УДК 519.85

МЕТОД ГІЛОК ТА МЕЖ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ

Чілікіна Т. В., к. ф.-м. н., Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор,
Ємець Є. М., к. ф.-м. н., професор, Парфьонова Т. О., к. ф.-м. н.

Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Коваля, 3, Полтава, 36014, Україна

tv.0502@gmail.com, yemetsli@ukr.net, tapa@mail.com

У публікації міститься опис застосування методу гілок та меж для задач нелінійної умовної комбінаторної оптимізації на переставленнях. Сформульовані та доведені теореми про оцінки допустимих підмножин у методі гілок та меж для комбінаторних задач оптимізації на переставленнях з лінійною або нелінійною цільовою функцією. Запропоновані правила галуження та відсікання допустимих підмножин в цих задачах.
Ключові слова: метод гілок та меж, нелінійні оптимізаційні задачі на перестановках.

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Чиликина Т. В., к. ф.-м. н., Емец О. А., д. ф.-м. н., профессор,
Емец Е. М., к. ф.-м. н., профессор, Парфенова Т. А., к. ф.-м. н.

Полтавский университет экономики и торговли,
ул. Коваля, 3, Полтава, 36014, Украина

tv.0502@gmail.com, yemetsli@ukr.net, tapa@mail.com

В публикации содержится описание использование метода ветвей и границ для задач нелинейной условной комбинаторной оптимизации на перестановках. Сформулированы и доказаны теоремы об оценках допустимых подмножеств в методе ветвей и границ для комбинаторных задач оптимизации на перестановках с линейной или нелинейной целевой функцией. Предложены правила ветвления и отсечения допустимых подмножеств в таких задачах.
Ключевые слова: метод ветвей и границ, нелинейные оптимизационные задачи на перестановках.

BRANCH AND BOUND METHOD FOR NONLINEAR CONDITIONAL OPTIMIZATION OF ON PERMUTATIONS

Chilikina T. V., Yemets O. O., Yemets Y. M., Parfionova T. O.

Poltava University of Economics and Trade,
Kovalya str., 3, Poltava, 36014, Ukraine

tv.0502@gmail.com, yemetsli@ukr.net, tapa@mail.com

Topical issues is to develop and research new methods to nonlinear combinatorial optimization problem on permutations, is essential for the development of combinatorial optimization. This publication is dedicated to the use of branch and bound method for solving nonlinear optimization problems contingent on permutations. The problem with non-linear objective function that includes the linear part of the set of permutations is solved in the first phase by the branch and bound. For this purpose, you need to find ways of branching the set of admissible solutions and methods of evaluation of admissible subsets of the decision tree. Subsets of feasible solutions forms a natural approach of branching in the method of branches and borders, proposed methods for clipping feasible solutions. Then we get the results that make it possible to evaluate a subset of the possible solutions in the branch and bound method for the problem of constrained nonlinear optimization entirely on combinatorial permutations. Non-linear component of the objective function is convex and strongly convex function on a convex set contains many permutations. The results make it possible to evaluate a subset of the possible solutions in the branch and bound method for the the problem of conditional nonlinear optimization entirely on combinatorial permutations. Non-linear component of the objective function in the problems to be solved, there is a convex and strongly convex function on a convex set contains set of permutations.
Key words: *branch and bound method, non-linear optimization problems on a set of permutations.*

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз наукових публікацій за останній час свідчить, що евклідова комбінаторна оптимізація є перспективним напрямком досліджень в області математичного програмування. Потреби практики зумовили швидкий розвиток теорії дискретної та комбінаторної оптимізації (див., зокрема [1-9]). Серед задач виокремилися задачі евклідової комбінаторної оптимізації (див., зокрема [4-9]), серед яких значне місце займають задачі на переставних множинах [4-8].

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Універсальним підходом до розв'язування задач оптимізації є метод гілок та меж (МГМ). Для задач евклідової комбінаторної оптимізації він розглядався, зокрема, в роботах [10-15]. Але для задач нелінійної умовної комбінаторної оптимізації на переставленнях його застосування унеможливлюється відсутністю ефективних процедур оцінювання допустимих множин.

Мета цієї роботи до певної міри заповнити цю прогалину в розв'язанні таких задач МГМ.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо задачу

$$f^0(x) \to \min, \tag{1}$$

$$f^i(x) \le 0, \quad i \in J_m, \tag{2}$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in E_{k\nu}(G), \tag{3}$$

де серед функцій $f^0(x)$, $f^i(x)$ $(i \in J_m = \{1, 2, ..., n\})$ є хоч одна нелінійна функція, $E_{k\nu}(G)$ – множина переставлень з k елементів, серед яких ν різних, з мультимножини G.

Як відомо [4], задача (1)-(3) – це задача умовної нелінійної повністю комбінаторної оптимізації на переставленнях.

Розглянемо випадок, коли в цільовій функції є лінійна частина, тобто

$$f^0(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i + \varphi(x), \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ – нелінійна функція.

Якщо до задачі (1)-(4) застосувати метод гілок та меж, то треба з'ясувати два питання:

1) як галузити множину допустимих розв'язків, що задається (2), (3);

2) як давати оцінку допустимих підмножин у дереві галуження.

Як відомо (з теореми 3.1 [4] та зауваження 3.3 до неї), для

$$x^* = (x_1^*, ..., x_m^*) = \arg \min_{x \in E_{k\nu}(G)} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i , \tag{5}$$

$$x_i^* = g_i, \ \forall i \in J_k, \tag{6}$$

де

$$c_1 \ge ... \ge c_k , \tag{7}$$

$$g_1 \le ... \le g_k . \tag{8}$$

Розглянемо підхід до оцінювання в МГМ, що викладено роботах [10-11], до задач з цільовою функцією (4).

Як відомо (див., наприклад, [10-11]), оцінка $\xi(D)$ допустимої підмножини $D \subset X$ у задачі мінімізації функції $F(x),\ x \in X$ повинна задовольняти умові:

$$\xi(D) \le F(x) \quad \forall x \in D. \tag{9}$$

Лема 1. Якщо $f_1(x),\ f_2(x)$ – дійснозначні функції з R^k в $R^1,\ X \subset R^k$, то

$$f_1(x) + f_2(x) \ge \min_{x \in X}\left[f_1(x) + f_2(x)\right] \ge \min_{x \in X} f_1(x) + \min_{x \in X} f_2(x).$$

Доведення. За означенням мінімуму

$$f_1(x) + f_2(x) \ge \min_{x \in X} f_1(x) + f_2(x) \ge \min_{x \in X} f_1(x) + \min_{x \in X} f_2(x).$$

Нерівність справедлива для будь-яких x у лівій частині, а отже і для тих значень, для яких ліва частина набуває значення мінімума.

Зауважимо, що часто в (2) маємо

$$f^i(x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ik}x_k - b_i, \tag{10}$$

а нерівність у (2) легко зводиться до рівності.

З леми 1 та властивосты оцінки (9) випливає, що, даючи оцінку відповідній допустимій множині, у (4) можна використовувати оцінки кожного з доданків.

Лема 2. Якщо $E_\varphi \subset E$, то для функції $\varphi(x)$

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \le \min_{x \in E_\varphi} \varphi(x). \tag{11}$$

Доведення. Якщо

$$x^* = \arg\min_{x \in E} \varphi(x) \in E_\varphi, \tag{12}$$

то

$$x^* = \arg\min_{x \in E_\varphi} \varphi(x),$$

тобто в (11) досягається рівність. Якщо (12) не виконується, то це означає, що

$$\min_{x \in E} \varphi(x) < \min_{x \in E_\varphi} \varphi(x).$$

Отже, в обох випадках нерівність (11) справедлива, що і треба було довести.

Розглянемо МГМ до задачі (1)-(4). Множину допустимих розв'язків $D \subset R^k$ визначимо як множину, що задовольняє умовам (2), (3).

Підмножини $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r} \subset D$ утворюються таким природнім підходом до галуження в методі гілок та меж до задачі (1)-(4).

Умова (3) означає, що $x = (x_1, \ldots, x_k)$ є переставленням чисел (взагалі кажучи, дійсних чисел) $g_1, \ldots, g_k$. Нехай, не обмежуючи загальності, виконується (8).

Тому за підмножину множини D можемо розглянути множину

$$D_t^\tau = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k \,\middle|\, x_\tau = g_t;\ \sum_{j \in J_k \setminus \{t\}} a_{ij}x_j + a_{i\tau}g_t = b_i\ \forall i \in J_l;\ \sum_{j \in J_k \setminus \{t\}} a_{ij}x_j + a_{i\tau}g_t \le b_i\ \forall i \in J_m \setminus J_l \right\}, \tag{13}$$

якщо вона непорожня, де $\tau \in J_k$.

Непорожню множину $D_{i_1}^{\tau_1}$ вигляду (13), якщо вона містить принаймні два елементи, можна розгалузити на підмножини

$$D_{i_1 t}^{\tau_1\tau_2},\ t \in J_{k-1},\quad D_{i_1 t}^{\tau_1\tau_2} = \Bigg\{ x = (x_1,...,x_k) \in R^k \ \Big| x_{\tau_1} = g_{i_1}, x_{\tau_2} = g_t, \tau_1 \neq \tau_2, t \neq i_1;$$

$$\sum_{\forall j \in J_k \setminus \{\tau_1,\tau_2\}} a_{ij}x_j + a_{i\tau_1} g_{i_1} + a_{i\tau_2} g_t = b_i\ \forall i \in J_l;\ \sum_{\forall j \in J_k \setminus \{\tau_1,\tau_2\}} a_{ij}x_j + a_{i\tau_1} g_{i_1} + a_{i\tau_2} g_t \le b_i\ \forall i \in J_m \setminus J_l \Bigg\}.$$

На $(r+1)$-му рівні аналогічного розбиття $r \le k-1$ допустимої множини матимемо

$$D_{i_1 i_2 \dots i_r t}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r\tau_{r+1}} = \Bigg\{ x = (x_1,...,x_k) \in R^k \ \Big| x_{\tau_j} = g_{i_j}\ {\scriptstyle \forall j \in J_r};\ x_{i_{r+1}} = g_t,\ t \neq i_j,\ i_j \in J_k\ ;$$

$$\sum_{\forall j \in J_k \setminus \{\tau_1,...,\tau_r\}} a_{ij}x_j + \sum_{\forall j \in J_r} a_{i\tau_j} g_{i_j} = b_i\ \forall i \in J_l;\ \sum_{\forall j \in J_k \setminus \{\tau_1,...,\tau_r\}} a_{ij}x_j + \sum_{\forall j \in J_r} a_{i\tau_j} g_{i_j} \le b_i\ \ \forall i \in J_m \setminus J_l \Bigg\}. \quad (14)$$

Оцінкою $\xi_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}$ лінійної частини цільової функції (1), (4) для множини $D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}$ може слугувати величина $\xi_{i_1,i_2,\dots,i_r}^{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_r}$, що обчислюється, як показано в [18].

Оцінка для нелінійної частини в (1), (4) може бути дана за методологією п. 3.3 роботи [4, с. 120-142] для різних класів функцій. Оцінку всієї множини $D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}$ позначимо $\xi\left(D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}\right)$.

Нехай $E_{k\nu}(G)$ – множина переставлень з (3), $M \subset R^k$, $\operatorname{int} M$ – внутрішність M.

Теорема 1. Якщо $\varphi(x)$ – скінченна опукла функція, яка задана на скінченій замкненій множині $X \subset R^k$; $E_{k\nu}(G) \subset X$, то:

$$\xi\left(D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}\right) = \xi_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r} + \varphi(y) - \big(p((y),y)\big) + \sum_{i=1}^{k} p_{j_i}(y) g_i, \quad (15)$$

де $y \in \operatorname{int} X$ – довільна точка, $(p_1(y),...,p_k(y))$ – субградієнт функції $\varphi(x)$ в точці y, $(p(y),y)$ – скалярний добуток векторів $p(y), y$, виконується (8) та

$$p_{j_1}(y) \ge p_{j_2}(y) \ge \dots \ge p_{j_k}(y). \quad (16)$$

Доведення. Оцінка повинна задовольняти умові (9), тобто $\forall x \in D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}$.

$$f^0(x) \ge \xi\left(D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}\right), \quad (17)$$

за (4)

$$f^0(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \varphi(x). \quad (18)$$

Для $\forall x \in D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}$

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \ge \xi_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1\tau_2\dots\tau_r}. \quad (19)$$

За лемою 3.29 з [4], у якій $E = E_{k\nu}(G)$,

$$\min_{x\in E_{k\nu}(G)} \varphi(x) \ge \varphi(y) - (p(y), y) + \min_{x\in E_{k\nu}(G)} \sum_{i=1}^{k} p_i(y) x_i . \tag{20}$$

Мінімум в (20) знаходимо за теоремою 3.1 [4] при $\eta = k$, $n = \nu$. З (20) маємо $\forall y \in \operatorname{int} X$ за умови (16) та (8):

$$\min_{x\in E_{k\nu}(G)} \varphi(x) \ge \varphi(y) - (p(y), y) + \sum_{i=1}^{k} p_{j_i}(y) g_i . \tag{21}$$

Оскільки $D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r} \subset E_{k\nu}(G)$, то за лемою 2

$$\min_{x\in D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}} \varphi(x) \ge \min_{x\in E_{k\nu}(G)} \varphi(x). \tag{22}$$

Отже $\forall x \in D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}$

$$\varphi(x) \ge \min_{x\in D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}} \varphi(x). \tag{23}$$

З (21)-(23), (18) та (19) маємо: $\forall x \in D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}$

$$f^0(x) \ge \xi_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r} + \varphi(y) - (p(y), y) + \sum_{i=1}^{k} p_{j_i}(y) x_i . \tag{24}$$

Отже, права частина формули (24) може виступати оцінкою $\xi\left(D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}\right)$ (формула (5)), що і треба було довести.

Теорема 2. Якщо при виконанні умов теореми 1 функція $\varphi(x)$ – диференційована на множині X, то

$$\xi\left(D_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r}\right) = \xi_{i_1 \dots i_r}^{\tau_1 \dots \tau_r} + \varphi(y) - (\nabla\varphi(y), y) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}} g_i , \tag{25}$$

де $\nabla\varphi$ – градієнт функції $\varphi(x)$, точка $y \in \operatorname{int} X$ – довільна, а координати градієнта, що обчислені в y, задовольняють нерівності

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_1}} \ge \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_2}} \ge \dots \ge \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_k}} . \tag{26}$$

Доведення. Теорема 2 є наслідком теореми 1, коли $p(y) = \nabla\varphi(y)$.

Розглянемо можливість одержання оцінки, коли $\varphi(x)$ у представленні цільової функції (4) є сильно опуклою функцією.

Як відомо [19], функцію $\varphi(x)$, яка задана на деякий множині X, називають сильно опуклою, якщо існує стала $\rho > 0$ така, що $\forall x, y \in X$ таких, що $[x, y] \subset X$, і $\forall \alpha \in [0;1]$ виконується нерівність

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y) - \alpha(1-\alpha)\rho\|x-y\|^2,$$

при цьому ρ називають параметром сильної опуклості. Нехай $E_{n\nu}(G) \subset X$. Позначимо w – точку, існування та єдність якої показані в [20], яка є мінімаллю сильно опуклої функції $\varphi(x)$ на множині X:

$$w = (w_1, ..., w_k) = \arg\min_{x \in X} \varphi(x). \tag{27}$$

Теорема 3. Якщо функція $\varphi(x)$ в (4) сильно опукла з параметром $\rho > 0$ на опуклій замкненій множині $X \subset R^k$; $E_{n\nu}(G) \subset X$, то оцінкою $\xi\left(D_{i_1 i_2 ... i_r}^{\tau_1 \tau_2 ... \tau_r}\right)$ множини $D_{i_1 ... i_r}^{\tau_1 ... \tau_r}$ в МГМ для задачі (1)-(4) може бути величина

$$\xi\left(D_{i_1 ... i_r}^{\tau_1 ... \tau_r}\right) = \xi_{i_1 ... i_r}^{\tau_1 ... \tau_r} + \varphi(w) + \rho \sum_{i=1}^{k} g_i^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} w^2 - 2\rho \sum_{i=1}^{k} w_{j_i} g_i, \tag{28}$$

де $\xi_{i_1 ... i_r}^{\tau_1 ... \tau_r}$ обчислюється як і в теоремах 1, 2, точка w означається формулою (27), для елементів G виконується умова (8), переставлення $(j_1, ..., j_k) \in E_k(J_k)$ визначається умовою

$$w_{j_1} \le w_{j_2} \le ... \le w_{j_k}. \tag{29}$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 1 справедливі співвідношення (17)-(19).

За лемою 3.44 з [4] при $\eta = k$, $E = E_{k\nu}(G)$ маємо

$$\min_{x \in E_{k\nu}(G)} \varphi(x) \ge \varphi(w) + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} w^2 - 2\rho \max_{x \in E_{k\nu}(G)} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i, \tag{30}$$

де

$$\left|g_{\delta_1}\right| \le ... \le \left|g_{\delta_\eta}\right|.$$

Очевидно, що при $\eta = k$

$$\sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 = \sum_{i=1}^{k} g_i^2, \tag{31}$$

Максимум в (30) знайдемо за теоремою 3.1 з [4] при $\eta = k$, $n = \nu$:

$$\max_{x \in E_{k\nu}(G)} \sum_{i=1}^{k} w_i x_i = \sum_{i=1}^{k} w_{j_i} g_i, \tag{32}$$

де в правій частині координати точки w у представленні (27) упорядковані за (29), а елементи $G = \{g_1, ..., g_k\}$ задовольняють нерівність (8).

За лемою 2 з використанням справедливих нерівностей (22) та (23) з (30)-(32), (18) та (19) маємо $\forall x \in D_{i_1 ... i_r}^{\tau_1 ... \tau_r}$

$$f^0(x) \ge \xi_{i_1 ... i_r}^{\tau_1 ... \tau_r} + \varphi(w) + \rho \sum_{i=1}^{k} g_i + \rho \sum_{i=1}^{k} w^2 - 2\rho \sum_{i=1}^{k} w_{j_i} g_i, \tag{33}$$

отже за (17) права частина формули (33) може слугувати оцінкою $\xi\left(D_{i_1 ... i_r}^{\tau_1 ... \tau_r}\right)$ в МГМ для задачі (1)-(4) (формула (28)), що і треба було довести.

Розглянемо можливість одержання оцінки для випадку, коли в (4) $\varphi(x)$ – диференційовна сильно опукла функція.

Теорема 4. Якщо в (4) функція $\varphi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E_{n\nu}(G)\subset X$, то оцінкою $\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)$ множини $D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}$ в МГМ для задачі (1)-(4) може виступати величина:

$$\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)=\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\varphi(y)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}y_i+\rho\sum_{i=1}^{k}y_i^2+\rho\sum_{i=1}^{k}g_i^2+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}}-2\rho y_{j_i}\right)g_i, \quad (34)$$

де точка $y\in X$ – довільна; елементи мультимножини $G=\{g_1,\ldots,g_k\}$ – задовольняють умову (8), а переставлення $(j_1,\ldots,j_k)\in E_k(J_k)$ задовольняє умові

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_1}}-2\rho\gamma_{j_1}\ge\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_2}}-2\rho\gamma_{j_2}\ge\ldots\ge\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_k}}-2\rho\gamma_{j_k}, \quad (35)$$

а величина $\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}$ обчислюється як в теоремах 1, 2.

Доведення. Як і при доведенні теореми 1 справедливі співвідношення (17)-(19).

За лемою 3.48 з [4] при $\eta=k$, $E=E_{k\nu}(G)$ маємо $\forall y\in X$

$$\min_{x\in E}\varphi(x)\ge\varphi(y)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}y_i+\rho\sum_{i=1}^{k}y_i^2+\rho\sum_{i=1}^{k}g_{\delta_i}^2+\min_{x\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}-2\rho y_i\right)x_i, \quad (36)$$

де $\left|g_{\delta_1}\right|\le\ldots\le\left|g_{\delta_\eta}\right|$. Очевидно, що при $\eta=k$ виконується рівність (31). Мінімум у правій частині (36) знайдемо за теоремою 3.1 з [4] при $\eta=k$, $n=\nu$

$$\min_{x\in E}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}-2\rho y_i\right)x_i=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}}-2\rho y_{j_i}\right)g_i, \quad (37)$$

де переставлення $(j_1,\ldots,j_k)\in E_k(J_k)$ задовольняє умові (35), а числа $g_i\ \forall i\in J_k$ – умові (8).

За лемою 2 з використанням справедливих нерівностей (22), (23) з (36), (37), (31), (18) та (19) маємо $\forall x\in D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}$

$$f^0(x)\ge\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\varphi(y)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}y_i+\rho\sum_{i=1}^{k}y_i^2+\rho\sum_{i=1}^{k}g_i^2+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}}-2\rho y_{j_i}\right)g_i. \quad (38)$$

Отже, права частина (38) може виступати оцінкою $\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)$ в МГМ задачі (1)-(4) (формула (34)), що і треба було довести.

Коли видається доцільним і якщо можна знайти

$$g^*=\arg\min_{x\in E_{k\nu}}\|x-c\|^2,\ \ c\in R^k, \quad (39)$$

то оцінки з теорем 3, 4 можна посилити.

У [4, с.137-138] показано, як розв’язати задачу (39) на множині поліпереставлень $E(G,H)$, яка при $s=1$ збігається з $E_{k\nu}(G)$, звівши її до розв’язування задачі вибору [21]. Як відомо з [22], останнє може бути здійснено поліноміальним алгоритмом, трудомісткість якого $O(k^3)$.

Теорема 5. Якщо в (4) функція $\varphi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E_{n\nu}(G)\subset X$, то оцінкою $\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)$ множини $D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}$ в МГМ для задачі (1)-(4) може виступати величина:

$$\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)=\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\varphi(y)+\rho\left\|g^*-w\right\|^2, \tag{40}$$

де точка w визначається умовою (27), а g^* – співвідношенням (39), у якому $c\equiv w$, величина $\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}$ обчислюється, як в теоремах 1, 2; точка $y\in X$ – довільна.

Доведення. Доведення проводиться за схемою, за якою доведено теореми 1, 3, 4, де за оцінку мінімуму $\varphi(x)$ на множині $E_{k\nu}(G)$ береться його оцінка $\forall y\in X$ при $E=E_{k\nu}(G)$ з леми 3.52 з [4]:

$$\min_{x\in E_{k\nu}(G)}\varphi(x)\geq\varphi(y)+\rho\left\|g^*-w\right\|^2,$$

де g^* – з (39) при $c=w$, а w – з (27).

У випадку диференційовності сильно опуклої функції $\varphi(x)$ маємо оцінку, що визначається наступною теоремою.

Теорема 6. Якщо в (4) функція $\varphi(x)$ – сильно опукла з параметром $\rho>0$ і диференційовна на опуклій замкненій множині $X\subset R^k$, $E_{k\nu}(G)\subset X$, то оцінкою $\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)$ множини $D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}$ в МГМ для задачі (1)-(4) може виступати величина:

$$\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)=\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\varphi(y)-\frac{1}{4\rho}\left\|\nabla\varphi(y)\right\|^2+\rho\left\|g^*-c\right\|^2, \tag{41}$$

де величина $\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}$ обчислюється як у теоремах 1, 2; $y\in X$ – довільна точка; g^* визначається умовою (39) при

$$c=y-\frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(y). \tag{42}$$

Доведення. Доведення відбувається за схемою доведення теорем 1, 3, 4, 5, де за оцінку мінімуму $\varphi(x)$ на множині $E_{k\nu}(G)$ береться його оцінка $\forall y\in Y$ при $E=E_{k\nu}(G)$ з леми 3.55 [4]:

$$\min_{x\in E_{k\nu}(G)}\varphi(x)\geq\varphi(x)-\frac{1}{4\rho}\left\|\nabla\varphi(y)\right\|^2+\rho\left\|g^*-c\right\|^2,$$

де g^* береться з (39) при c за (42).

Зауваження. Оскільки при оцінюванні множини D в МГМ ефективність оцінки $\xi(D)$ з (9) підвищується при збільшенні $\xi(D)$ (в задачах мінімізації), то оцінки теорем 1 (формула (15)), 2 (формула (25)), 4 (формула (34)), 5 формула (40)), 6 (формула (41)) можна покращити, використовуючи довільність точки $y\in X$ у правій частині названих формул. Для цього можна взяти максимум по $y\in X$ правих частин названих оцінок. За множину X, зокрема, можна взяти переставний многогранник $\prod_{k\nu}(G)$ [4].

Отримаємо такі оцінки:

– з формули (15):

$$\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)=\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\max_{y\in X}\left[\varphi(x)-\left(p\left((y),y\right)\right)+\sum_{i=1}^{k}p_{j_i}(y)g_i\right];$$

– з формули (25):

$$\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)=\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\max_{y\in X}\left[\varphi(y)-\left(\nabla\varphi(y),y\right)+\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}}g_i\right];$$

– з формули (34):

$$\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)=\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\rho\sum_{i=1}^{k}g_i^2+\max_{y\in X}\left[\varphi(y)-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}y_i+\rho\sum_{i=1}^{k}y_i^2+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_{j_i}}-2\rho y_{j_i}\right)g_i\right];$$

– з формули (40):

$$\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)=\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\rho\left\|g^*-w\right\|^2+\max_{y\in X}\varphi(y);$$

– з формули (41):

$$\xi\left(D_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}\right)=\xi_{i_1\ldots i_r}^{\tau_1\ldots\tau_r}+\rho\left\|g^*-c\right\|^2+\max_{y\in X}\left[\varphi(y)-\frac{1}{4\rho}\left\|\nabla\varphi(y)\right\|^2\right].$$

ВИСНОВКИ

Результати, викладені в статті, дають можливість оцінити підмножини допустимих розв'язків в МГМ для задачі (1)-(4), де нелінійна складова $\varphi(x)$ у цільовій функції $f^0(x)$ – опукла чи сильно опукла функція на опуклій множині *X,* що містить множину переставлень $E_{k\nu}(G)$ з (3). Далі доцільним вбачається розглянути можливість оцінювання множин в МГМ для задачі (1)-(4), коли $\varphi(x)$ не є опуклою функцією.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко. – К. : Наук. думка, 1988. – 472 с.
2. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 288 с.
3. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: Проблемы, методы, решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К. : Наук. думка, 2003. – 263 с.
4. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К. : ІСДО, 1993. – 188 с.
5. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець, Є.М. Ємець ; Полт. ун-т споживчої кооперації Укр. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
6. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : Учеб. пособие / О.А. Емец. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.
7. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування / О.О. Ємець, О.В. Роскладка ; Полт. ун-т споживчої кооперації Укр. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
8. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / О.О. Ємець, Л.М. Колєчкіна ; Полт. ун-т споживчої кооперації Укр. – К. : Наук. думка, 2005. – 117 с.
9. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О.А. Емец, Т.Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 160 с.
10. Емец О. А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ / О.А. Емец, Т.А. Парфенова // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – №6. – С. 106-112.

11. Ємець О. О. Оцінювання допустимих множин розв’язків комбінаторної транспортної задачі на переставленнях, що розв’язується методом гілок та меж / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2010 – №1. – С. 21-28.
12. Ємець О. О. Наближений метод для розв’язування комбінаторних транспортних задач / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. – С. 39-41.
13. Ємець О. Про властивості деяких задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях та методи їх розв’язування / О. Ємець, Н. Романова, О. Роскладка // Вісник Львів.ун.-ту. Сер. Приклад. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 5. – С. 13-15.
14. Ємець О. О. Оптимізація на вершинно розташованих евклідових комбінаторних множинах / О.О. Емец, Н.Г. Романова, Т.В. Чілікіна // Математичне моделювання. – 2003. – №2 (10). – С. 39-41.
15. Ємець О. О. Комбінований метод розв’язування лінійних комбінаторних задач оптимізації на вершинно розташованих евклідових комбінаторних множинах / О.О. Ємець, Н.Г. Романова // Динамические системы (меж вед. науч. сб.). – 2004. – Вып. 17. – С. 166-170.
16. Ермольев Ю. М. Математические методы исследования операций : Учеб. пособие для вузов / Ю.М. Ермольев, И.И. Ляшко, В.И. Тюптя, В.С. Михалевич. – К. : Вища шк., Головное изд-во, 1979. – 312 с.
17. Ляшенко И. Н. Линейное и нелинейное программирование / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З Шор. − К. : Вища школа, 1975. – 372 с.
18. Чілікіна Т. В. Оцінки в методі гілок та меж для лінійної умовної задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях / Т.В. Чілікіна, О.О. Ємець, Є.М. Ємець, Т.О. Парфьонова // Інформатика та системні науки (ІСН-2011) : Матеріали ІІ Всеукраїн. наук.-прак. конф. (17-19 березня 2011, Полтава). – Полтава : РВВ ПУЕТ. − С. 328-331.
19. Карманов В. Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М. : Наука, 1980. – 256 с.
20. Сухарев А. Г. Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
21. Юдин Д. П. Задачи и методы нелинейного программирования / Д.П. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М. : Наука, 1964. – 736 с.
22. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир, 1985. – 512 с.

REFERENCES

1. Sergienko, I.V. (1998), *Matematicheskie modeli i metodyi resheniya zadach diskretnoy optimizatsii* [Mathematical models and methods for solving problems of discrete optimization], Naukova dumka, Kiev.
2. Sergienko, I.V. and Kaspshitskaya, M.F. (1981), *Modeli i metodyi resheniya na EVM kombinatornyih zadach optimizatsii* [Models and methods for solving combinatorial optimization problems of computer], Naukova dumka, Kiev.
3. Sergienko, I.V. and Shilo, V.P. (2003), *Zadachi diskretnoy optimizatsii: Problemyi, metodyi, resheniya, issledovaniya* [Discrete optimization problem: problem, solving methods, research], Naukova dumka, Kiev.
4. Stoyan, Y.G. and Emets. O.A. (1993), *Teoriya i metody evklidovoyi kombinatornoyi optymizatsiy*i [Theory and methods of euclidean combinatorics optimization], Istitute of system researches of education, Kiev.
5. Stoyan, Y.G., Emets, O.O. and Emets, E.M. (2005), *Optymizatsiya na polirozmishchennyakh: teoriya ta metody* [Optimization on set of polyarrangmnets: theory and methods], RVTs PUSKU, Poltava.
6. Emets, O.A. (1992), *Evklidovyi kombinatornyie mnozhestva i optimizatsiya na nih. Novoe v matematicheskom programmirovanii: Ucheb. posobie* [Euclidean combinatorics great numbers and optimization on them. New in the mathematical programming: Studies. Manual], UMK VO, Kiev.
7. Yemets, O.O. and Roskladka, O.V. (2006), *Zadachi optymizatsiyi na polikombinatornykh mnozhynakh: vlastyvosti ta rozv"yazuvannya* [Tasks optimization on polycombinatorics sets: properties and of solving], RVTs PUSKU, Poltava, Ukraine.
8. Yemets, O.O. and Kolechkina, L.M. (2005), *Zadachi kombinatornoyi optymizatsiyi z drobovo-liniynymy tsil'ovymy funktsiyamy* [Combinatorial optimization problems with linear-fractional functions], Naukova dumka, Kyiv.
9. Emets, O.A. and Barbolina, T.N. (2008), *Kombinatornaya optimizatsiya na razmescheniyah* [Combinatorics optimization on a set of arrangements], Naukova dumka, Kiev.
10. Yemets, O.O. and Parfionova, T.O. (2010), “Transport problem on permutations: properties of the estimates in the method of branches and borders”, *Kibernetika i sistemnyiy analiz,* no. 6, pp. 106-112.
11. Yemets, O.O. and Parfionova, T.O. (2010), “Evaluation of the tolerable solution set of combinatorial transportation problem on permutations, which is solved by the method of branches and”, *Naukovi visti NUU «KPU»,* no. 1, pp. 21-28.
12. Yemets, O.O. and Parfionova, T.O (2006), “An approximate method for solving the transport problems of combinatorial”, *Radioelektronuka i informatika,* pp. 39-41.

13. Yemets, O., Romanova, N. and Roskladka, O. (2002), “On properties of some problems in Euclidean combinatorial optimization on permutations and their solutions”, *Visnyk L'viv.un.-tu. Ser. Pryklad. matematyka ta informatyka*, issue 5, pp. 13-15.
14. Yemets, O.O., Romanova, N.G. and Chilikina, N.V. (2003), “Optimization located on top of Euclidean combinatorial sets”, *Matematychne modelyuvannya*, no. 2(10), pp. 39-41.
15. Yemets, O.O. and Romanova, N.G. (2004), “Combined method for solving linear combinatorial optimization problems are located on the top of Euclidean combinatorial sets”, *Dinamicheskie sistemy*, issue 17, pp. 166-170.
16. Yermolev, U.M., Lyashko, I.I., Tyuptya, V.I. and Mikhalevich, V.C. (1979), *Matematicheskie metodyi issledovaniya operatsiy : Ucheb. posobie dlya vuzov* [Mathematical Methods of Operational Research: Textbook for high schools], Vyshcha shkola, Kiev.
17. Liashenko, I.I., Karagodova, E.A., Chernikova, N.V. and Chor, N.Z. (1975), *Lineynoe i nelineynoe programmirovanie* [Linear and Nonlinear Programming], Vyshcha shkola, Kiev.
18. Chilikina, T.V., Yemets, O.O., Yemets, E.M. and Parfionova, T.O. (2011), “Estimates of in the branch and bound method for the linear of conditional of combinatorial optimization problem on permutations”, *Informatyka ta systemni nauky (ISN-2011): materialy Vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii* [Science and Information System (CCI 2011): Proceedings of the Second All-Ukrainian. scientific-prac. conf.], Poltava, March 17-19, 2011, pp. 323-331.
19. Karmanov, V.G. (1980), *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical Programming], Nauka, Moskow.
20. Sukharev, A.G., Timokhov, A.V. and Fedorov, V.V. (1986), *Kurs metodov optimizatsii* [The course of of optimization techniques], Nauka, Moskow.
21. Yudin, D.P. and Holstein, E.G. (1964), *Zadachi i metodyi nelineynogo programmirovaniya* [Problems and methods of nonlinear programming], Nauka, Moskow.
22. Papadimitriu, H. and Statyglits, K. (1985), *Kombinatornaya optimizatsiya. Algoritmyi i slozhnost* [Combinatorial optimization. Algorithms and Complexity], Mir, Moskow.

УДК 539.375

РІВНОВАГА ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ТРІЩИН, ЗАЛІКОВАНИХ БІЛЯ ВЕРШИН

Шацький І. П., д. ф.-м. н.

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна

ipshatsky@gmail.com

Розвинуто модель частково залікованих тріщин у твердому тілі. В області відновлення суцільності поверхнева енергія вважається інакшою, ніж у непошкодженому середовищі. Пружні властивості матеріалу не змінюються. Визначено ефективність лікування пошкодженої пластини з періодичними системами колінеарних або паралельних наскрізних тріщин для випадків нормального відриву поперечного зсуву та згину. Враховується ефект закриття тріщини у зігнутій пластині. Досліджено взаємодію дефектів, залікованих поблизу вершин.

Ключові слова: пластина, частково залікована тріщина, періодична задача, гранична рівновага.

РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН, ЗАЛЕЧЕННЫХ ВОЗЛЕ ВЕРШИН

Шацкий И. П., д. ф.-м. н.

Ивано-Франковский отдел Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Микитинецкая, 3, г. Ивано-Франковск, 76002, Украина

ipshatsky@gmail.com

Развита модель частично залеченных трещин в твердом теле. В области восстановления сплошности поверхностная энергия отличается от таковой для неповрежденной среды. Упругие свойства материала не