10. Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2011). Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets. Poltava: PUET, Ukraine.
11. Sergienko, I. V., Iemets, O. O. & Yemets, O. O. (2013). Optimization problems with interval uncertainty: Branch and bound method. Cybernetics and Systems Analysis, No. 5, pp. 673-683.
12. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2014). About optimization problems with probabilistic uncertainty. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, No. 11, pp. 40-45.
13. Barbolina, T. M. (2016). About approach to optimization with probabilistic uncertainty using ordering of random variables. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences, No. 1, pp. 11-20.
14. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Properties of the linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under probabilistic uncertainty. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 52, No. 2, pp. 285-295.
15. Iemet, O. O. & Barbolina, T. M. (2014). Construction and research of mathematical model of director's task with stochastic parameters. Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seria Prykladna matematyka. Informatyka, No 18(311), pp. 3-11.
16. Barbolina, T. M. (2015). Properties of linear unconstrained optimization problems on arrangements. Zbirnik naukovikh prats' vikladachiv, aspirantiv, magistrantiv i studentiv fiziko-matematichnogo fakul'tetu, Poltava: Astraya, pp. 12-14.

УДК 519.8

СИМПЛЕКСНА ФОРМА МНОГОГРАННИКА СПОЛУЧЕНЬ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ПОВТОРЕННЯМИ

Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, Ємець Ол-ра О., к. ф.-м. н., доцент, Ванжа С. В.

Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Коваля, 3, Полтава, Україна

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

У статті наводиться правило утворення симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями. Для симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями доведено ряд тверджень. На прикладі проілюстровано формування симплексної форми многогранника сполучень з необмеженими повтореннями.

Ключові слова: многогранник сполучень, симплексна форма многогранника, сполучення з необмеженими повтореннями.

СИМПЛЕКСНАЯ ФОРМА МНОГОГРАННИКА СОЧЕТАНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПОВТОРЕНИЯМИ

Емец О. А., д. ф.-м. н., профессор, Емец А. О., к. ф.-м. н., доцент, Ванжа С. В.

Полтавский университет экономики и торговли,
ул. Коваля, 3, Полтава, Украина

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

В статье приводится правило образования симплексной формы многогранника сочетаний с неограниченными повторениями. Для симплексной формы многогранника сочетаний с неограниченными повторениями доказан ряд утверждений. На примере проиллюстрировано формирование симплексной формы многогранника сообщений с неограниченными повторениями.

Ключевые слова: многогранник сочетаний, симплексная форма многогранника, сочетания с неограниченными повторениями.

SIMPLEX FORM OF POLYHEDRON OF COMBINATIONS WITH UNLIMITED REPETITIONS

Iemets O. O., D. Sc. in Physics and Maths, Professor, Yemets` O. O., Ph. D., Vanzha S. V.

Poltava University of Economics and Trade,
Koval Street, 3, Poltava, Ukraine

yemetsli@ukr.net, yemets2008@ukr.net

Within combinatorial optimization it is important to study combinatorial sets and their polyhedrons as the basis for the development of combinatorial optimization methods. For a group of such methods one of the stages is the linear relaxation using combinatorial polyhedrons.

Karmarkar`s polynomial algorithm should be used for solving received problems, but for this purpose feasible polyhedron must have a so-called simplex form prescribed by Karmarkar`s algorithm at the input.

Simplex forms of permutable polyhedrons with reducible and irreducible systems of constraints are known from the literature. In this paper, the simplex form of the convex hull of Euclidean combinatorial set of combinations with unlimited repetitions is derived.

The paper consists of four parts.

The statement of problem, the definition of combinations with unlimited repetitions (i.e. from 0 to k) every element as ordered k-samples, elements of each are arranged by not descending order are given in the first part.

The definition of the set of the combination with unlimited repetitions as the set of all these k-samples and the polyhedron of combinations with unlimited repetitions as the convex hull of the set of the combination with unlimited repetitions are given. The description of this polyhedron in the form of the system of linear inequalities is given.

The second part is devoted to the transformation algorithm of feasible area of linear programming problem to polyhedron having the simplex form. The algorithm has five steps. In the first step constraints of linear programming problem are reduced to the so-called canonical form. In the second step the inequality that defines the half-space containing all admissible points of the linear programming problem is recorded. In the third step the system of equations in the canonical form is reduced to a homogeneous system. In the fourth step, the bound of the introduced half-space, by introducing new variables, is transformed into a hyperplane that cuts the unit on coordinate axes. This completes the construction of simplex forms of polyhedron by introducing additional variables that provide the satisfaction of the point having the same coordinates (the center) of simplex obtained conditions of the problem.

In the third part this algorithm is applied to the polyhedron of combinations with unlimited repetitions.

The fourth part of the article provides the illustrative example.

Key words: polyhedron of combinations, simplex form of polyhedron, combinations with unlimited repetitions.

ВСТУП

Актуальним напрямком розвитку теорії оптимізації є комбінаторна оптимізація (див., зокрема, [1-17]). Дослідження властивостей комбінаторних множин та їх многогранників є підґрунтям розробки методів комбінаторної оптимізації. Часто одним з етапів таких методів є лінійна релаксація з використанням комбінаторних многогранників. Якщо при цьому використовувати алгоритм Кармаркара (АК), то многогранник треба мати у формі, що дозволяє застосовувати АК – у так звані симплексній формі. У працях [18-19] досліджувалась симплексна форма переставного многогранника. У цій роботі розглядається симплексна форма опуклої оболонки евклідової комбінаторної множини сполучень з необмеженими повтореннями, яка введена в [2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо мультимножину $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ з основою $S(G)=\{e_1,...,e_n\}$, первинною специфікацією $[G]=(k^n)$, яка означає, що кратність кожного елемента e_i основи в G є k $\forall i\in J_n=\{1,2,...,n\}$. Тоді кожна упорядкована k-вибірка $(x_1,...,x_k)$, де

$$x_1\le x_2\le\ldots\le x_k,$$

називається [2] евклідовим сполученням з необмеженими (тобто від 0 аж до k) повтореннями (кожного елемента основи). Множина всіх таких сполучень називається [2] евклідовою множиною сполучень з необмеженими повтореннями, позначається $\bar{S}_n^k(G)$, а її опукла оболонка $conv\,\bar{S}_n^k(G)$ позначається $\bar{Q}_n^k(G)$ і називається многогранником сполучень з необмеженими повтореннями.

Як відомо [2], вершинами цього многогранника є точки $(e_1, ..., e_1)$, $(e_1, ..., e_1, e_n)$, …, $(e_1, ..., e_1, e_n, ..., e_n)$, …, $(e_n, ..., e_n)$ і тільки вони, а многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ описується системою

$$e_1 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k \le e_n$$

та є симплексом з названими вершинами.

Розглянемо, як многогранник $\bar{Q}_n^k(G)$ представляється в симплексній формі.

Для цього спершу розглянемо необхідні далі перетворення допустимої області ЗЛП в симплексну форму (див., наприклад, [20, 21]).

2. АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ (АП) ДОПУСТИМИХ УМОВ ЗЛП В СИМПЛЕКСНУ ФОРМУ

Нехай

$$cx \to \max; \tag{1}$$

$$Ax \le b; \tag{2}$$

$$x \ge 0, \tag{3}$$

$c = (c_1, ..., c_k)$, $x = (x_1, ..., x_k)^T$, $A = (a_{ij})_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$, $b = (b_1, ..., b_r)^T$.

Крок 1. Систему (2), (3) зведемо до так званого канонічного вигляду [22, с. 17]

$$Ax + y = b; \quad x, y \ge 0, \tag{4}$$

де $y = (y_1, ..., y_r)^T$.

Крок 2. Записується додаткове обмеження вигляду

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i \le U, \tag{5}$$

тут U таке велике дійсне додатне число, що всі точки системи (2), (3) задовольняють (5). Якщо $u \ge 0$, то (5) еквівалентно рівності:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i + u = U. \tag{6}$$

Крок 3. Зводимо систему (4) до однорідної, що еквівалента системі (4). Це можна зробити, помноживши праву частину рівнянь на одиницю у вигляді такого виразу:

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i + u}{U}.$$

Рівняння в (4) набудуть вигляду

$$A^x x + A^y y - bu = \bar{0}, \tag{7}$$

де матриця $A^x = \left(a_{ij}^x\right)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$ з елементами $a_{ij}^x = a_{ij} - \dfrac{b_i}{U}$ $\forall j \in J_k$, $\forall i \in J_r$; матриця $A^y = \left(a_{ij}^y\right)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$ з елементами $a_{ii}^y = 1 - \dfrac{b_i}{U}$ $\forall i \in J_r$: $a_{ij}^y = -\dfrac{b_i}{U}$, $j \neq i$ $\forall i \in J_r$, $\forall j \in J_k$; $\overline{0} = (0,...,0)^T \in R^r$ – нульовий вектор стовбець з r елементами.

Крок 4. Перетворюємо умову (6) в гіперплощину, що відсікає на координатних осях одиниці, вводячи нові змінні

$$X_j = \frac{x_j}{U}; \quad Y_i = \frac{y_i}{U}; \quad \frac{u}{U} = V \quad \forall i \in J_r, \quad \forall j \in J_k. \tag{8}$$

Умови задачі разом з перетвореною умовою (6) після заміни (7) визначають симплекс з вершиною в початку координат, а основа описується гіперплощиною, що з осями координат перетинається в одиницях.

З умов (1), (6), (7), використовуючи (8), маємо

$$UcX \to \max \tag{9}$$

за умов

$$A^X X + A^Y Y - bV = \overline{0}, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{i=1}^{r} Y_i + V = 1, \tag{11}$$

$$X = (X_1, ..., X_k)^T \geq 0; \quad Y = (Y_1, ..., Y_r)^T \geq 0; \quad V \geq 0, \tag{12}$$

де

$$A^X = (a_{ij}^X)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}; \quad a_{ij}^X = a_{ij}U - b_j \quad \forall i \in J_r, \quad \forall j \in J_k;$$

$$A^Y = (a_{ij}^Y)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}; \quad a_{ii}^Y = U - b_i \quad \forall i \in J_r; \quad a_{ij}^Y = -b_i \quad \forall i \neq j; \quad i \in J_r; \quad j \in J_k.$$

Крок 5. Здійснюються перетворення задачі, що задовольняють вимогу: точка, що є центром (барі-центром) симплекса $\left(\dfrac{1}{N}, \dfrac{1}{N}, \dots, \dfrac{1}{N}\right) \in R^N$, задовольняє умовам задачі; тут N – вимірність простору змінних задачі, що визначається при цьому перетворенні.

Для цього в кожному рівнянні (10) (нехай його номер i) віднімемо в лівій частині невід'ємну змінну Z_i, $i \in J_r$, помноживши її на коефіцієнт, який дорівнює алгебраїчній сумі всіх коефіцієнтів лівої частини цього рівняння. Крім цього, щоб забезпечити змінній Z_i нульове значення при максимізації, цільова функція модифікується доданком $-MZ_i$, який відіграє штрафну місію за рахунок того, що $M > 0$ вибирається достатньо великим. Це робиться для всіх рівнянь ($\forall i \in J_r$). У ліву частину (11) додається $\sum_{i=1}^{r} Z_i$.

Задача (9)-(12) набуває вигляду:

$$UcX - M\sum_{i=1}^{r} Z_i \to \max, \tag{13}$$

$$A^X X + A^Y Y - A^Z Z - bV = \overline{0}; \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{i=1}^{r} Y_i + \sum_{i=1}^{r} Z_i + V = 1; \tag{15}$$

$$X \ge 0; \quad Y \ge 0; \quad Z = \left(Z_1, ..., Z_r\right)^T \ge 0; \quad V \ge 0, \tag{16}$$

де в (14) A^X; A^Y матриці описані раніше, а $A^Z = \left(a_{ij}^Z\right)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$, $a_{ii}^Z = U\sum_{j=1}^{k} a_{ij} - kb_i + U - b_i - (k-1)b_i - b_i = U\sum_{j=1}^{k} a_{ij} + U - (2k+1)b_i \quad \forall i \in J_r$; $a_{ij}^Z = 0 \quad \forall i \ne j$, $i \in J_r$; $j \in J_k$.

Легко бачити, що для системи (14)-(16) точка $\left(X^*, Y^*, Z^*, V^*\right) = \left(\frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N}\right) \in R^N$ є допустимою, а вимірність простору $N = k + 2r + 1$, якщо $X_i^* = Y_j^* = Z_i^* = V = \frac{1}{N} \quad \forall i \in J_r$; $\forall j \in J_k$.

3. ПЕРЕТВОРЕННЯ В СИМПЛЕКСНУ ФОРМУ МНОГОГРАННИКА СПОЛУЧЕНЬ З НЕОБМЕЖЕНИМИ ПОВТОРЕННЯМИ

Розглянемо задачу

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \max$$

за умов, $x = \left(x_1, ..., x_k\right) \in \bar{Q}_n^k(G)$, тобто:

$$e_1 \le x_1 \le \ldots \le x_j \le \ldots \le x_k \le e_n .$$

Нехай $e_1 > 0$. Обмеження многогранника $\bar{Q}_n^k(G)$ можна записати так:

$$\begin{cases} -x_1 \le -e_1, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ \ldots \\ x_{j-1} - x_j \le 0, \\ \ldots \\ x_{k-1} - x_k \le 0, \\ x_k \le e_n. \end{cases} \tag{17}$$

Застосовуємо АП.

Крок 1. Зводимо (17) до канонічної форми, вводячи в рівняння змінні $y_{j-1,j} \quad \forall j \in J_{k+1}$:

$$-x_1 + y_{0,1} = -e_1, \tag{18}$$

$$x_{j-1} - x_j + y_{j-1,j} = 0 \quad \forall j \in J_k^2 = \{2, 3, ..., k\}, \tag{19}$$

$$x_k + y_{k,k+1} = e_n . \tag{20}$$

Крок 2. Записуємо додаткове обмеження:

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} \le U \tag{21}$$

у формі рівності

 ISSN 2518-1785 (Online), ISSN 2413-6549 (Print)

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u = U, \tag{22}$$

де $u \ge 0$.

Оцінимо змінну U. Додамо $\forall j \in J_k^2$ обмеження (19). Маємо:

$$x_1 - x_k + \sum_{j=2}^{k} y_{j-1,j} = 0,$$

або

$$\sum_{j=2}^{k} y_{j-1,j} = x_k - x_1 \le e_n - e_1; \tag{23}$$

з (18)

$$y_{0,1} = x_1 - e_1 \le e_n - e_1, \tag{24}$$

а з (20):

$$y_{k,k+1} = e_n - x_k \le e_n - e_1. \tag{25}$$

З (23)-(25) одержуємо:

$$\sum_{j=1}^{k} y_{j-1,j} \le 3\left(e_n - e_1\right). \tag{26}$$

Як відомо [3], у многограннику сполучень з необмеженими повтореннями є вершина $\left(e_n, ..., e_n\right) \in R^k$, і це найбільші можливі значення кожної з координат x, тобто $\forall x$ з цього многогранника

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \le k e_n. \tag{27}$$

З умов (21), (26), (27) маємо

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} \le \left(k+3\right) e_n - 3e_1. \tag{28}$$

Отже, доведене таке.

Твердження 1. Для многогранника сполучень з необмеженими повтореннями справедлива нерівність (21), де

$$U = \left(k+3\right) e_n - 3e_1. \tag{29}$$

Крок 3. Для зведення системи (18)-(20) до однорідної помножимо праві частини (18) та (20) на вираз

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} x_i + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u}{\left(k+3\right) e_n - 3e_1},$$

що, згідно з (22), (29), є одиницею. Одержимо

$$-x_1 + y_{0,1} = \frac{e_1}{3e_1 - \left(k+3\right) e_n} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u \right); \tag{30}$$

$$x_k + y_{k,k+1} = \frac{e_n}{(k+3)e_n - 3e_1}\left(\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} + u\right); \tag{31}$$

або після спрощення

$$\left[4e_1 - (k+3)e_n\right]x_1 + e_1\sum_{j=2}^{k} x_j + \left[(k+3)e_n - 2e_1\right]y_{0,1} + e_1\sum_{j=2}^{k+1} y_{j-1,j} + e_1 u = 0, \tag{32}$$

$$e_n\sum_{j=1}^{k-1} x_j + \left[3e_1 - (k+2)e_n\right]x_k + e_n\sum_{j=1}^{k} y_{j-1,j} + \left[3e_1 - (k+2)e_n\right]y_{k,k+1} + e_n u = 0. \tag{33}$$

Крок 4. Робимо заміну змінних згідно з (8). Маємо задачу

$$\left[(k+1)e_n - e_1\right]\sum_{j=1}^{k} c_j X_j \to \max,$$

що еквівалентно (1), за умов:

$$\left[4e_1 - (k+3)e_n\right]X_1 + e_1\sum_{j=2}^{k} X_j + \left[(k+3)e_n - 2e_1\right]Y_{0,1} + e_1\sum_{j=2}^{k+1} Y_{j-1,j} + e_1 V = 0; \tag{34}$$

$$X_{j-1} - X_j + Y_{j-1,j} = 0 \quad \forall j \in J_k^2; \tag{35}$$

$$e_n\sum_{j=1}^{k-1} X_j + \left[3e_1 - (k+2)e_n\right]X_k + e_n\sum_{j=1}^{k} Y_{j-1,j} + \left[3e_1 - (k+2)e_n\right]Y_{k,k+1} + e_n V = 0; \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{j=1}^{k+1} Y_{j-1,j} + V = 0. \tag{37}$$

Крок 5. У кожному з рівнянь (34)-(36) у лівій частині віднімемо власну невід'ємну змінну $W_{j-1,j}$ (з тими індексами, з якими входить у відповідне рівняння змінна $Y_{j-1,j}$), $\forall j \in J_k^2$ – в (35); $W_{0,1}$ в (34), $W_{k,k+1}$ – в (36)). Коефіцієнт при $W_{j-1,j}$ позначимо $\alpha_{j-1,j}$ $\forall j \in J_{k+1}^1 = \{1, 2, ..., k+1\}$. В (37) введемо змінну $W_{k+1,k+2}$ з коефіцієнтом $\alpha_{k+1,k+2}$.

Твердження 2. Коефіцієнт $\alpha_{j-1,j}$ $\forall j \in J_{k+1}^1$ обчислюється так:

$$\alpha_{0,1} = 4e_1 - (k+3)e_n + e_1(k-1) + \left[(k+3)e_n - 2e_1\right] + (k+1)e_1 + e_1 =$$

$$= e_1(4 + k - 2 + k + 1 + 1) = (2k+3)e_1;$$

$$\alpha_{j-1,j} = 1 - 1 + 1 = 1 \quad \forall j \in J_k^2;$$

$$\alpha_{k,k+1} = e_n(k-1) + 3e_1 - (k+2)e_n + e_n k + 3e_1 - (k+2)e_n + e_n =$$

$$= 6e_1 + e_n(k - 1 - k - 2 + k - k - 2 + 1) = 6e_1 - 4e_n.$$

$$\alpha_{k+1,k+2} = k + k + 1 + 1 = 2(k+1).$$

Після кроку 5 маємо задачу:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M\sum_{j=1}^{k+2} W_{j-1,j} \to \max$$

$$\left[2e_1 - (k+1)e_n\right]X_1 + e_1\sum_{j=2}^{k} X_j + (k+1)e_n Y_{0,1} + e_1\sum_{j=2}^{k+2} Y_{j-1,j} + e_1 V - (2k+3)e_1 W_{0,1} = 0, \tag{38}$$

$$X_{j-1} - X_j + Y_{j-1,j} - W_{j-1,j} = 0\,; \quad \forall j \in J_k^2\,, \tag{39}$$

$$e_n \sum_{j=1}^{k-1} X_j + \left(e_1 - ke_n\right) X_k + e_n \sum_{j=1}^{k} Y_{j-1,j} + \left(e_1 - ke_n\right) Y_{k,k+1} + e_n V - \left(6e_1 - 4e_n\right) W_{k,k+1} = 0\,, \tag{40}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{j=1}^{k+1} Y_{j-1,j} + V - 2\left(k+1\right) W_{k+1,k+2} = 1\,. \tag{41}$$

Зауважимо, що $r = k+1$, отже $N = k + 2r + 1 = k + 2k + 2 + 1 = 3\left(k+1\right)$.

4. ІЛЮСТРАТИВНИЙ ПРИКЛАД

Приклад. Нехай $G = \left\{1^4; 11^4\right\}$, $k = 4$. Розглянемо множину $\overline{S}_n^k\left(G\right)$ сполучень з необмеженими повтореннями.

Отже, $n = 2$; $S\left(G\right) = \left(e_1, e_2\right) = \left(1, 11\right)$.

Система для $conv\, \overline{S}_n^k\left(G\right) = \overline{Q}_n^k\left(G\right) = \overline{Q}_2^4\left(G\right)$, що має вигляд (17), така:

$$\begin{cases} -x_1 \le -1; \\ x_1 - x_2 \le 0; \\ x_2 - x_3 \le 0; \\ x_3 - x_4 \le 0; \\ x_4 \le 11. \end{cases} \tag{42}$$

Зводимо (42) до канонічної форми:

$$\begin{cases} -x_1 + y_{01} = -1; \\ x_1 - x_2 + y_{12} = 0; \\ x_2 - x_3 + y_{23} = 0; \\ x_3 - x_4 + y_{34} = 0; \\ x_4 + y_{45} = 11. \end{cases} \tag{43}$$

Записуємо додаткове обмеження вигляду (22):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{33} + y_{45} + u = U\,. \tag{44}$$

Оцінимо U. Як відомо $x_1 + \ldots + x_4 \le 4 \cdot 11 = 44$.

$$y_{01} = -1 + x_1 \le -1 + 11 = 10\,,\; y_{12} = x_2 - x_1 \le 11 - 1 = 10\,,$$

$$y_{23} = x_3 - x_2 \le 10\,,\; y_{34} = x_4 - x_3 \le 10\,,\; y_{45} = 11 - x_4 \le 10\,.$$

З іншого боку

$$y_{12} = x_2 - x_1\,,\; y_{23} = x_3 - x_2\,,\; y_{34} = x_4 - x_3\,,$$

додавши три останні рівняння маємо:

$$y_{12} + y_{23} + y_{34} = x_4 - x_1 \le e_n - e_1 = 10\,.$$

Отже, $\sum_{j=1}^{k+1} y_{j-1,j} \le 3\left(e_n - e_1\right) = 30$.

Тобто, $U = 44 + 30 = 74$, що дає і формула (29):

$$U = (k+3)e_n - 3e_1 = (4+3)\cdot 11 - 3\cdot 1 = 77 - 3 = 74\,.$$

Зведемо перше і останнє рівняння в (43) до однорідних, помноживши їх праві частини на $\frac{1}{74}\left(\sum_{j=1}^{4} x_j + \sum_{j=1}^{5} y_{j-1,j} + u\right)$:

$$-x_1 + y_{01} = -\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45} + u}{74};$$

$$x_4 + y_{45} = \frac{11}{74}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45} + u\right).$$

Або

$$\begin{cases} -73x_1 + (x_2 + x_3 + x_4) + 75y_{01} + (y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45}) + u = 0; \\ 11(x_1 + x_2 + x_3) - 63x_4 + 11(y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34}) - 63y_{45} + 11u = 0. \end{cases}$$

Якщо скористатися (32), (33),

$$(4 - 7\cdot 11)x_1 + 1\cdot(x_2 + x_3 + x_4) + (7\cdot 11 + 2\cdot 1)y_{0,1} + 1\cdot(y_{12} + y_{23} + y_{34} + y_{45}) + 1\cdot u = 0$$

$$11(x_1 + x_2 + x_3) + (3\cdot 1 - 6\cdot 11) + 11(y_{01} + y_{12} + y_{23} + y_{34}) + (3\cdot 1 - (4+2)\cdot 11) + 11u = 0\,,$$

тобто маємо ті ж результати.

ВИСНОВКИ

Одержано симплексну форму многогранника сполучень з необмеженими повтореннями. Як напрямок подальших досліджень доцільно дослідити її використання в задачах оптимізації на сполученнях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 288 с.
2. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
3. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
4. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: учеб. пособие. Киев: УМК ВО, 1992. 92 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489.
5. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М., Недобачій С. І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. Полтава: Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. 64 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488.
6. Емец О. А., Романова Н. Г. Оптимизация на полиперестановках. Киев: Наук. думка, 2010. 105 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
7. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними функціями. Київ: Наук. думка, 2005. 117 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
8. Ємець О. О., Роскладка О. В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв’язування: монографія. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. 129 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377.
9. Ємець О. О., Ємець Ол-ра О. Розв’язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія. Полтава: ПУЕТ, 2011. 239 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
10. Емец О. А., Черненко О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях: монография. Киев: Наук. думка, 2011. 154 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.
11. Ємець О. О., Черненко О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації: монографія. Полтава: ПУЕТ, 2011. 204 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354.

12. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення: монографія. Полтава: ПУЕТ, 2011. 174 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.
13. Емец О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Киев: Наук. думка, 2008. 159 с. URL: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/ 473.
14. Донець Г. П., Колєчкіна Л. М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях: монографія. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
15. Панишев А. В., Плечистый Д. Д. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. Житомир: ЖДТУ, 2006. 300 с.
16. Гуляницький Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. … д-ра техн. наук / Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Київ, 2005. 32 с.
17. Гребеннік І В. Математичні моделі і методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Автореф. дис. … д-ра техн. наук / Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Харків, 2006. 30 с.
18. Ємець О. О., Ємець Є. М., Ольховський Д. М. Оптимізація лінійної функції на переставленнях: перетворення переставного многогранника до вигляду, необхідного для використання в алгоритмі Кармаркара. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. 2010. № 2. С. 43–49.
19. Емец О. А., Леонова М. В. Симплексная форма общего перестановочного могогранника, заданного неприводимой системой. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 1. С. 68–79.
20. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Киев: Видавничий дім «Слово», 2003. 688 с.
21. Таха Х. А. Введение в исследование операций. Москва: Издат. дом «Вильямс», 2005. 912 с.
22. Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюптя В. И. Математические методы исследования операций. Киев: Вища шк., 1979. 312 с.

REFERENCES

1. Sergienko, I. V. & Kaspshitskaya, M.F. (1981). Models for Computer Solution of Combinatorial Optimization. Kyiv: Naukova Dumka.
2. Stoyan, Y. G. & Iemets, O. O. (1993). Theory and Methods of Euclidian Combinatorial Optimization. Kyiv: Inst. Syst. Doslidzh. Osvity. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
3. Stoyan, Yu. G., Iemets, O. O. & Yemets E. M. (2005). Optimization on Polypermutations: Theory and Methods. Poltava: RVTs PUSKU. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376.
4. Iemets, O. A. (1992). Euclidian Combinatorial Sets and Optimization on Them. New in Mathematical Programming (An Educational Book). Kiev: UMK VO. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/489.
5. Iemets, O. O., Kolechkina, L. M. & Nedobachii, S. I. (1999). Investigation of Domains of Euclidean Combinatorial Optimization Problems on Permutable Sets. Poltava: Yu. Kondratyuk Techn. Univ., ChPKP Legat. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488.
6. Iemets, O. A. & Romanova, N. G. (2010). Optimization on Polypermutations. Kyiv: Naukoba Dumka. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
7. Iemets, O. O. & Kolechkina, L. M. (2005). Combinatorial Optimization with Linear Fractional Functions. Kyiv: Naukova Dumka. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
8. Iemets, O. O. & Roskladka, O. V. (2005). Optimization Problems on Polyarrangements: Properties and Solution. Poltava: RVTs PUSKU. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/377.
9. Iemets, O. O. & Yemets', Ol. O. (2011). Solving Combinatorial Optimization Problems on Fuzzy Sets. Poltava: PUET. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
10. Yemets, O. A. & Chernenko, O. A. (2011). Optimization of Linear Fractional Functions on Arrangements. Kyiv: Naukova Dumka. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/467.
11. Iemets, O. O. & Chernenko, O. O. (2011). Models of Euclidean Combinatorial Optimization. Poltava: RVV PUET. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/354.
12. Iemets, O. O. & Parfyonova, T. O. (2011). Combinatorial Transportation Problems: Properties, Solutions, Generalizations. Poltava: RVV PUET. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/ 123456789/353.
13. Yemets, O. A. & Barnolina, T. N. (2008). Combinatorial Optimization on Arrangements. Kyiv: Naukova Dumka. Retrieved from http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
14. Donets, G. P. & Kolechkiva, L. M. (2011). Extremum Problems on Combinatorial Configurations. Poltava: RVV PUET.
15. Panishev, A. V. & Plechistyi, D. D. (2006). Optimization Models and Methods in a Traveling Salesman Problem. Zhitomir: ZhGTU.

16. Hulianytskyi, L. F. (2005). Development of models and approximate combinatorial optimization methods and their application in information technologies. (Extended abstract of Doctor thesis). V.M. Glushkov Inst. of Cybernetis, NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine (in Ukrainian).
17. Grebennik, I. V. (2006). Mathematical models of combinatorial optimization in geometrical design. (Extended abstract of Doctor thesis). A.M. Podgornyi Institute for Problems of Mechanical Engineering, Kharkiv, Ukraine (in Ukrainian).
18. Iemets, O. O., Yemets, Ye. M. & Olhovskiy, D. M. (2010). The optimization of linear function on permutations: transformation of permutable polyhedron to kind, necessary for the use in Karmarkar's algorithm. Nauk. Visti NTUU KPI, No. 2, pp. 43-49.
19. Iemets, O. A. & Leonova, M. V. (2014). Simplex shape of the general permutable polyhedron specified by irreducible system. J. Autom. Inform. Sci., No. 1, pp. 68-79.
20. Zaichenko, Yu. P. (2003). Operations Research. Kyiv: Slovo.
21. Taha, X. A. (2007). Operations Research: An Introduction. Moscow: Pearson Prentice Hall.
22. Ermoliev, Yu. M., Lyashko, I. I., Mikhalevich, V. S. & Tyuptya, V. I. (1979). Mathematical Methods of Operations Research. Kyiv: Vyshcha Sckola.

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ

[1]Кагадий Т. С., д. ф.-м. н., профессор, [2]Белова О. В., к. ф.-м. н., доцент,
[2]Щербина И. В., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Национальный горный университет,*
просп. Дмитрия Яворницкого, 19, г. Днепр, 49000

[2]*Национальная металлургическая академия Украины,*
просп. Гагарина, 4, г. Днепр, 49600

okbelova@rambler.ru

Исследованы плоские задачи о передаче нагрузки упругим стрингером упругой анизотропной полуплоскости при различных видах нагружения (равномерное и неравномерное распределение нагрузки). Проведены различные асимптотические оценки при «малых» и «больших» x. Асимптотический метод Маневича-Павленко был обобщен на криволинейные координаты.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропный материал, криволинейная анизотропия.

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ПРО ПЕРЕДАЧУ НАВАНТАЖЕННЯ

[1]Кагадій Т. С., д. ф.-м. н., професор, [2]Білова О. В., к. ф.-м. н., доцент,
[2]Щербина І. В., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Національний гірничий університет,*
просп. Дмитра Яворницького, 19, м. Дніпро, 49000

[2]*Національна металургійна академія України,*
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпро, 49600

okbelova@rambler.ru

Досліджені плоскі задачі про передачу навантаження пружнім стрингером пружній анізотропній на півплощині при різних видах навантаження (рівномірний та нерівномірний розподіл навантаження). Проведені різні асимптотичні оцінки при «малих» та «великих» x. Асимптотичний метод Маневича-Павленка був узагальнений на криволінійні координати.

Ключові слова: асимптотичний метод, анізотропний матеріал, криволінійна анізотропія.