

10. Шацкий И. П. Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине / И.П. Шацкий // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70-75.

REFERENCES

- Williams, M.L. (1961), "The bending stress distribution on the base of a stationary crack", *J. Appl. Mech.*, vol. 28, no. 1, pp. 78-82.
- Berezhnitskii, L.T., Delyavskii, M.V. and Panasyuk, V.V. (1979), *Izhib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin* [Bending of thin plates with defects such as cracks], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
- Savruk, M.P. (1981), *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* [Two-dimensional problems of elasticity for cracked bodies], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
- Shatskiy, I.P (1988), "Bending of plate weakened by the cut with contacting edges", *Dopovidi AN URSR. Ser. A*, no. 7, pp. 49-51.
- Young, M.J. and Sun, C.T. (1992), "Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution", *Intern. J. Fract.*, vol. 55, pp. 81-93.
- Shatskii, I.P. (2001), "Model for contact of crack boundaries in a bending plate", *J. Math. Sci.*, vol. 103, iss. 3, pp. 357-362.
- Khludnev, A.M. and Kovtunencko, V.A. (2000), "Analysis of cracks in solids", WIT-Press, Southampton; Boston.
- Dalyak, T.M. (1999), "About interaction between cracks and slots in plate bending", *Mekhanika ryznuvamykh materialiv i mitsnist konstruktsii*, (Iss. 2): In 3 vol. / Ed. Panasyuk V. V., Kamenyar, Lviv, vol. 2, pp. 269-272.
- Shats'kyi, I.P. and Dalyak, T.M. (2002), "Closure of cracks merged with slots in bent plates", *Materials Sci.*, vol. 38, iss. 1, pp. 24-33.
- Shatskii, I.P. (1990), "Interaction of collinear sections with contacting edges in a bent plate", *Materials Sci.*, vol. 26, iss. 3, pp. 311-316.

УДК 539.3

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОЛЕБАНИЯ РОТОРА С ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ КОНТАКТИРОВАНИЯ БЕРЕГОВ

Шульженко Н. Г., д. т. н., профессор, Зайцев Б. Ф., д. т. н., с. н. с.,
Руденко Е. К., к. т. н., н. с., Асаенко А. В., к. т. н., н. с.

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61000, Украина

shulzh@kharkov.ua

Представлена методика расчета колебаний неравномерно нагретого ротора с «дышащей» трещиной. Используются МКЭ, конечно-разностное решение начальной задачи с итерациями для выполнения условий контактирования берегов. На реальном примере исследованы особенности колебаний ротора с учетом влияния температурного поля.

Ключевые слова: колебания, ротор, поперечная трещина, температурное поле, конечный элемент, контакт берегов.

Фізико-математичні науки

ОЦІНКА ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ НА КОЛИВАННЯ РОТОРА З ПОПЕРЕЧНОЮ ТРИЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУВАННЯ БЕРЕГІВ

Шульженко М. Г., д. т. н., професор, Зайцев Б. Ф., д. т. н., с. н. с.,
Руденко О. К., к. т. н., н. с., Асайонок О. В., к. т. н., н. с.

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61000, Україна*

shulzh@kharkov.ua

Представлена методика розрахунку коливань нерівномірно нагрітого ротора з «дихаючою» тріщиною. Застосовані МСЕ, скінченно-різницева розв'язання початкової задачі з ітераціями для виконання умов контактування берегів. На реальному прикладі досліджені особливості коливань ротора з урахуванням впливу температурного поля.

Ключові слова: коливання, ротор, поперечна тріщина, температурне поле, скінченний елемент, контакт берегів.

ASSESSMENT OF TEMPERATURE STRESS IMPACT ON VIBRATION OF ROTOR WITH TRANSVERSE CRACK ACCOUNTING BANKS CONTACT

Shulzhenko N. G., D. of Technical Science, Professor,
Zaitsev B. Ph., D. of Technical Science, Senior Researcher,
Rudenko E. K., Ph.D. of Technical Science, Asaenok A. V., Ph.D. of Technical Science

*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine,
Pozharsky str., 2/10, Kharkov, 61000, Ukraine*

shulzh@kharkov.ua

The method for vibration analysis of unevenly heated rotor with transverse crack, banks of which is in contact, is proposed. Vibrations are considered in the moving coordinate system associated with rotor. Three dimensional finite element modeling is used. Special method is used to set crack in the original solid rotor. This method is based on modification of finite element mesh and creation of surface with unrelated double nodes. Formalized matrix operations are applied to standard elements. The database of degenerate finite elements is created. This method allows making modeling of cracks with complex surface and imposes no restriction on number of them.

Matrix form equations of motion are received. There are stiffness and mass matrix of rotor with crack in those equations. The equations supplemented by special mass matrix that allows taking into account linear change of centrifugal forces under three dimensional rotor deformations.

The interaction of crack banks is considered as normal separation scheme without friction. Terms of banks non-penetration is performed by entering of unknown contact forces in the double nodes. Contact forces on surface of the crack are presented at the right side of equations of motion.

Temperature field in the rotor is determined from equations of unsteady heat conduction and accounted by setting fictitious body forces.

The initial problem of rotor vibrations is solved by direct numerical integration with Newmark's scheme. Contact forces are defined iteratively at each time step until condition of banks contact is performed.

The method is used to study vibrations of real heating rotor. Unsteady temperature field is analyzed by Crank-Nicolson's method. The most noticeable effect of temperature field is shown for the moments corresponding to the maximal radial temperature difference on the rotor shaft. The features of vertical vibrations of rotor and their spectral composition with and without considering temperature field are assessed. Contact between banks of crack under rotation of rotor is absent when no considering temperature field. Superresonance 2/1 and main resonance occurs in the range before operating frequency. Contact areas remain constant with different frequencies under the action of temperature field. The influence is seen in smoothen of crack «breathing» effect, i.e. the absence of resonances. It leads to mainly monoharmonical vibrations.

Key words: vibrations, rotor, transverse crack, temperature field, finite element, banks contact.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ вибрационного состояния тел с трещинами актуален при решении задач диагностики конструкций. В большинстве работ, посвященных этой тематике (например, [1-8]), применяются стержневые модели, в которых по-разному учитывается изменение состояния и влияния трещины на податливость системы при повороте, связанных с ее «дыханием». В [2-6] изменение податливости системы с трещиной определяется на основе использования энергетических соотношений механики трещин. В [1, 3] ее «дыхание» задается как

мгновенный переход из открытого в закрытое состояние и наоборот, в зависимости от углового положения системы. В [4-6, 7] переменная податливость определяется в зависимости от углового положения с введением линии закрытия трещины, исходя из кинематических [1, 4, 5, 8] или статических [1, 6] представлений.

Условность моделирования процесса «дыхания» и применение стержневых моделей не позволяет в ряде случаев адекватно отобразить особенности рассматриваемых процессов (наличие трещины в местах резкого изменения формы деталей; наклонные, продольные и криволинейные трещины). Представляется, что процессы сближения–расхождения берегов трещины и изменения податливости системы с ней более адекватно могут быть описаны при решении контактной задачи на основе использования трехмерных моделей.

Роторы турбомашин подвержены действию не только веса или центробежных сил, но также внутренних самоуравновешенных сил, обусловленных, прежде всего, неравномерным температурным полем, технологическими факторами, которые сопровождали изготовление конструкции (ковка, сварка, закалка и т.д.). Следствием влияния эксплуатационных и технологических факторов являются начальные напряжения, а также деформации (искривления), которые вместе с напряжениями от активных сил влияют на результирующее напряженно-деформированное состояние. При этом, если в конструкции имеется трещина, то ее проявление существенно зависит от результирующего поля напряжений. Начальные напряжения определяются стационарными факторами, а напряжения от сил, вызывающих колебания, – переменными.

Т.о., имеет место комбинация полей НДС – стационарных и нестационарных. Если трещина расположена в части конструкции, где начальные напряжения сжимающие, то она может не проявляться при деформациях, вызванных колебаниями.

На качественном уровне влияние начальных, прежде всего температурных напряжений, на колебания ротора с трещиной известно, однако количественная оценка их влияния отсутствует. Это объясняется значительными математическими сложностями решения задачи о колебаниях ротора с «дышащей» трещиной при наличии произвольного температурного поля, которое возможно только в трехмерной постановке.

В данной работе описываются методика расчета колебаний ротора по трехмерной модели с трещиной произвольного вида, «дыхание» которой определяется контактированием и раскрытием ее берегов с использованием условий нормального отрыва, и рассмотрен пример реального ротора с температурным полем, имеющим максимальный радиальный перепад и возникающим при наборе турбинной номинальной мощности.

МЕТОДИКА

Составляющими методики являются построение конечноэлементной (КЭ) модели тела с трещиной, учет контактирования («дыхания») ее берегов, построение уравнений колебаний вращающегося тела (ротора) с учетом температурного поля и алгоритмов решения нелинейной начально-краевой задачи.

Способ построения КЭ-модели тела с трещиной состоит в разрыве связей между узлами ее КЭ-сетки по поверхности, разделяющей берега трещины, и выполняется согласно [9]. Полученная модифицированная сетка конечных элементов содержит разделяющую поверхность, имеющую несвязанные между собой двойные узлы, представляющие берега трещины. Применение схемы введения разрезов [9] для учета трещины приводит к изменению основных характеристик КЭ-модели – матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$. Это позволяет моделировать трещины со сложной поверхностью, например, состоящей из состыкованных или пересекающихся плоскостей различных направлений, и не накладывает ограничения на количество вводимых трещин. Берега трещины при колебаниях тела могут входить в односторонний контакт, когда отрыв возможен, а взаимное проникновение берегов отсутствует.

В рассматриваемой постановке контактирование берегов задается по нормали к поверхности трещины. При этом допускается проскальзывание без трения. Условие непроникновения берегов трещины имеет вид:

$$\delta_{in} = u_{in}^+ - u_{in}^- \geq 0, \quad (1)$$

где u_{in}^+ , u_{in}^- – перемещения по нормали \bar{n} в i двойном узле на положительной (+) и отрицательной (–) поверхностях трещины (рис. 1); δ_{in} – сближение по нормали в i двойном узле. Знаку равенства в (1) соответствует состояние контакта берегов трещины.

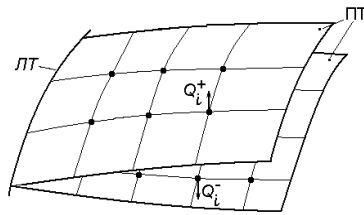


Рис. 1. Схемы введения диполей в двойных узлах:
ПТ – поверхность трещины; ЛТ – линия трещины

Силы, возникающие при контактировании берегов трещины (в зонах раскрытия они отсутствуют), определяются с помощью системы контактных сил $Q_i \{Q_i^+, Q_i^-\}$, приложенных в двойных узлах [10], попарно равных по величине ($Q_i^+ = Q_i^-$) и противоположных по направлению и подлежащих определению, причем $i = 1 \div m$, где m – число двойных узлов на поверхности трещины. В соответствии с терминологией в теории упругости их можно назвать диполями (рис. 1).

Уравнения движения МКЭ вращающегося тела (ротора) с «дышащей» трещиной представляются в подвижной системе координат, связанной с телом, так

$$[M]\ddot{\mathbf{u}} - 2\omega \cdot [M_2]\dot{\mathbf{u}} + ([K] - \omega^2[M_1] - \omega^2[M'_\omega])\mathbf{u} = \omega^2\mathbf{P} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_T + \mathbf{Q}\{Q_i\}, \quad (2)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещения узлов; ω – частота вращения; $\omega^2\mathbf{P}$ – вектор центробежных сил в недеформированном состоянии; \mathbf{F}_e – вектор внешней нагрузки; \mathbf{F}_T – вектор температурных сил; $\mathbf{Q}\{Q_i\}$ – система диполей, учитывающая переменные поверхностные силы, действующие по берегам трещины; $[M_1]$, $[M_2]$, $[M'_\omega]$ состоят из элементов матрицы масс, причем $[M_1]$ имеет симметричную структуру, $[M_2]$, $[M'_\omega]$ – несимметричную.

Выражения для температурной нагрузки \mathbf{F}_T , обусловленной температурным полем $T(x, y, z)$, определяются дополнительным слагаемым в функционале Лагранжа-Даламбера для движущейся среды

$$-\int_V \frac{\alpha E}{1-2\nu} \theta T dV, \quad (3)$$

где E , ν – модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного расширения; θ – объемная деформация.

Исходя из выражения (3) и соотношений для перемещений и декартовых координат через функции формы $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ локальных координат ξ, η, ζ , можно получить общее выражение для узловых значений температурной нагрузки \mathbf{F}_T на КЭ. В случае постоянных характеристик материала выражения имеют вид:

$$F_T = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \int_{K\Omega} T(x, y, z) \sum_i \left(u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} + u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} + u_{zi} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dV, \quad (4)$$

где u_{xi}, u_{yi}, u_{zi} – узловые значения компонентов вектора перемещений.

Полный вектор температурной нагрузки получается суммированием по всем КЭ модели ротора.

С помощью матрицы $[M'_0]$ в уравнении (2) учитывается в линейной постановке изменения центробежных сил при смещениях с сохранением их радиальной направленности [11].

Распределение контактных сил – диполей $Q\{Q_i\}$ – изменяется во времени и определяется из решения контактной задачи для берегов трещины до выполнения условий (1).

Определение матриц масс и жесткости (2) тела осуществляется при полностью открытой трещине. Введением системы диполей Q в правой части уравнений (2) учитывается влияние изменения формы тела при изменении зон контакта, что позволяет при этом не переисчислять матрицы жесткости и масс.

Решение начальной задачи (2) для расчета колебаний выполняется прямым интегрированием по двухслойной неявной конечноразностной схеме Ньюмарка, являющейся, безусловно, устойчивой [12]. Конечноразностные соотношения по методу Ньюмарка представляются в виде:

$$[\hat{K}]u_{t+\Delta t} = \hat{R}_{t+\Delta t}, \quad (5)$$

где $[\hat{K}]$ – модифицированная матрица жесткости; $u_{t+\Delta t}$ – вектор перемещений для конца шага; $\hat{R}_{t+\Delta t}$ – модифицированная правая часть уравнений (2) для момента времени $t+\Delta t$.

Модифицированный вектор правой части может быть представлен в виде

$$\hat{R}_{t+\Delta t} = \tilde{R}_{t+\Delta t} + Q_{t+\Delta t},$$

где $\tilde{R}_{t+\Delta t}$ соответствует известной части модифицированного вектора правой части; $Q_{t+\Delta t}$ – наперед неизвестная часть, но в конце шага должна быть такой, чтобы удовлетворялись условия контакта (1).

Перемещения в конце шага $u_{t+\Delta t}$ можно представить в виде:

$$u_{t+\Delta t} = \tilde{u}_{t+\Delta t} + \bar{u}_{t+\Delta t},$$

где $\tilde{u}_{t+\Delta t}$ – вектор перемещений, соответствующий известной (вычисленной) части выражения (5); $\bar{u}_{t+\Delta t}$ – вектор дополнительных перемещений от контактных сил $Q_{t+\Delta t}$.

Перемещения $\tilde{u}_{t+\Delta t}$ определяются при решении системы (5) с известной правой частью, а перемещения $\bar{u}_{t+\Delta t}$ – после нахождения $Q_{t+\Delta t}$ методом итераций до выполнения условий контактирования (1). После определения контактных усилий перемещения $\bar{u}_{t+\Delta t}$ могут быть вычислены

$$\bar{u}_{t+\Delta t} = [B]_{\Delta t} Q_{t+\Delta t},$$

где $[B]_{\Delta t}$ – матрица коэффициентов влияния размерностью $N \times m$ (N – число переменных в узлах). Элементы строк матрицы $[B]_{\Delta t}$ вычисляются предварительно и равны динамическим

смещениям в теле за промежутки времени Δt от единичных диполей, приложенных поочередно в каждом из двойных узлов.

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследования выполнялись на примере ротора среднего давления (РСД-1) теплофикационной турбины Т-250/300-240 Уральского турбомоторного завода. Модель ротора представлена на рис. 2, где показано расположение подшипниковых опор и рассматриваемой гипотетической трещины по валу ротора, которая занимает половину сечения.

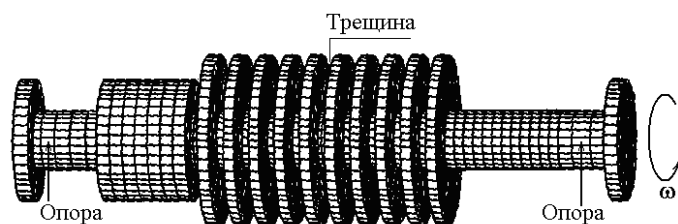


Рис. 2. Модель ротора

Температурное поле при пуске ротора по мере его прогрева меняется, достигая на установившемся режиме стационарного состояния. Исследования, выполненные при решении задачи термоупругости для различных температурных полей в роторе, показывают, что наибольшее влияние на колебания ротора с поперечной трещиной может быть при максимальных радиальных перепадах температуры, что представляет наибольший интерес.

Нестационарное температурное поле рассчитывалось МКЭ с использованием конечно-разностной схемы интегрирования по времени Крэнка-Николсона [13] матричного уравнения теплопроводности с помощью математического обеспечения [14]. Температурное поле с максимальным перепадом, который составил по валу около 50°C , было достигнуто через 9,5 часа после пуска турбины в момент выхода на максимальную мощность 300 МВт.

Влияние температурных напряжений для рассматриваемого поля значительное, что проявляется в неизменности зоны контактирования берегов поперечной трещины при различных частотах вращения ротора. Такое состояние фиксируется для принятой дискретизации поперечного сечения ротора (21 двойной узел на берегах трещины). Контактное взаимодействие берегов трещины следует из рис. 3, где зона контакта занимает периферию сечения (более высокая температура осесимметричного поля и температурные напряжения сжатия), а зона отрыва – сердцевину сечения (более низкая температура и температурные напряжения растяжения).

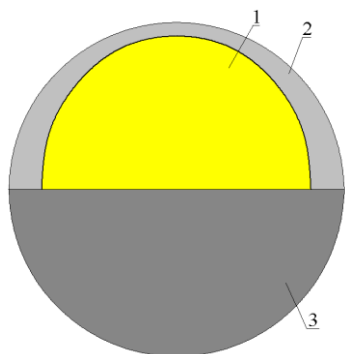


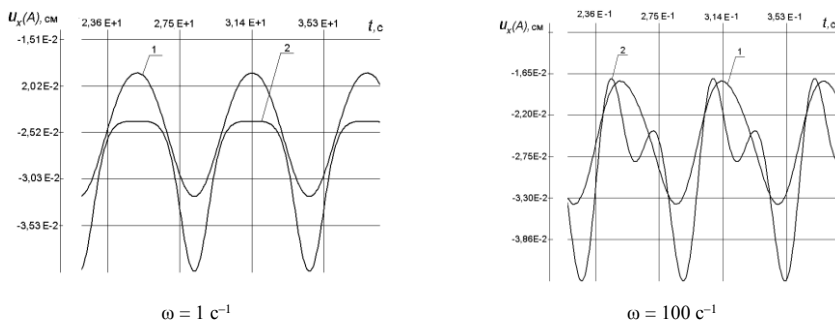
Рис. 3. Контактное состояние берегов трещины:
1 – зона отрыва; 2 – зона контакта; 3 – цельная часть сечения

Следует отметить, что при более густой дискретизации можно ожидать некоторого изменения расположения линии, разграничивающей области контакта и отрыва при вращении ротора.

Изменения в характере колебаний ротора (точка оси ротора в сечении с трещиной) под влиянием температурного поля с максимальным радиальным перепадом при различных частотах вращения представлены на рис. 4, где для сравнения приводятся данные расчетов в отсутствии температурного поля (кривые 2). Результаты показывают, что данное температурное поле в целом значительно уменьшает максимальные значения прогибов и размахи колебаний.

При этом вид колебаний приближается к моногармоническим, что объясняется почти постоянной областью контактирования берегов трещины. При постоянной области контакта деформирование почти линейное, но с переменной жесткостью, обусловленной не изменением зон контакта, а положением сечения (аналогично валу двойкой жесткости). При этом добавляется составляющая от прецессии искривленного вследствие температурного поля ротора. Это подтверждается данными спектрального анализа гармонических составляющих вертикального смещения на периоде колебаний $2\pi/\omega$. Результаты гармонического анализа представлены на рис. 5.

При отсутствии температурного поля с изменением частоты вращения спектр гармонических составляющих сильно меняется. По достижении приблизительно половины нижней собственной частоты ($\omega = 100 \text{ с}^{-1}$) наблюдается возрастание второй гармоники, что может квалифицироваться, учитывая нелинейность системы, как суперрезонанс 2/1. В зарезонансной области происходит резкое перераспределение гармонических составляющих, где преобладающей становится первая гармоника. В области частот вращения, близких к собственным частотам, соответствующим первой форме изгибных колебаний ротора с трещиной ($\omega = 200 \text{ с}^{-1}$), возникает основной резонанс по оборотной составляющей. Далее, с возрастанием частоты до рабочей, амплитуды гармонических составляющих уменьшаются. При наличии температурного поля с радиальным перепадом основной в спектре является первая гармоника и колебания близки к моногармоническим с оборотной частотой.



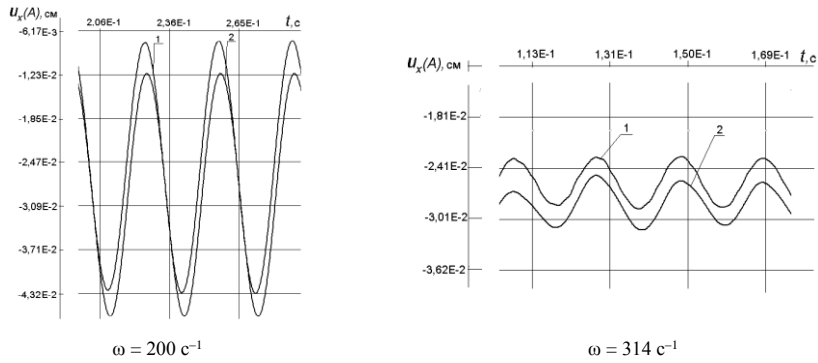


Рис. 4. Вертикальные колебания ротора при различных частотах вращения:
1 – вес и Т-поле; 2 – вес

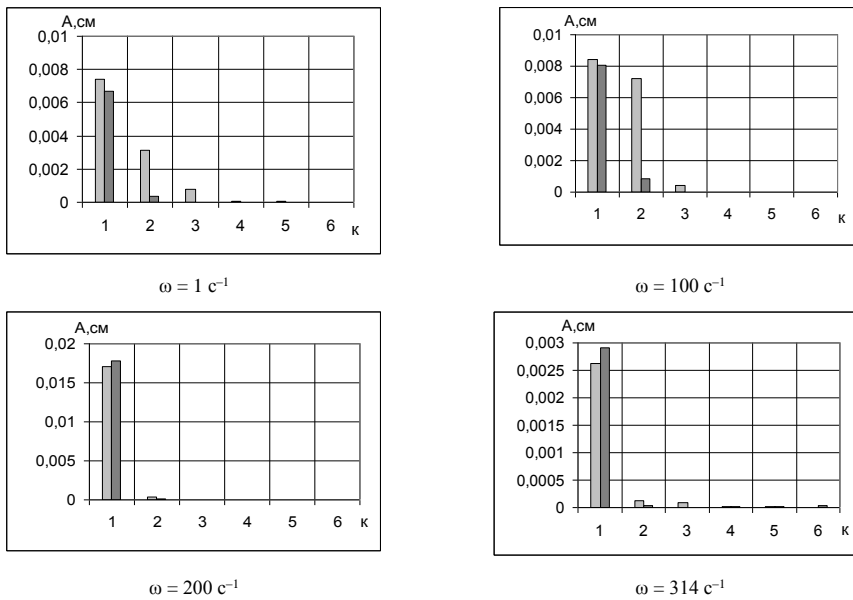


Рис. 5. Спектральный состав вертикальных перемещений ротора
при различных частотах вращения и учете: ■ – веса и Т-поля; □ – только веса

ВЫВОДЫ

Наибольший эффект влияния нестационарного температурного поля в роторе с поперечной трещиной на его колебания проявляется при максимальном радиальном перепаде температуры. Контактное взаимодействие берегов трещины при отсутствии температурного воздействия переменное, а при его наличии зоны контакта и отрыва берегов стабильны и не изменяются с частотой вращения.

Расчетные исследования нелинейных колебаний ротора (ротор гибкий) без учета влияния температурного поля на различных частотах показывают, что он испытывает два резонанса. Первый квалифицируется как суперрезонанс 2/1 на частоте близкой к половине расщепившихся из-за трещины низших собственных частот, на которой вторая гармоническая составляющая достигает максимума. Второй резонанс является основным, на котором

оборотная гармоническая составляющая максимальна. Влияние температурного поля проявляется в сглаживании эффектов (резонансов) «дышащей» трещины и приводит к моногармоничности колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульженко Н. Г. Численный анализ колебаний системы турбоагрегат-фундамент / Н.Г. Шульженко, Ю.С. Воробьев. – К. : Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. Матвеев В. В. К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях / В.В. Матвеев, А.П. Бовсуновский // Проблемы прочности. – 2000. – № 3. – С. 5-23.
3. Kicinski J. Assessment of materials and operational imperfections in rotating machinery / J. Kicinski // Key Eng. Materials. – Trans. Tech. Publications, Switzerland. – 2005. – Vol. 293, 294. – P. 391-400.
4. Sekhar A. S. Effects of cracks on rotor system instability / A.S. Sekhar, J.K. Dey // Mechanism and Machine Theory. – 2000. – Vol. 35. – P. 1657-1674.
5. Darpe A. K. Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor / A.K. Darpe, K. Gupta, A. Chawla // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – Vol. 269. – P. 33-60.
6. Pennacchi P. A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines / P. Pennacchi, N. Bachschmid, A. Vania // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2000. – Vol. 20. – P. 2112-2147.
7. Shulzhenko N. G. Simplified models of turbine vibrations with breathing crack in the shaft / N.G. Shulzhenko, B.Ph. Zajtsev, A.V. Asaenok, S. Banaszek // Int. J. Applied Mechanics and Engineering. – 2012. – Vol. 17. – No. 1. – P. 233-247.
8. Шульженко Н. Г. Методы расчета и анализ характеристик колебаний многоопорного ротора с поперечной трещиной / Н.Г. Шульженко, Г.Б. Овчарова // Проблемы прочности. – 1997. – № 4. – С. 92-99.
9. Асаёнок А. В. Методика введения разрезов в схеме метода конечных элементов в задачах статики и собственных колебаний трехмерных конструкций / А.В. Асаёнок, Б.Ф. Зайцев, Н.Г. Шульженко // Проблемы машиностроения. – 2003. – Т.6, № 3. – С. 58-63.
10. Шульженко Н. Г. Расчет колебаний ротора с «дышащей» трещиной по трехмерной модели / Н.Г. Шульженко, Б.Ф. Зайцев, Н.Е. Викман, А.В. Асаенко // Проблемы прочности. – 2012. – № 6. – С. 137-145.
11. Зайцев Б. Ф. Построение матриц масс для учета центробежных сил при колебаниях трехмерного вращающегося тела / Б.Ф. Зайцев, А.В. Асаенко, Н.Е. Викман // Вестник НТУ «ХПИ». Динамика и прочность машин. – 2009. – Вып. 30. – С. 52-56.
12. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вильсон. – М. : Стройиздат, 1982. – 448 с.
13. Эмери А. Ф. Оценка применимости МКЭ при расчетах температуры / А.Ф. Эмери, В.В. Карлсон // Теплопередача. – 1971. – № 2. – С. 6-17.
14. Шульженко Н. Г. Задачи термпрочности, вибродиагностики и ресурса энергоагрегатов (модели, методы, результаты исследований) : монография / Н.Г. Шульженко, П.П. Гонтаровский, Б.Ф. Зайцев. – Saarbrücken, Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG, 2011. – 370 с.

REFERENCES

1. Shul'zhenko, N.G. and Vorob'ev, Ju.S. (1991), "Chislennyj analiz kolebanij sistemy turboagregat-fundament", Nauk. dumka, Kiev.

2. Matveev, V.V. and Bovsunovskij, A.P. (2000), "K opredeleniju vibracionnyh karakteristik sterzhnja s zakryvajushhejsja treshhinoj pri izgibnyh kolebanijah", *Problemy prochnosti*, no. 3, pp. 5-23.
3. Kicinski, J. (2005), "Assessment of materials and operational imperfections in rotating machinery", *Key Eng. Materials*, Trans. Tech. Publications, Switzerland, vol. 293, 294, pp. 391-400.
4. Sekhar, A.S. and Dey, J.K. (2000), "Effects of cracks on rotor system instability", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, pp. 1657-1674.
5. Darpe, A.K., Gupta, K. and Chawla, A. (2004), "Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 269, pp. 33-60.
6. Pennacchi, P., Bachschmid, N. and Vania A. (2000), "A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, pp. 2112-2147.
7. Shul'zhenko, N.G., Zajtsev, B.Ph., Asaenok, A.V. and Banaszek, S. (2012), "Simplified models of turbine vibrations with breathing crack in the shaft", *Int. J. Applied Mechanics and Engineering*, vol. 17, no. 1, pp. 233-247.
8. Shul'zhenko, N.G. and Ovcharova, G.B. (1997), "Metody rascheta i analiz harakteristik kolebanij mnogoopornogo rotora s poperechnoj treshhinoj", *Problemy prochnosti*, no. 4, pp. 92-99.
9. Asajonok, A.V., Zajcev, B.F. and Shul'zhenko, N.G. (2003), "Metodika vvedenija razrezov v sheme metoda konechnyh jelementov v zadachah statiki i sobstvennyh kolebanij trehmernyh konstrukcij", *Problemy mashinostroenija*, vol. 6, no. 3, pp. 58-63.
10. Shul'zhenko, N.G., Zajcev, B.F., Vikman, N.E. and Asaenok, A.V. (2012), "Raschet kolebanij rotora s "dyshashhej" treshhinoj po trehmernoj modeli", *Problemy prochnosti*, no. 6, pp. 137-145.
11. Zajcev, B.F., Asaenok, A.V. and Vikman, N.E. (2009), "Postroenie matric mass dlja ucheta centrebeznyh sil pri kolebanijah trehmernogo vrashhajushhegosja tela", *Vestnik NTU "HPI", Dinamika i prochnost' mashin*, issue 30, pp. 52-56.
12. Bate, K. and Vil'son, E. (1982), "Chislennye metody analiza i metod konechnyh jelementov", Strojizdat, Moscow.
13. Jemeri, A.F. and Karlson, V.V. (1971), "Ocenka primenimosti MKJe pri raschetah temperatury", *Teploperedacha*, no. 2, pp. 6-17.
14. Shul'zhenko, N.G., Gontarovskij, P.P. and Zajcev, B.F. (2011), "Zadachi termoprochnosti, vibrodiagnostiki i resursa jenergoagregatov (modeli, metody, rezul'taty issledovanij): monografija", LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG, Saarbrücken, Germany.