

УДК 539.3

Упруго-пластическая работа нитей конечной жесткости в окрестности приложения сосредоточенных сил

Гордеев В.Н., д.т.н., Ленда А.В.

ОАО «УкрНИИпроектстальконструкция им. В.Н. Шимановского», Украина

Анотація. Проведено дослідження нитки кінцевої жорсткості в зоні дії зосередженого навантаження. Отриманий розподіл напружень і деформацій по висоті і довжині нитки, а також область несучої здатності при обмежених пластичних деформаціях.

Аннотация. Проведено исследование нити конечной жесткости в окрестности приложения сосредоточенных сил. Получено распределение напряжений и деформаций по высоте и длине нити, а также область несущей способности при ограниченных пластических деформациях.

Abstract. Research of finite rigidity tendon in the vicinity of concentrated force application is provided. Distribution of tensions and deformations along the tendons' height and length is received. The area of bearing strength at the limited plastic deformations is obtained.

Ключевые слова: нить конечной жесткости, упруго-пластическая работа, напряженно-деформированное состояние, относительные деформации, область несущей способности.

Введение. Для вантовых конструкций существенное значение имеет временная сосредоточенная нагрузка, которая, как известно, вызывает большие местные напряжения. Данный вид нагружения является наиболее опасным еще и потому, что в зоне действия сосредоточенной силы могут возникнуть и развиваться пластические деформации. Тогда уже расчет конструкции следует вести за пределом упругости, что не допускается нормативными документами для висячих систем. Однако такую ситуацию можно допустить при расчете элемента вантовой конструкции – отдельно взятой нити.

Исследуем распределение изгибающих моментов, напряжений и деформаций в упруго-пластической нити конечной жесткости в окрестности приложения сосредоточенной силы. Считается, что нить находится в условиях простого нагружения. Рассмотрим только процесс увеличения нагрузки без учета разгрузки. Будем полагать, что пластические деформации не превосходят трехкратного значения максимальных упругих деформаций.

Рассмотрим первоначально прямолинейную нить конечной жесткости прямоугольного сечения с высотой h и шириной t , оставаясь в рамках гипотезы плоских сечений, нормальных к оси деформированной нити.

Матеріал нити будемо полагати упруго-пластическим, підчиняючимся діаграмме Прандтля з модулем упругості E і пределом пропорциональності σ_0 .

Для дослідження розподілення напружень і деформацій по висоті нити введемо систему дифференціальних рівнянь. При виводі цієї системи будемо користуватися поняттям осі нити – лінії, що проходить через центри сечень. Розмітимо ось нити, що знаходиться в недеформованому стані, в одиницях довжини і будемо користуватися цією розміткою як незалежною координатою s .

Геометрические уравнения. Представим нить конечной жесткости в декартовой системе координат xOy (рис. 1). Положение нити в пространстве и ее деформированное состояние полностью определится, если задать координаты каждой точки оси нити x и y как функции независимой координаты s .

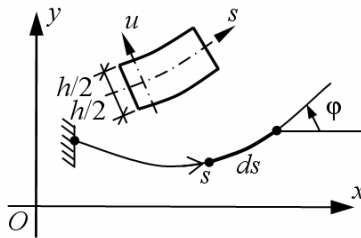


Рис. 1. Геометрия нити

Однако более удобно пользоваться другим набором переменных, определяющих положение оси нити в пространстве. Это угол φ между осью x и касательной к оси нити и относительное удлинение этой оси ε_0 . Напомним, что нить считается растяжимой.

Координаты x и y связаны с переменными φ и ε_0 дифференциальными зависимостями:

$$\frac{dx}{ds} = (1 + \varepsilon_0) \cos \varphi ; \quad (1)$$

$$\frac{dy}{ds} = (1 + \varepsilon_0) \sin \varphi . \quad (2)$$

Для решения задачи понадобится еще одна геометрическая величина – ω , связанная с углом φ дифференциальной зависимостью

$$\frac{d\varphi}{ds} = \omega . \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что величина ω примерно соответствует кривизне оси нити, а в случае нерастяжимой нити в точности ей равняется. При помощи ε_0 и ω можно определить относительные удлинения волокон нити ε по следующей формуле:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \omega \cdot u, \quad (4)$$

где u – координата, определяющая положение волокна нити (рис. 1).

Эта координата изменяется в пределах

$$\left(-\frac{h}{2} \leq u \leq \frac{h}{2} \right). \quad (5)$$

Формулами (1) – (4) исчерпываются геометрические уравнения, описывающие нить конечной жесткости. В их числе три дифференциальных и одно алгебраическое.

Уравнения равновесия. Выберем для рассмотрения такой набор внутренних усилий: N – продольная сила, Q – поперечная сила, M – изгибающий момент, приведенный к центру сечения (рис. 2).

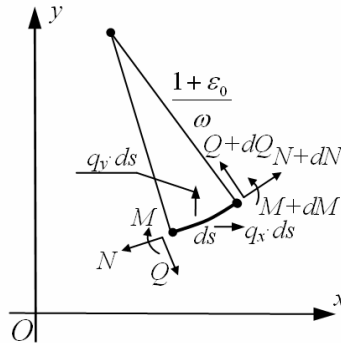


Рис. 2. Равновесие бесконечно малого участка нити

Рассмотрим равновесие бесконечно малого участка нити. Запишем выражения для суммы проекций всех сил, действующих на этот участок, на оси x и y . Получим:

$$-N \cos \varphi + Q \sin \varphi + (N + dN) \cdot \cos(\varphi + d\varphi) - (Q + dQ) \cdot \sin(\varphi + d\varphi) + q_x \cdot ds = 0;$$

$$-N \sin \varphi - Q \cos \varphi + (N + dN) \cdot \sin(\varphi + d\varphi) + (Q + dQ) \cdot \cos(\varphi + d\varphi) + q_y \cdot ds = 0.$$

Запишем выражения для суммы моментов всех сил, действующих на бесконечно малый участок нити, относительно центра кривизны ее оси,

учитывая, что радиус кривизны равен $\frac{1 + \varepsilon_0}{\omega}$.

$$dN \cdot \frac{1 + \varepsilon}{\omega} + dM + q_x \cdot ds \cdot \frac{1 + \varepsilon}{\omega} \cos \varphi + q_y \cdot ds \cdot \frac{1 + \varepsilon}{\omega} \sin \varphi = 0.$$

После преобразований получим:

$$\frac{dN}{ds} = Q \cdot \omega - q_x \cdot \cos \varphi - q_y \cdot \sin \varphi; \quad (6)$$

$$\frac{dQ}{ds} = -N \cdot \omega + q_x \cdot \sin \varphi - q_y \cdot \cos \varphi; \quad (7)$$

$$\frac{dM}{ds} = -(1 + \varepsilon_0) \cdot Q. \quad (8)$$

Выражения (6) – (8) составляют систему уравнений равновесия.

Физические уравнения. Будем полагать, что волокна нити не давят друг на друга и что напряжения в них выражаются через относительные удлинения в соответствии с диаграммой Прандтля с модулем упругости E и пределом пропорциональности σ_0 (рис. 3).

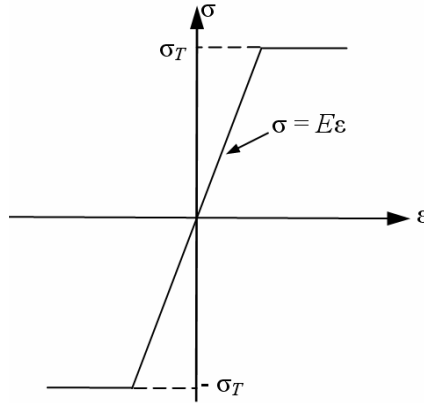


Рис. 3. Зависимость напряжений от относительных удлинений

При помощи этой зависимости напряжения в волокнах нити могут быть однозначно определены через ε_0 и ω . На рис. 4 представлены различные виды распределения напряжений по высоте нити. Пунктирными линиями показаны относительные удлинения волокон, умноженные на модуль упругости материала. Относительное удлинение верхнего волокна обозначено через ε_1 , а относительное удлинение нижнего волокна через ε_2 . Под каждой эпюрой обозначен ее цифровой код.

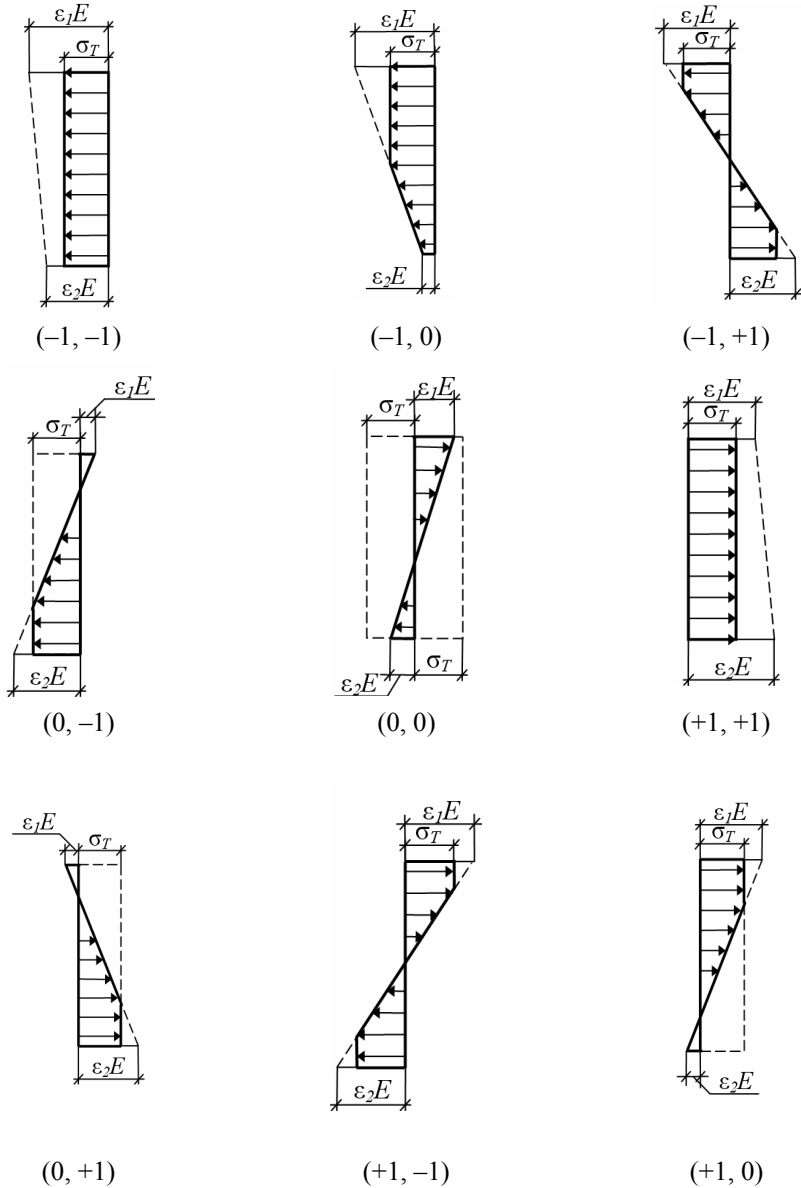


Рис. 4. Различные виды эпюр напряжений в нити

При выводе геометрических уравнений было избрано правило знаков, в соответствии с которым

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \omega \cdot \frac{h}{2}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \omega \cdot \frac{h}{2}. \quad (9)$$

Для кожного из представленного вида эпюр можно получить формулу для вычисления нормальной силы N и изгибающего момента M в сечении. Набор соответствующих формул приведен ниже:

$$N(\varepsilon_0, \omega) = E \cdot \frac{t}{2 \cdot \omega} \begin{bmatrix} -2 \cdot \varepsilon_T \cdot h \cdot \omega, \\ \varepsilon_T^2 + 2 \cdot \varepsilon_T \cdot \left(\varepsilon_0 - \omega \frac{h}{2} \right) + \left(\varepsilon_0 + \omega \frac{h}{2} \right)^2, \\ 4 \cdot \varepsilon_T \cdot \varepsilon_0, \\ -\varepsilon_T^2 - 2 \cdot \varepsilon_T \cdot \left(\varepsilon_0 + \omega \frac{h}{2} \right) - \left(\varepsilon_0 - \omega \frac{h}{2} \right)^2, \\ 2 \cdot h \cdot \omega \cdot \varepsilon_0, \\ -\varepsilon_T^2 + 2 \cdot \varepsilon_T \cdot \left(\varepsilon_0 + \omega \frac{h}{2} \right) - \left(\varepsilon_0 - \omega \frac{h}{2} \right)^2, \\ 4 \cdot \varepsilon_T \cdot \varepsilon_0, \\ \varepsilon_T^2 - 2 \cdot \varepsilon_T \cdot \left(\varepsilon_0 - \omega \frac{h}{2} \right) + \left(\varepsilon_0 + \omega \frac{h}{2} \right)^2, \\ 2 \cdot \varepsilon_T \cdot h \cdot \omega, \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$M(\varepsilon_0, \omega) = E \cdot \frac{t}{6 \cdot \omega^2} \begin{bmatrix} 0, \\ 1/4 \cdot (\omega \cdot h - \varepsilon_0 - \varepsilon_T) \cdot (2 \cdot \varepsilon_0 + \omega \cdot h + 2 \cdot \varepsilon_T)^2, \\ 2 \cdot \varepsilon_T \cdot \left(-\varepsilon_T^2 - 3 \cdot \left(\varepsilon_0^2 - \left(\omega \cdot \frac{h}{2} \right)^2 \right) \right), \\ 1/4 \cdot (\omega \cdot h + \varepsilon_0 + \varepsilon_T) \cdot (-2 \cdot \varepsilon_0 + \omega \cdot h - 2 \cdot \varepsilon_T)^2, \\ 1/2 \cdot \omega^3 \cdot h^3, \\ 1/4 \cdot (\omega \cdot h + \varepsilon_0 - \varepsilon_T) \cdot (-2 \cdot \varepsilon_0 + \omega \cdot h + 2 \cdot \varepsilon_T)^2, \\ 2 \cdot \varepsilon_T \cdot \left(\varepsilon_T^2 + 3 \cdot \left(\varepsilon_0^2 - \left(\omega \cdot \frac{h}{2} \right)^2 \right) \right), \\ 1/4 \cdot (\omega \cdot h - \varepsilon_0 + \varepsilon_T) \cdot (2 \cdot \varepsilon_0 + \omega \cdot h - 2 \cdot \varepsilon_T)^2, \\ 0, \end{bmatrix} \quad (11)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений необходимы обратные функции, для получения которых нужно выразить ε_0 и ω как функции от N и M . Аналитические выражения для этих функций многовариантны и зависят от сочетаний величин аргументов. Поэтому было принято реше-

ние получают эти зависимости численным методом, базируясь на формулах (10) и (11).

Система разрешающих уравнений. Таким образом, получена система из шести дифференциальных уравнений (1), (2), (3), (6), (7), (8), разрешенных относительно производной. Кроме этого используются зависимости, связывающие переменные N и M с переменными ε_0 и ω , встречающимися в дифференциальных уравнениях, полученными численным методом. В совокупности они представляют собой систему уравнений для решения поставленной задачи. Эта система уравнений описывает растяжимую нить и не предъявляет никаких требований к ее пологости.

Была составлена программа в среде MathCad, при помощи которой получены представленные ниже результаты.

Результаты исследований. Исследование концентрации напряжений в зоне приложения сосредоточенной силы выполнено на примере невесомой нити, заземленной по концам и нагруженной в центре пролета сосредоточенной силой P (рис. 5). Пролет нити считается большим по сравнению с рассматриваемой зоной. Величина сосредоточенной силы выбиралась в зависимости от распора нити с таким расчетом, чтобы пластические деформации не превышали трехкратный уровень максимальных упругих деформаций.

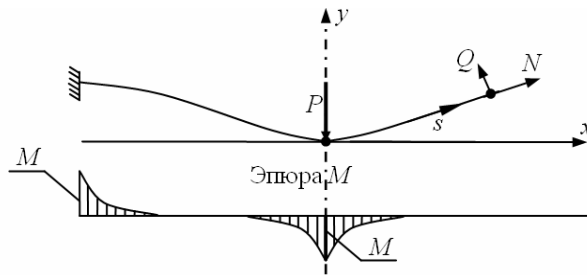


Рис. 5. Схема исследуемой нити

Для корректного задания начальных условий построим область несущей способности нити в координатах продольная сила – изгибающий момент. Перейдем к безразмерным координатам, принимая в качестве единицы для продольной силы несущую способность нити на растяжение $t \cdot h \cdot \sigma_0$, а в качестве единицы для изгибающего момента – несущую способность нити на изгиб в условиях полной текучести $t \cdot h^2 \cdot \sigma_0 / 4$. Таким образом, безразмерная продольная сила v и безразмерный изгибающий момент μ будут определяться формулами

$$v = \frac{N}{t \cdot h \cdot \sigma_T}, \quad \mu = \frac{4M}{t \cdot h^2 \cdot \sigma_T}. \quad (12)$$

Рассмотрим эпюру напряжений нити в условиях полной пластичности (рис. 6).

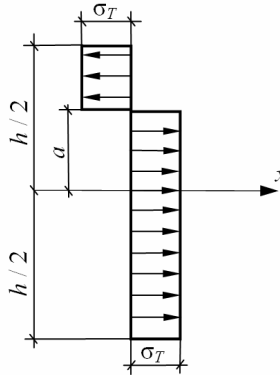


Рис. 6. Эпюра напряжений нити в условиях полной пластичности

Будем полагать, что нейтральная ось находится на расстоянии a от срединной линии. Выписывая выражения для суммы проекций на ось x и суммы моментов относительно центра сечения всех напряжений, действующих в сечении нити, получим формулы для определения продольной силы и изгибающего момента:

$$N = 2a \cdot t \cdot \sigma_T, \quad M = \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) \cdot t \cdot \sigma_T. \quad (13)$$

Переходя к безразмерным параметрам, получим:

$$v = \xi, \quad \mu = 1 - \xi^2. \quad (14)$$

Здесь введен еще один безразмерный параметр в соответствии с формулой:

$$\xi = \frac{2a}{h}. \quad (15)$$

Формулы (14) определяют участок границы несущей способности нити в условиях полной пластичности через параметр ξ . Выполняя аналогичные выкладки, получим формулы для участка границы несущей способности при отрицательном знаке изгибающего момента:

$$v = \xi, \quad \mu = -1 + \xi^2. \quad (16)$$

Полученная область несущей способности в графическом виде представлена на рис. 9 сплошной линией. По оси абсцисс отложена безразмерная продольная сила v , а по оси ординат – безразмерный изгибающий момент μ . Как было сказано выше, допустимыми будем считать пластические деформации, не превышающие трехкратного уровня максимальных упругих деформаций.

Рассмотрим эпюры напряжений нити в момент, когда пластические деформации в нижнем волокне достигают предельного уровня.

Случай 1 (рис. 7).

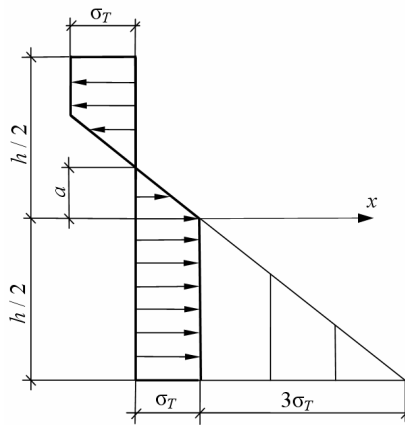


Рис. 7. Эпюра напряжений нити при ограниченных пластических деформациях ($0 \leq \xi \leq 0,6$)

Как и в предыдущем случае, запишем выражения для суммы проекций на ось x и суммы моментов относительно центра сечения всех напряжений, действующих в сечении нити. В результате получим формулы для определения продольной силы и изгибающего момента:

$$N = 2at\sigma_T, \quad M = \left[1 - \left(\frac{2a}{h} \right)^2 + \frac{1}{48} \left(1 + \frac{2a}{h} \right)^2 \right] \frac{t \cdot h^2 \sigma_T}{4}. \quad (17)$$

Переходя к безразмерным параметрам, получим:

$$v = \xi, \quad \mu = 1 - \xi^2 + \frac{(1 - \xi)^2}{48}. \quad (18)$$

Случай 2 (рис. 8).

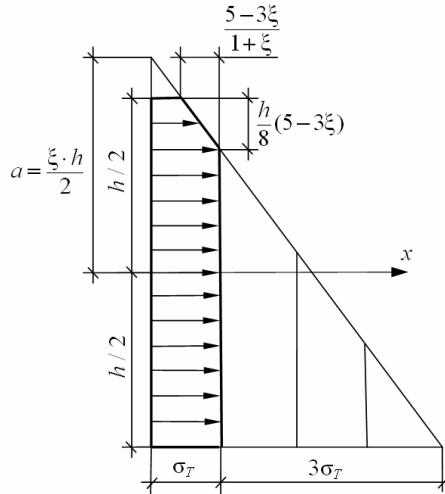


Рис. 8. Эпюра напряжений нити при ограниченных пластических деформациях ($0,6 < \xi \leq 5/3$)

Аналогично предыдущим случаям запишем выражения для суммы проекций на ось x и суммы моментов относительно центра сечения всех напряжений, действующих в сечении нити. В результате получим формулы для определения продольной силы и изгибающего момента:

$$N = \left[h - \frac{1}{16} \frac{(5h - 6a)^2}{h - 2a} \right] t\sigma_T, \quad M = \left[\frac{(6a - 5h)^2 (6a + 7h)}{(2a + h)} \right] \frac{t\sigma_T}{384}. \quad (19)$$

Переходя к безразмерным параметрам, получим:

$$\nu = 1 + \frac{(5 - 3\xi)^2}{1 + \xi} \frac{1}{16}, \quad \mu = \frac{(3\xi - 5)^2 (3\xi + 7)}{96(\xi + 1)}. \quad (20)$$

Формулы (18) и (20) определяют в параметрическом виде два участка границы области несущей способности нити при ограниченных пластических деформациях (рис. 9). Формулы (18) определяют участок, обозначенный символами (+1; -1), а формулы (20) – участок, обозначенный символами (+1; 0). Таким образом, эта граница определена в положительном квадранте. Не представляет труда, пользуясь свойствами симметрии, определить эту границу в остальных трех квадрантах.

С целью определения концентрации напряжений в зоне приложения сосредоточенной силы были исследованы нити конечной жесткости при безразмерных продольных силах $\nu = 0,1; 0,2; \dots; 0,9$ и соответствующих

изгибающих моментах. Можно показать, что безразмерный изгибающий момент, соответствующий указанным выше уровням безразмерной продольной силы, определяется формулами (18) и (20).

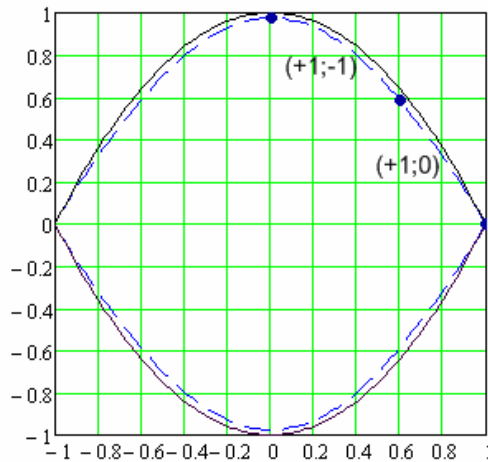


Рис. 9. Область несущей способности нити:

— в условиях полной пластичности;
- - - при ограниченных пластических деформациях

Задавая эти величины в качестве начальных значений для дифференциальных уравнений (6) и (8), решаем систему уравнений (1), (2), (3), (6), (7), (8) по методу Рунге-Кутты. В результате получаем все искомые функции.

Наибольший интерес представляет изгибающий момент. Как показывают численные исследования, он достигает максимального значения под сосредоточенной силой и быстро убывает с увеличением координаты s . На рис. 10 наведены графики убывания изгибающего момента. По оси абсцисс отложено безразмерное расстояние от сосредоточенной силы, а по оси ординат – безразмерный изгибающий момент μ . На рисунке показано девять кривых для различных значений ν . Было замечено, что кривые распределения с достаточной степенью точности могут быть аппроксимированы экспоненциальными зависимостями

$$\mu = \mu_{\max} \exp(-\beta \cdot \eta), \quad (21)$$

где η – безразмерная координата s , определяемая по формуле

$$\eta = \frac{s}{h}, \quad (22)$$

α β – емпірический коэффициент, значения которого приведены в таблице.

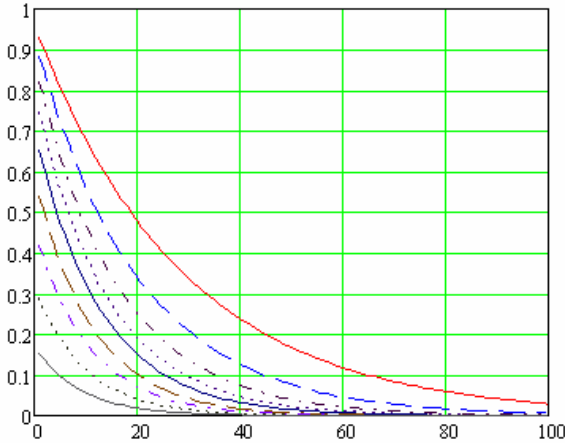


Рис. 10. Графики убывания безразмерного момента μ :
 — $\nu = 0,1$; - - - $\nu = 0,2$; - · - · $\nu = 0,3$; · · · $\nu = 0,4$; — $\nu = 0,5$;
 - - - $\nu = 0,6$; - · - · $\nu = 0,7$; · · · $\nu = 0,8$; — $\nu = 0,9$

Таблица

Характеристики пластических зон

ν	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ	0,965	0,930	0,875	0,799	0,703	0,587	0,457	0,319	0,170
p	0,0180	0,0247	0,0289	0,0312	0,0316	0,0300	0,0262	0,0208	0,0132
β	0,035	0,050	0,062	0,071	0,077	0,088	0,093	0,103	0,110
n	13	12	11	10	9	8	8	8	8

Были получены картины развития пластических деформаций в зоне действия сосредоточенной силы для всех значений ν (рис. 11). На рисунках в виде изолиний показаны относительные удлинения продольных волокон нити. Значение 0 соответствует нейтральной линии. Значение 1 соответствует границе упругой зоны при растяжении, а значение -1 – границе упругой зоны при сжатии. Горизонтальная ось соответствует безразмерной координате η . Вертикальная ось соответствует безразмерной координате по высоте нити. Сосредоточенная сила приложена в направлении снизу вверх. Как видно из рисунков, пластическая зона при растяжении распространяется вдоль нити примерно на 8 – 13 ее высот.

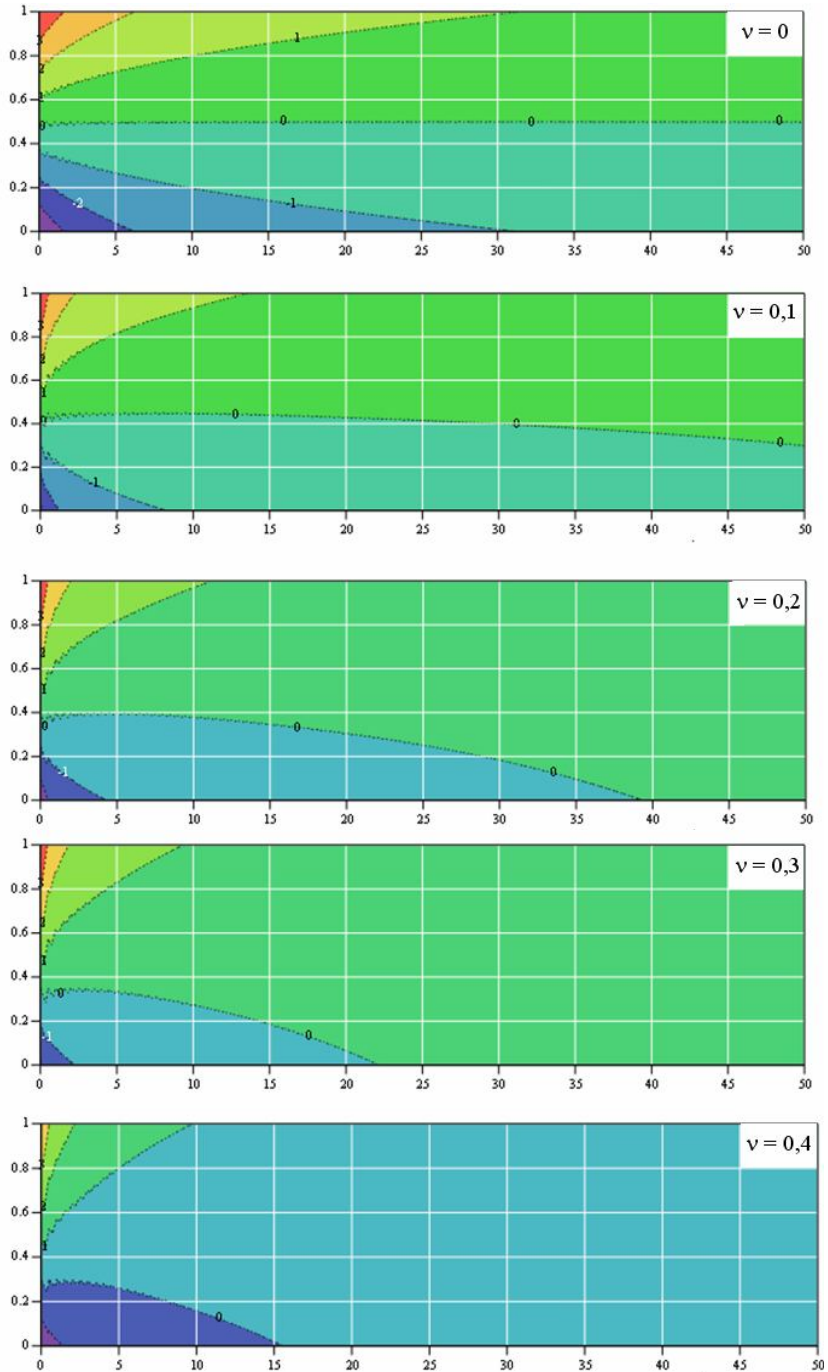


Рис. 11. Деформації волокон нити

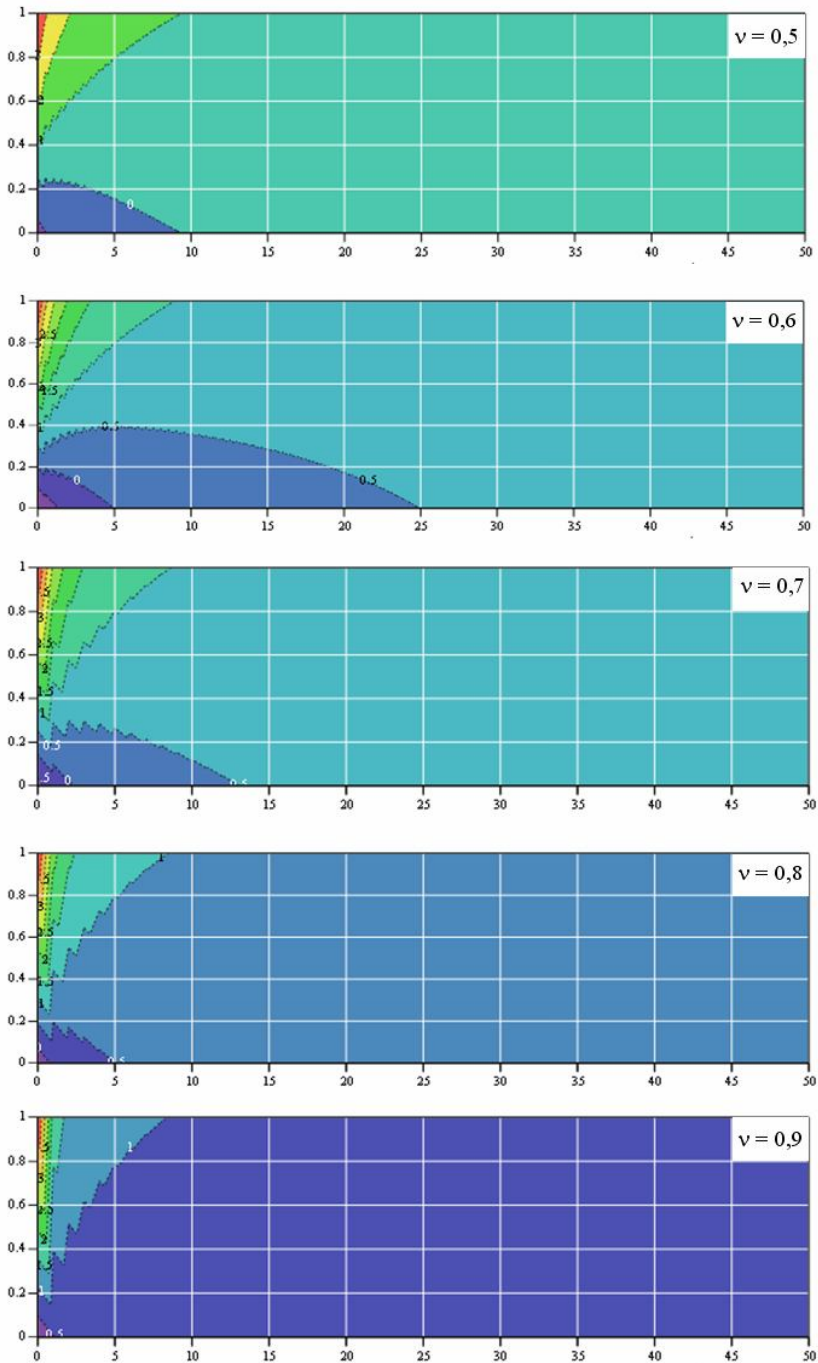


Рис. 11. Деформации волокон нити (окончание)

В приведенной ниже таблице даны значения безразмерных изгибающих моментов μ , сосредоточенных сил p , показателей экспоненты β и длин распространения пластических зон n для различных значений ν .

Выводы

Таким образом, выведена система дифференциальных уравнений, описывающих поведение упруго-пластической нити при больших перемещениях и деформациях. Получены области несущей способности нити в пространстве – продольная сила – изгибающий момент для случая неограниченных пластических деформаций и для случая пластических деформаций, не превосходящих утроенного значения максимальных упругих деформаций. Для каждого из участков границ областей несущей способности найдены аналитические выражения. Получено распределение напряжений и деформаций по высоте и длине нити. Установлено, что зоны пластичности распространяются на 8 – 13 высот нити от точки приложения сосредоточенной силы. Показано, что изгибающие моменты быстро затухают по длине нити по экспоненциальному закону. Для каждого из соотношений – продольная сила – изгибающий момент найдены конкретные значения показателей экспоненты.

Литература

- [1] Галин Л.А. Упругопластические задачи. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
- [2] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 324 с.
- [3] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.

Надійшла до редколегії 26.02.2010 р.