34. Tranter, K. D. (1956). Integral transformations in mathematical physics. Moscow: Gos. izd-vo tehniko-teoreticheskoy lit.

35. Gradshteyn, I. S. & Ryizhik, I. M. (1971). Tables of integrals, series, sums. Moscow: Nauka.

36. Korenev, B. G. (1971). Introduction to the theory of Bessel functions. Moscow: Nauka.

УДК 519.8 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-03

АЛГОРИТМИ НА ФРАГМЕНТАРНИХ СТРУКТУРАХ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ НА ДВІ ЧАСТИНИ

Козін І. В., д. ф.-м. н., професор, Сардак В. І., аспірант, Терешко Я. В., аспірант

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

ainc00@gmail.com, vsardak85@gmail.com, nsteronua@gmail.com

Досліджується проблема розбиття мультимножини чисел на дві частини у такий спосіб, щоб різниця між сумою чисел у двох частинах розбиття була мінімальною по модулю. Уже згадана задача належить до класу NP-важких задач, для неї невідомі алгоритми поліноміальної трудомісткості. Отже, для задачі виправдане застосування метаевристик різних типів. Показано, що задача має природну фрагментарну структуру, в якій елементарними фрагментами є одноелементні підмножини. Наявність фрагментарної структури дозволяє звести цю задачу до задачі комбінаторної оптимізації на множині перестановок. Множина перестановок розглядається при цьому як метричний простір з метрикою Кендалла. Причому будь-якому допустимому розв'язку вихідної задачі відповідає одна або кілька перестановок. Такий підхід дає можливість застосувати для пошуку наближених рішень задачі ряд алгоритмів пошуку оптимуму на множині перестановок. Найбільш простим і відомим алгоритмом пошуку оптимуму в метричному просторі є алгоритм локального пошуку в ε-околиці випадково обраної точки. Для забезпечення пошуку глобального оптимуму цей алгоритм застосовується кілька разів з різним вибором початкової точки. Фрагментарна структура задачі дозволяє побудувати універсальні алгоритми, що імітують природні процеси. У цій роботі розглянуті два алгоритми подібного виду. Це еволюційний алгоритм на множині перестановок і алгоритм мурашиної колонії. Для оцінки якості запропонованих метаевристик розроблений генератор випадкових задач розглянутого типу. Згенеровано кілька серій задач. Кожна із задач серії розв'язувалася шляхом використання трьох різних алгоритмів. Причому параметри алгоритмів підібрані у такий спосіб, щоб кількість обчислень значення цільової функції була приблизно однаковою в кожному випадку. На основі множини згенерованих задач проведено порівняння локального, еволюційного і мурашиного алгоритмів.

Ключові слова: задача про розбиття множини, фрагментарна структура, еволюційний алгоритм, алгоритм мурашиної колонії.

ALGORITHMS BASED ON FRAGMENTARY STRUCTURES FOR THE PROBLEM OF DIVIDING A SET INTO TWO-PART

Kozin I., Sardak V., Tereshko I.

Zaporizhzhya State University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

ainc00@gmail.com, vsardak85@gmail.com, nsteronua@gmail.com

The partitioning a multiset of numbers into two parts problem is investigated in article. The partitioning muxst be such, that the difference of sums of numbers in two parts of the partition is minimal modulo. The problem under consideration belongs to the class of NP-difficult problems, for it algorithms of polynomial complexity are unknown. Thus, the application of metaheuristics of various types is justified for the problem. It is shown that the problem has a natural fragmentary structure, in which the elementary fragments are singleton subsets. The presence of a fragmentary structure allows us to reduce this problem to the problem of combinatorial optimization on the set of permutations. The set of permutations is considered here as a metric space with the Kendall metric. Moreover, to any admissible solution the original problem corresponds to one or several permutations. This approach makes it possible to apply a number of algorithms for finding the optimum on the set of permutations to find approximate solutions of the problem. The most simple and well-known algorithm for searching for an optimum in a metric space is the local search algorithm in the ε-neighborhood of a randomly chosen point. To ensure the search for a global optimum, this algorithm is applied several times with a different choice of the starting point. The fragmentary structure of the problem makes it possible to construct universal algorithms that mimic natural processes. In this paper we consider two algorithms of this kind. This is an evolutionary algorithm on the set of permutations and the algorithm of an ant colony. To assess the quality of the proposed metaheuristics, a random-type generator of the type considered has been developed. Several series of tasks are generated. Each of the series tasks was solved by using three different algorithms. And the parameters of the algorithms were chosen in such a way that the number of calculations of the value of the objective function was approximately the same in each case. Based on the set of generated tasks, a comparison of local, evolutionary and ant algorithms is made.

Key words: the problem of partitioning a set, a fragmentary structure, an evolutionary algorithm, the algorithm of an ant colony.

ВСТУП. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Найбільш простою серед задач розбиття числових множин є задача розбиття множини чисел на дві частини, що мінімально відрізняються за сумою чисел, які до них входять (задача 2-розбиття). Незважаючи на простоту формулювання, ця задача належить до розряду NP-складних [1] задач і на сьогоднішній день не відомий точний алгоритм поліноміальної трудомісткості для пошуку оптимального розв’язку цієї задачі. Численні застосування цієї задачі вимагають розробки наближених алгоритмів, які дозволяли б досить швидко відшукувати розбиття, близькі до оптимальних. З огляду на важливість задачі для застосувань виправдане використання метаевристик для пошуку наближених рішень.

ОГЛЯД НАЯВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для задачі про розбиття числових мультимножин на дві підмножини з однаковою сумою елементів доведено властивість NP-повноти [2]. Задача розбиття множини на дві підмножини з максимально близькими сумами елементів може бути розв’язана за псевдополіноміальний час методом динамічного програмування [3]. Тому цю задачу вважають найбільш простою серед NP-важких задач. Для задачі 2-розбиття відомо безліч евристичних алгоритмів [4, 5]. Продемонстровано, що ця задача може бути сформульована як окремий випадок задачі про рюкзак.

Для важких задач хороші результати вдається отримати за допомогою метаевристик, побудованих на аналогіях з процесами в живій природі. Досить часто використовуються генетичні алгоритми [6, 7] і їх узагальнення – еволюційні алгоритми. Перспективним є використання алгоритму мурашиної колонії [8, 9]. Недоліками таких алгоритмів є відсутність загальних механізмів, що дозволяють застосовувати їх у складних задачах. Для кожного типу задач доводиться будувати свої варіанти алгоритмів.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ

Метою цієї роботи є розробка метаевристик для задачі 2-розбиття на основі фрагментарних структур. При цьому буде продемонстровано, що задача 2-розбиття має природну фрагментарну структуру. Будуть запропоновані варіанти універсального еволюційного алгоритму і алгоритму мурашиної колонії для задачі, що аналізується, і запропоновані методи оцінки ефективності й порівняння таких алгоритмів.

ФРАГМЕНТАРНА СТРУКТУРА І ФРАГМЕНТАРНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ 2-РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ

Фрагментарною структурою (X, E) на скінченній множині X [10] називається сімейство її підмножин $E = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ таке, що $\forall E_i \in E$, $E \neq \varnothing$ $\exists e \in E_i : E_i \setminus \{e\} \in E$.

Елементи із множини E називатимемо *допустимими фрагментами*.

Отже, для кожного допустимого фрагменту E_i існує нумерація його елементів $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, ... e_{is_i}\}$ така, що $\forall k = 1, 2, ... s_i \quad \{e_{i1}, e_{i2}, ... e_{ik}\} \in E$. Одноелементні множини, які є допустимими фрагментами, будемо називати е*лементарними фрагментами*. Фрагмент називатимемо *максимальним*, якщо він не є підмножиною жодного іншого фрагменту.

Максимальний фрагмент може бути побудовано за допомогою наступного «жадібного» алгоритму:

а) елементи множини X лінійно упорядковуються;

б) на початковому кроці вибирається порожня множина $X_0 = \varnothing$;

в) на кроці з номером $k+1$ вибирається перший по порядку елемент $x \in X \setminus X_k$ такий, що $X_k \bigcup \{x\} \in E$;

г) алгоритм закінчує роботу, якщо на черговому кроці не вдалося знайти елемент $x \in X \setminus X_k$ з необхідною властивістю.

Алгоритм побудови максимального фрагменту у фрагментарній структурі, який наведений вище, називатимемо фрагментарним алгоритмом. Результат застосування фрагментарного алгоритму визначається заданим лінійним упорядкуванням на множині *X*. Отже, будь-який максимальний фрагмент може бути описаний деякою перестановкою елементів множини *X*. Нехай $A \in E$. Умова для елемента $x \in X$, за якої $A \bigcup \{x\} \in E$ будемо називати *умовою приєднання елемента x*.

Трудомісткість фрагментарного алгоритму визначається такою теоремою:

Теорема. Якщо $A \in E$, $\forall x \in X$ й існує алгоритм поліноміальної трудомісткості за числом елементів множини *X* для перевірки умови приєднання елемента *x*, то задача побудови максимального фрагмента є поліноміально розв'язуваною.

Продемонструємо тепер, що завдання 2-розбиття мультимножини має фрагментарну структуру. Нехай задано непорожня мультимножина чисел *X*. Кожну одноелементну підмножину мультимножини *X* вважатимемо елементарним фрагментом. Нехай $M = \sum_{x \in X} x$ – сума всіх елементів мультимножини. Допустимим фрагментом вважається підмножина $A \subseteq X$, сума елементів якої не перевищує $\frac{1}{2} M$. Кожному упорядкуванню елементарних фрагментів відповідає єдина підмножина $Y \subseteq X$ мультимножини *X*, яка є максимальним допустимим фрагментом з цього упорядкування (отримана шляхом застосування фрагментарного алгоритму). Дві підмножини Y і $X \setminus Y$ утворюють 2-розбиття мультимножини *X*. Звичайно, не кожне 2-розбиття мультимножини *X* відповідає максимальному фрагменту фрагментарної структури. Однак легко показати, що будь-який оптимальний розв'язок задачі 2-розбиття може бути отриманий фрагментарним алгоритмом при деякому упорядкуванні елементарних фрагментів.

Для оптимізаційних задач на фрагментарній структурі можна запропонувати низку метаевристик [10]. Дві з них будуть розглянуті нижче.

ЕВОЛЮЦІЙНА МОДЕЛЬ НА ФРАГМЕНТАРНІЙ СТРУКТУРІ Й ЕВФ-АЛГОРИТМ

Розглянемо тепер задачу пошуку максимального за вагою фрагмента на зваженій фрагментарній структурі. Такий фрагмент надалі називатимемо оптимальним. Як зазначалося вище, будь-який максимальний фрагмент однозначно визначається деякою перестановкою елементів множини *X*. Отже, будь-яка перестановка елементів *X* визначає якийсь максимальний фрагмент. Таким чином, задача пошуку оптимального фрагмента – це оптимізаційна задача на множині перестановок.

Властивості фрагментарних структур дозволяють побудувати особливий клас еволюційних алгоритмів на фрагментарних структурах – ЕВФ-алгоритми.

ЕВФ-алгоритм є комбінацією еволюційного і фрагментарного алгоритму. Наведемо відповідну еволюційну модель і принцип дії такого алгоритму [11].

Як множину допустимих розв'язків розглянемо підмножину максимальних фрагментів на заданій фрагментарній структурі. Кожен фрагмент з цієї множини визначається як результат роботи фрагментарного алгоритму при деякій заданій перестановці елементарних фрагментів. Отже, будь-якому допустимому розв'язку відповідає певна перестановка чисел $1,2,\ldots,N$, де N – кількість елементарних фрагментів. Для кожного допустимого розв'язку визначено значення цільової функції.

Базова множина X еволюційної моделі – це множина $S_N = \{i_1, i_2 ..., i_N\}$ всіх перестановок чисел $1,2,\ldots,N$. Оператор побудови початкової популяції виділяє довільну підмножину заданої потужності Q з множини X.

Правило обчислення критерію селекції влаштовано у такий спосіб: по заданій перестановці фрагментів за допомогою фрагментарного алгоритму будується максимальний допустимий фрагмент і обчислюється значення цільової функції задачі для цього фрагмента.

Наведемо тепер оператор кросоверу. Нехай $U = (u_1, u_2, ..., u_N)$ і $V = (v_1, v_2, ..., v_N)$ – дві довільні перестановки. Перестановка-нащадок будується таким чином: послідовності U і V проглядаються в порядку проходження елементів. На k-му кроці вибирається найменший з перших елементів послідовностей і додається в нову перестановку – нащадок. Потім цей елемент буде видалений з двох послідовностей-батьків. Наприклад,

$$K((1,4,2,3,7,8,6,5), (7,6,2,1,3,5,8,4)) = (1,4,2,3, 7,6,5,8).$$

Оператор мутації M виконує випадкову транспозицію в перестановці.

Оператор селекції вибирає випадковим чином набір пар з поточної популяції.

Оператор еволюції впорядковує елементи проміжної популяції в послідовність за спаданням значення критерію селекції. В якості нової поточної популяції вибираються перші Q елементів послідовності.

Звичайне правило зупинки – кількість поколінь досягло граничного значення L. Краща за значенням критерію селекції перестановка з останньої побудованої популяції визначає наближений розв'язок задачі (за допомогою фрагментарного алгоритму).

Запропонований підхід є універсальним і дозволяє застосовувати один і той же еволюційний алгоритм до будь-яких оптимізаційних задач на скінченних фрагментарних структурах.

АЛГОРИТМ МУРАШИНОЇ КОЛОНІЇ НА ФРАГМЕНТАРНІЙ СТРУКТУРІ

Ідея мурашиного алгоритму – моделювання поведінки мурах, пов'язаної з їх здатністю швидко знаходити найкоротший шлях від мурашника до джерела їжі й адаптуватися до умов, що змінюються, знаходячи новий найкоротший шлях [16, 17]. При своєму русі мураха мітить шлях феромоном, і ця інформація використовується іншими мурахами для вибору шляху. Це елементарне правило поведінки і визначає здатність мурах знаходити шляхи, близькі до оптимальних.

Продемонструємо, як подібний механізм застосувати до пошуку оптимальної перестановки. Процедура обчислення складатиметься з ряду циклів розрахунку. Кожен шлях мурашки між позиціями 1, 2, ..., n визначатиметься перестановкою $s = (i_1, i_2, ..., i_n)$. Мурахи мають власну «пам'ять». У кожної мурашки є список уже відвіданих позицій – список заборон. Позначимо $J_{i,k}^{t}$ список позицій, які на циклі t необхідно відвідати k-му мурашки, що перебуває в позиції i.

Мурахи мають «нюх» – вони можуть вловлювати слід феромона, що підтверджує бажання мурашки пройти з позиції i в позицію j на підставі досвіду інших мурах. Кількість феромона на циклі з номером t при переході з позиції i в позицію j визначається величиною $\tau_{ij}(t)$. На початковому етапі цю кількість можна задавати довільно.

Імовірність переходу k-го мурашки з позиції i в позицію j на циклі з номером t визначається таким співвідношенням:

$$P_{ij,k}(t)=\begin{cases}\dfrac{\left[\tau_{ij}(t)\right]^{\alpha}}{\sum\limits_{l\in J_{i,k}^{t}}\left[\tau_{il}(t)\right]^{\alpha}}, & j\in J_{i,k}^{t},\\ 0, & j\notin J_{i,k}^{t},\end{cases}$$

де α – параметр, що визначає вагу сліду феромона. Кількість феромона, що відкладається, становить величину:

$$\Delta\tau_{ij,k}(t)=\begin{cases}\dfrac{Q}{L_k(t)}, & (i,j)\in T_k(t),\\ 0, & (i,j)\notin T_k(t),\end{cases}$$

де Q – позитивний параметр, $L_k(t)$ – значення цільової функції на перестановці, яка відповідає маршруту k-го мурашки на циклі з номером t. Зміна кількості феромона визначається таким виразом:

$$\tau_{ij}(t+1)=(1-p)\cdot\tau_{ij}(t)+\sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{ij,k}(t),$$

де m – кількість мурах, p – коефіцієнт «випаровування» ($0 \le p \le 1$).

Алгоритм зупиняє роботу, коли виконано визначене правило зупинки, наприклад, досягнута межа числа циклів. Мінімальна за значенням цільової функції перестановка, яка знайдена на останньому циклі, перетворюється в рішення вихідної задачі.

ОЦІНКИ ЕФЕКТИВНОСТІ ТА ПОРІВНЯННЯ МЕТАЕВРИСТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ

Для оцінки ефективності метаевристик для задачі 2-розбиття розроблено генератор випадкових задач, побудований за таким принципом.

Для заданого розміру (кількості елементів) множини генеруються випадковим чином цілі числа із заданого діапазону. Отже, параметрами генератора виступають потужність N мультимножини і межі A, B цілочисельного діапазону можливих значень чисел. Проводилось кілька серій експериментів з однаковими наборами параметрів алгоритмів. Кожна задача з тестового набору задач розв'язувалася трьома методами: методом локального пошуку (градієнтним методом) з випадковим вибором початкової точки, еволюційно-фрагментарним алгоритмом і алгоритмом мурашиної колонії. Параметри метаевристик підбиралися у такий спосіб, щоб забезпечити приблизно однакову кількість обчислень цільової функції в кожному з методів. Результати розрахунків порівнювалися для кожної задачі і кожному з методів приписувалася певна кількість балів. Якщо метод займав перше місце для задачі (кращий результат), то йому приписувалося два бали, друге місце – 1 бал, третє – 0. Сума всіх набраних балів для серії задач визначалася як рейтингова оцінка відповідного алгоритму. Результати розрахунків за серіями тестових завдань представлені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Рейтинг алгоритмів

Серія	К-ть задач	Інтервал значень чисел	Локальний пошук	Алгоритм мурашиної колонії	ЕВФ-алгоритм
1	100	1-1000	200	200	200
2	100	1-10000	41	197	198
3	100	1-100000	172	198	198
4	100	1-1000000	115	113	132
5	100	1-10000000	89	122	125

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто підхід до пошуку наближених розв'язків складної оптимізаційної задачі 2-розбиття мультимножини на основі застосування теорії фрагментарних структур. Показано, що задача 2-розбиття має фрагментарну структуру, причому оптимальні розв'язки цієї задачі досяжні у відповідній фрагментарній структурі. Такий висновок дає обґрунтування для застосування метаевристик на основі фрагментарних структур. Розглянуто дві такі метаевристики, а саме: еволюційно-фрагментарний алгоритм і алгоритм мурашиної колонії. Показано, що при малих значеннях елементів мультимножини алгоритми мають приблизно однакові характеристики за умови однакової трудомісткості. Однак при збільшенні значень елементів мультимножини кращі результати для цієї задачі показує еволюційно-фрагментарний алгоритм.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982. 416 с.
2. Brian Hayes. The Easiest NP Hard Problem. American Scientist. 2002.
3. Narendra Karmarkar, Richard M. Karp. The Differencing Method of Set Partitioning. Technical Report UCB/CSD 82/113. University of California at Berkeley: Computer Science Division (EECS), 1982.
4. Silvano Martello, Paolo Toth. 4 Subset-sum problem. Knapsack problems: Algorithms and computer interpretations. Wiley-Interscience, 1990.
5. Hans Kellerer, Ulrich Pferschy, David Pisinger. Knapsack problems. Springer, 2004. P. 97.
6. Holland J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. Boston, MA: MIT Press, 1992. 288 p.
7. Курейчик В. М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы. *Известия РАН. ТиСУ*. 1999. № 1. С. 144–160.
8. Dorigo M. Optimization, Learning, and Natural Algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politechnico Di Milano, Italy. 1992. 140 p.
9. Штовба С. Д. Муравьиные алгоритмы: теория и применение. *Программирование*. 2005. № 4. С. 1–16.
10. Козин И. В., Перепелица В. А., Максишко Н. К. Фрагментарные структуры в задачах дискретной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. № 6. С. 125–131.

REFERENCES

1. Garey, M. & Johnson, D. (1982). Computers and hard-to-solve problems. Moscow: Mir.
2. Brian, Hayes (2002). The Easiest NP Hard Problem. American Scientist.
3. Narendra, Karmarkar & Richard, M. Karp. (1982). The Differencing Method of Set Partitioning. Technical Report UCB/CSD 82/113. University of California at Berkeley: Computer Science Division (EECS).

4. Silvano, Martello & Paolo, Toth. (1990). 4 Subset-sum problem. Knapsack problems: Algorithms and computer interpretations. Wiley-Interscience, 1990.
5. Hans Kellerer, Ulrich Pferschy & David Pisinger (2004). Knapsack problems. Springer. P. 97.
6. Holland, J.H. (1992). Adaptation in Natural and Artificial Systems. Boston, MA: MIT Press.
7. Kureychik, V.M. (1999). Genetic algorithms. Condition. Problems. Prospects. Proceedings RAN. TiSU, No.1, pp. 144-160.
8. Dorigo, M. (1992). Optimization, Learning, and Natural Algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politechnico Di Milano, Italy.
9. Shtovba, S.D. (2005). Ant algorithms: theory and application. Programming, No. 4, pp. 1-16.
10. Kozin, I.V., Perepelitsa, V.A. & Maksishko, N.K. (2017). Fragmentary structures in problems of discrete optimization. Cybernetics and systems analysis, No. 6, pp. 125-131.

УДК 517.983.27 DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-04

КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА» ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ’ЯЗКОМ НА ОСНОВІ ЕТАЛОННОЇ МОДЕЛІ

[1]Константінов О. В., к. ф.-м. н., [1]Новицький В. В., д. ф.-м. н., [2]Святовець І. Ф.

[1]*Інститут математики НАН України,*
вул. Терещенківська, 3, м. Київ-4, 01601, Україна

[2]*Запорізька державна інженерна академія,*
просп. Соборний, 226, м. Запоріжжя, 69006, Україна

akonst.im@ukr.net, v.novytskyy@gmail.com, sv.irina0702@gmail.com

Досліджено задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» за наявності постійних збурень – коливань вільної поверхні рідини. Дослідження проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 36 форм коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Дослідження проводилося на основі методу модальної декомпозиції з урахуванням коливань на власних частотах усіх форм. Програмне керування системою побудовано на основі моделі твердого тіла із «затверділою» рідиною. Керування зі зворотним зв’язком будується аналітично на основі трьох підходів: модального принципу, порівняння з еталонною моделлю та мінімізації квадратичного функціонала. Керування зі зворотним зв’язком побудовано на основі лінійної системи у збуреннях, при цьому фазовими координатами є відхилення від програмного закону руху. Перетворення системи у канонічну відносно фазових координат форму дозволило значно спростити аналітичну процедуру побудови керування на основі модального підходу або співставлення з еталонною системою. Для шуканого класу систем отримані також в аналітичному вигляді формули для коефіцієнтів квадратичного функціоналу якості. Ці коефіцієнти можуть бути обрані у такий спосіб, щоб керування забезпечило одночасно необхідну якість перехідних процесів у системі та мінімум квадратичного функціонала. Для перевірки якості побудованого керування була розв’язана задача розгону резервуара із нерухомого положення за заданий час до необхідної швидкості і забезпечення в подальшому його рівномірного руху з цією швидкістю. Результати чисельних експериментів підтверджують доцільність використання лінійної системи у збуреннях як моделі для побудови керування зі зворотним зв’язком для складної нелінійної системи.

Ключові слова: резервуар з рідиною з вільною поверхнею, зворотний зв’язок, модальне керування, еталонна модель, квадратичний функціонал.