22}\langle\sigma_{12}\rangle - \chi_{22}\langle B_1\rangle, \quad \chi_{11}R_4 = -\langle\sigma_{11}\rangle - \chi_{22}R_2 - l_0 F_0^{-1}, \quad \Delta_0 = \chi_{11}g_{22} - g_{26}\chi_{22},$$

$$\alpha_0 R_{-1} = (g_{26}m_0\Delta_0^{-1} - s_{12} - 0,5s_{66})\langle\sigma_{12}\rangle - (\chi_{11}m_0\Delta_0^{-1} + 0,5g_{16})\langle B_1\rangle.$$

Таким образом, представления комплексных потенциалов (15) корректны в том смысле, что они обеспечивают двоякопериодическое распределение механических напряжений, магнитной напряженности и индукции в структуре; квазипериодическое распределение механических перемещений и магнитного потенциала; выполнение условий сопряжения (14); существование в структуре заданных средних величин  $\langle\sigma_{ij}\rangle, \langle B_j\rangle$ .

Для определения контактного напряжения  $q(t)$  составим условие совместности деформаций волокна и матрицы (ниже считаем, что в ячейке имеется одно волокно). При этом, имеем следующие упрощения, которые будут учитываться ниже. В силу (19), учитывая (21), (26) и (27), имеем:

$$t = x + ih_1, \quad t_k = x + \mu_k h_1, \quad q(t) = q_0(x), \quad l_k = \int_{\Gamma_1} x q_0(x) ds = l_0 \quad (27)$$

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^3 c_k \gamma_k l_k = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^3 c_k \gamma_k \mu_k l_k = \frac{1}{4\pi} l_0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^3 c_k \lambda_k l_k = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^3 c_k p_{1k} l_k = 0.$$

Приравняв деформацию в матрице и волокне в точке  $x_0$  с учетом (13) приходим к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению на  $\Gamma_1$

$$\int_{\Gamma_1} G(x, x_0) q_0(x) dx + \frac{s_{11}^{(1)}}{s_{11} F_1} \int_{x_0}^{h_1} q_0(x) dx = N, \quad (28)$$

где

$$G(x, x_0) = x F_0^{-1} + s_{11}^{-1} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{1k} c_k \left[ \delta_1^{(k)} \omega_1^{-1} x - \zeta_k (x - x_0) \right], \quad N = -\langle \sigma_{11} \rangle - s_{12} s_{11}^{-1} \langle \sigma_{22} \rangle - g_{21} s_{11}^{-1} \langle B_2 \rangle.$$

Решение этого уравнения в классе функций с корневыми особенностями на концах  $\Gamma_1$  фиксируется дополнительным условием (19).

После определения функции  $q_0(x)$  магнитоупругое поле в ЛКМ определяется по формулам (9) с учетом представлений (15).

### ЭФФЕКТИВНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛКМ

Интерес представляет проблема определения магнитоупругих свойств такого материала. При рассмотрении этого вопроса будем исходить из того, что упругие перемещения в структуре и магнитный потенциал – квазипериодические функции и, следовательно, их можно сопоставить с соответствующими величинами в однородной (модельной) среде, где они линейно зависят от координат. В соответствии с этим замечанием можем записать, с учетом (10), (18):

$$\begin{aligned} u_1(x_1 + \omega_1, x_2) - u_1(x_1, x_2) &= \omega_1 \langle e_{11} \rangle = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{1k} \alpha_1^{(k)}, \\ u_2(x_1 + \omega_1, x_2) - u_2(x_1, x_2) &= \omega_1 \langle \partial_1 u_2 \rangle = \omega_1 (\langle e_{12} \rangle - \langle \varepsilon \rangle) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{2k} \alpha_1^{(k)}, \\ u_1(x_1 + h, x_2 + H) - u_1(x_1, x_2) &= h \langle e_{11} \rangle + H (\langle e_{12} \rangle + \langle \varepsilon \rangle) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{1k} \alpha_2^{(k)}, \\ u_2(x_1 + h, x_2 + H) - u_2(x_1, x_2) &= H \langle e_{22} \rangle + h (\langle e_{12} \rangle - \langle \varepsilon \rangle) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{2k} \alpha_2^{(k)}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\langle e_{ik} \rangle$  и  $\langle \varepsilon \rangle$  – соответствующие деформации и угол поворота ячейки в модельной среде.

Для осреднения магнитных свойств воспользуемся представлениями магнитной напряженности в (3), откуда следуют равенства:

$$F(x_1 + \omega_1, x_2) - F(x_1, x_2) = \omega_1 \langle H_1 \rangle = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k r_k \alpha_1^{(k)}, \quad (30)$$



$$F(x_1 + h, x_2 + H) - F(x_1, x_2) = h \langle H_1 \rangle + H \langle H_2 \rangle = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k r_k \alpha_2^{(k)}.$$

Учитывая соотношения (20), (30) и введя стандартное решение  $q_0^c(x)$ , соответствующее правой части  $N=1$ , приходим к следующим материальным уравнениям для макромодели

$$\begin{aligned} \langle e_{11} \rangle &= a_{11} \langle \sigma_{11} \rangle + a_{12} \langle \sigma_{22} \rangle + a_{13} \langle B_2 \rangle, & 2 \langle e_{12} \rangle &= s_{66} \langle \sigma_{12} \rangle + g_{16} \langle B_1 \rangle, \\ \langle e_{22} \rangle &= a_{21} \langle \sigma_{11} \rangle + a_{22} \langle \sigma_{22} \rangle + a_{23} \langle B_2 \rangle, \\ \langle H_1 \rangle &= -g_{16} \langle \sigma_{12} \rangle + \chi_{11} \langle B_1 \rangle, & \langle H_2 \rangle &= a_{31} \langle \sigma_{11} \rangle + a_{32} \langle \sigma_{22} \rangle + a_{33} \langle B_2 \rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= s_{11} (1 - l_0^c F_0^{-1}), & a_{12} &= s_{12} (1 - l_0^c F_0^{-1}), & a_{13} &= g_{21} (1 - l_0^c F_0^{-1}), \\ a_{22} &= s_{22} (1 - s_{12}^2 l_0^c s_{11}^{-1}), & a_{23} &= g_{22} (1 - l_0^c F_0^{-1} g_{21} s_{12} / g_{22} s_{11}), & a_{33} &= \chi_{22} (1 + l_0^c F_0^{-1} g_{21}^2 / s_{11} \chi_{22}), \\ q_0(x) &= n(s, g) q_0^c(x), & n(s, g) &= -\langle \sigma_{11} \rangle - \frac{s_{12}}{s_{11}} \langle \sigma_{22} \rangle - \frac{g_{21}}{s_{11}} \langle B_2 \rangle, & l_0 &= n(s, g) \int_{\Gamma_1} x q_0^c(x) dx. \end{aligned}$$

Под константами  $a_{ij}$  понимаем эффективные магнитоупругие параметры ЛКМ. Величины  $s_{66}$ ,  $g_{16}$ ,  $\chi_{11}$  – совпадают с соответствующими материальными константами матрицы.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассматривается композит тетрагонального строения, матрица которого изготовлена из пьезокерамики *Terfenol-D* [12]:  $s_{11}/s_0 = 119,7$ ,  $s_{22}/s_0 = 17,18$ ,  $s_{12}/s_0 = -6$ ,  $s_{66}/s_0 = 119,77$ ,  $g_{16}/g_0 = 215,54$ ,  $g_{21}/g_0 = -100,08$ ,  $g_{22}/g_0 = 207,63$ ,  $\chi_{11}/\beta_0 = 76,9$ ,  $\chi_{22}/\beta_0 = 188,57$ ,  $s_0 = 10^{-6}$  МПа<sup>-1</sup>,  $g_0 = 10^{-5}$  МТл<sup>-1</sup>,  $\beta_0 = 10^{-3}$  МПа/МТл<sup>2</sup>. Волокно – анизотропный материал, жесткость которого значительно превышает жесткость матрицы.

На рис. 2а построены зависимости макромодуля  $a_{11}/s_{11}$  в функции параметра  $\lambda = 2l/\omega_1$ , где  $l$  – ширина ленты. Размеры ячейки  $\omega_1 = 2$  и  $\omega_2 = 2i$ . Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям модуля податливости волокна  $s_{11}^{(i)}/s_0 = 0,01; 0,2; 0,5; 0,7; 1$  соответственно. Влияние пьезоэффекта на осредненные характеристики приведено на рис. 2б. Кривые 1-6 соответствуют макромодулю  $a_{11}/s_{11}$ , построенные для композита с фундаментальной ячейкой  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 2i$  (кривые 3-6) и  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = i$  (кривые 1, 2) в функции параметра  $\lambda = 2l/\omega_1$ . Модуль податливости волокна для кривых 1-4 и 5-6  $s_{11}^{(i)}/s_0 = 0,01; 1$  соответственно. Сплошные линии отвечают матрице из *Terfenol-D*, штрихпунктирные – пьезопассивной матрице (*Terfenol-D* с нулевыми пьезомодулями). Как следует из полученных результатов, армирование жесткими упругими лентами приводит к упрочнению всей структуры, кроме того, возрастает пьезомодуль  $a_{13}/g_{21}$ . К упрочнению ЛКМ так же приводит уменьшение расстояния между лентами. Остальные физико-механические характеристики ЛКМ не изменяются. Кроме того, установлено, что наличие пьезоэффекта существенно влияет на механические характеристики ЛКМ: модуль упругости  $a_{11}/s_{11}$  уменьшается на 15%.

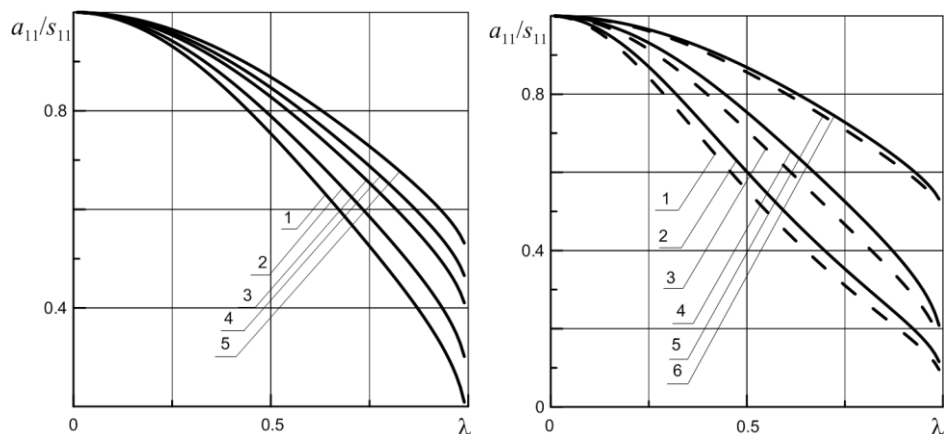


Рис. 2. а) макромодуль композита  $a_{11}/s_{11}$  в функции параметра  $\lambda = 2l/\omega_1$ ; б) влияние пьезоэффекта на осредненные характеристики композита

### ВЫВОДЫ

В работе исследованы свойства двоякопериодических ленточных композитов с пьезокерамической матрицей в условиях плоского напряженного состояния. Предполагается, что в структуре заданы средние компоненты тензора механических напряжений и вектора индукции магнитного поля.

Комплексное представление решения разыскивалось в классе квазипериодических функций и описывалось дзета-функцией Вейерштрасса. Предложен подход, при котором граничная задача магнитоупругости сведена только к одному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению первого рода на разомкнутом контуре. Впоследствии получена численная схема реализации построенного алгоритма с использованием метода механических квадратур.

Схема решения задачи осреднения упругих ЛКМ была обобщена на случай ЛКМ с пьезомагнитной матрицей. Методом регулярных структур построена процедура нахождения макроскопических параметров структуры через функционалы, которые определяются на решениях интегро-дифференциального уравнения и содержат полную информацию о микроструктуре ячейки. Как следует из полученных результатов, армирование жесткими упругими лентами приводит к упрочнению всей структуры, кроме того возрастает пьезомодуль  $a_{13}/g_{21}$ . К упрочнению ЛКМ так же приводит уменьшение расстояния между лентами. Остальные физико-механические характеристики ЛКМ не изменяются. Кроме того, установлено, что наличие пьезоэффекта существенно влияет на механические характеристики ЛКМ: модуль упругости  $a_{11}/s_{11}$  уменьшается на 15%.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Engdahl G. Handbook of Giant Magnetostrictive Materials / G. Engdahl. – Academic press, USA, 2000. – 409 p.
2. Соколкин Ю. В. Электроупругость пьезокомпозитов с нерегулярными структурами / Ю.В. Соколкин, А.А. Паньков. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
3. Хорошун Л. П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры / Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов. – К. : Наук. думка, 1993. – 131 с.
4. Milton G. W. The theory of composite / G.W. Milton. – Camb. Univ. Press, 2004. – 719 p.

5. Бардзокас Д. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 376 с.
6. Григолюк Э. И. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский. – М. : «Физико-матем. лит.», 1994. – 335 с.
7. Manevitch L. I. Mechanics of periodically heterogeneous structures / L.I. Manevitch, I.V. Andrianov, V.G. Oshmyan. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo : Springer, 2002. – 264 p.
8. Filshinsky L. Mathematical models of elastic and piezoelectric fields in two-dimensional composites / L. Filshinsky, V. Mityushev // *Mathematics Without Boundaries. Surveys in Interdisciplinary Research*, Pardalos, Panos M., Rassias, Themistocles M. (Eds.)/Springer Science + Business Media New York VIII. – 2014. – Pp. 217-262.
9. Zhao Y. H. Effective Elastic Moduli of Ribbon-Reinforced Composite / Y.H. Zhao, G.J. Weng // *Journal of Applied Mechanics*. – 1990. – Vol. 112. – Pp. 158-167.
10. Pasternak Ya. M. Plane Problem of Elasticity for an Anisotropic Body with Doubly Periodic Systems of Thin Inhomogeneities / Ya.M. Pasternak, G.T. Sulim // *Mechanics of Solids*. – 2014. – Vol. 49, No. 2. – Зр. 162-174.
11. Паньков А. А. Электромагнитоупругие поля и эффективные свойства пьезокompозитов с квазипериодическими структурами / А.А. Паньков // *Механика композитных материалов и конструкций*. – 2012. – Т. 18, №3. – С. 345-358.
12. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк : Юго-Восток, 2007. – 269 с.
13. Фильштинский Л. А. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Математический аппарат физических и инженерных наук. Т.1 / Л.А. Фильштинский, Д.И. Бардзокас, М.Л. Фильштинский. – М., Ижевск : НИЦ РХД, 2010. – 864 с.

#### REFERENCES

1. Engdahl, G. (2000), “Handbook of Giant Magnetostrictive Materials”, Academic press, USA.
2. Sokolkiv, Yu.V. and Pan'kov, A.A. (2003), “Elektrouprugost p'ezokompozitov c neregulyarnymi strukturami”, FIZMATLIT, Moskow, Russia.
3. Khoroshun, L.P. and Maslov, B.P. (1993), “Nelineynye svoystva kompozitnykh materialov stokhasticheskoy struktury”, Nauk. dumka, Kiev.
4. Milton, G.W. (2004), “The theory of composite”, Camb. Univ. Press.
5. Bardzokas, D.I. and Zobnin, A.I. (2003), “Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v kompozitsionnykh materialakh periodicheskoy struktury”, Editorial URSS, Moskow, Russia.
6. Grigolyuk, E.I. and Fil'shtinskij, L.A. (1994), “Regulyarnye kusochno-odnorodnye struktury s defektami”, «Fiziko-matem. lit.», Moskow, Russia.
7. Manevitch, L.I., Andrianov, I.V. and Oshmyan, V.G. (2002), “Mechanics of periodically heterogeneous structures”, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo.
8. Filshinsky, L. and Mityushev, V. (2014), “Mathematical models of elastic and piezoelectric fields in two-dimensional composites”, *Mathematics Without Boundaries. Surveys in Interdisciplinary Research*, Pardalos, Panos M., Rassias, Themistocles M. (Eds.)/Springer Science + Business Media New York VIII, 648, pp. 217-262.

9. Zhao, Y.H. and Weng, G.J. (1990), "Effective Elastic Moduli of Ribbon-Reinforced Composite", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 112, pp. 158-167.
10. Pasternak, Ya.M. and Sulim, G.T. (2014), "Plane Problem of Elasticity for an Anisotropic Body with Doubly Periodic Systems of Thin Inhomogeneities", *Mechanics of Solids*, vol. 49, no. 2, pp. 162-174.
11. Pan'kov, A.A. (2012), "Elektromagnitoupругie polya i effektivnye svojstva p'ezokompozitov s kvaziperiodicheskimi strukturami", *Mekhanika kompositnykh materialov i konstruktsiy*, vol. 18, no. 3, p. 345-358.
12. Kaloerov, S.A., Baeva, A.I. and Boronenko, O.I. (2007), "Dvumernye zadachi elektro i magnitoupругosti dlya mnogosvyaznykh oblastey", Yugo-Vostok, Donetsk.
13. Fil'shtinskij, L.A., Barzdokas, D.I. and Fil'shtinskij, M.L. (2010), "Aktual'nye problemy svyazannykh fizicheskikh poley v deformiruemykh telakh. Matematicheskiy apparat fizicheskikh i inzhenernykh nauk", vol. 1, NITS RKHD, Moscow, Izhevsk.

УДК 539.377

### ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ДВОХЕЛЕМЕНТНОЇ ПРИЗМАТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РІЗНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Хапко Б. С., к. ф.-м. н.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна*

bogdan.khapko@gmail.com

Досліджено термонапружений стан тонкої призматичної оболонки спричинений різницею температур довкілля, і залежних від координати коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях. Задачу теплопровідності для оболонки зведено до взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра та Фредгольма другого роду. Побудовано числову схему розв'язку інтегральних рівнянь з використанням методу квадратурних формул. Для знаходження функції напружень та прогину використано скінченні інтегральні перетворення Фур'є. Наведено результати числового аналізу розподілу температурних характеристик, прогину, моментів та зусиль.

*Ключові слова: теплопровідність, оболонка, лам, кусково-постійні коефіцієнти тепловіддачі, прогин, зусилля, моменти.*

### ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С РАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛОТДАЧИ

Хапко Б. С., к. ф.-м. н.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
ул. Научная, 3б, г. Львов, 79060, Україна*

bogdan.khapko@gmail.com

Исследовано термонапряжённое состояние тонкой призматической оболочки, вызванное разницей температур окружающей среды и зависящих от координаты коэффициентов теплоотдачи на лицевых поверхностях. Задачу теплопроводности для оболочки сведено к взаимосвязанной системе интегральных уравнений с интегральными операторами Вольтерра и Фредгольма второго рода. Построено числовую схему решения интегральных уравнений с использованием метода квадратурных формул. Для нахождения функции напряжений и прогиба использовано конечные интегральные преобразования Фурье. Приведены результаты численного анализа распределения температурных характеристик, прогиба, моментов и усилий.

*Ключевые слова: теплопроводность, оболочка, излом, кусочно-постоянные коэффициенты теплоотдачи, изгиб, усилия, моменты.*