УДК 624.014; 624.04

Теоретичне порівняння фактора стійкості і коефіцієнта поздовжнього згину центрально-стиснутих сталевих колон з урахуванням початкових деформацій та вигинів

Білик С.І., д.т.н.

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

Анотація. Проведені теоретичні дослідження, в яких розглянуто стійкість центрально-стиснутих сталевих колон. Враховано, що при втраті стійкості елемента виникають максимальні деформації, які залежать від початкових залишкових деформацій, початкових деформацій вигину, деформацій стиску, деформацій вигину стрижня при втраті стійкості. Через модуль Кармана враховано вплив розвитку пружно-пластичних деформацій в перерізі колони. Отримано рівняння для визначення коефіцієнта поздовжнього згину для центрально-стиснутих колон, котрі мають різну гнучкість та враховують початкові недосконалості й розвиток пластичних деформацій. В теоретичних дослідженнях отримали формулу для розрахунку коефіцієнта поздовжнього вигину і знижувального коефіцієнта фактора стійкості за Єврокодом 3.

Аннотация. Проведены теоретические исследования, в которых рассмотрена устойчивость центрально-сжатых стальных колонн. Учтено, что при потере устойчивости элемента возникают максимальные деформации, которые зависят от начальных остаточных деформаций, начальных деформаций продольного изгиба, деформаций сжатия, деформаций продольного изгиба стержня при потере устойчивости. Посредством модуля Кармана учтено влияние развития упругопластических деформаций в сечении колонны. Получено уравнение для определения коэффициента продольного изгиба для центрально-сжатых колонн, которые имеют разную гибкость и учитывают начальные несовершенства и развитие пластичных деформаций. В теоретических исследованиях получили формулу для расчета коэффициента продольного изгиба и понижающего коэффициента фактора устойчивости по Еврокоду 3.

Abstract. Theoretical studies examined stability of centrally compressed steel columns. It is taken into account that when element’s buckling the maximum deformation occurs, which depend on initial deformation, on initial buckling deformation, on compression deformation of a rod under buckling. By means of Karman module the influence of development of elastic-plastic deformations in the column cross-section is taken into account. The equation is received for determining the buckling coefficient for centrally compressed columns, which have different flexibility and take into account initial imperfections and development of plastic deformations. Theoretical studies have got formula to calculate the buckling factor and reduction coefficient of stability factor according to Eurocode 3.

Ключові слова: втрата стійкості, деформації, колона, поздовжній вигин.

Актуальність роботи. **Постановка задачі**. За нормативним документами перевірка стійкості центрально-стиснутих сталевих елементів виконується за формулою ДБН В.2.6-198:2014 через використання коефіцієнта повздовжнього згину φ в залежності від форми перерізу та початкових недосконалостей, які характерні для обраного перерізу, а також приведеної гнучкості $\overline{\lambda_x}$, [1…4]:

$$N/(\varphi R_y A)\leq 1;\ N\leq\varphi R_y A. \tag{1.a}$$

$$\varphi=\frac{0,5}{\overline{\lambda_x^2}}\left[\delta-\sqrt{(\delta)^2-4\pi^2\overline{\lambda_x^2}}\right], \tag{1.b}$$

$$\delta=\overline{\lambda_x^2}+9,87\left(1-\alpha+\beta\overline{\lambda_x}\right). \tag{1.c}$$

Форма перерізу центрально-стиснутого сталевого елемента враховується через коефіцієнт δ та коефіцієнти α і β.

Згідно з Єврокодом 3 та ДСТУ-Н Б EN 1993-1-3:2012 [1…4] перевірка стійкості центрально-стиснутих сталевих стрижнів відбувається за формулами через понижувальний коефіцієнт (далі за текстом − фактор стійкості) χ (*Reduction factor for buckling*) , який теж залежить від умовної гнучкості стрижня $\overline{\lambda_x}$, та коефіцієнта α – коефіцієнта початкових недосконалостей певної форми перерізу.

$$N_{b,Rd}=\chi\beta_A A f_y/\gamma_{M1}. \tag{2.a}$$

де β_A = 1 для поперечних перерізів класів 1, 2 або $\beta_A = A_{eff}/A$ для поперечних перерізів класу 4, понижувальний коефіцієнт фактора стійкості, для відповідної кривої втрати стійкості χ обчислюють за формулою:

$$\chi=\frac{1}{\Phi+\left[\Phi^2-\overline{\lambda^2}\right]^{0,5}},\qquad \chi\leq 1. \tag{2.b}$$

$$\Phi=0,5\left[1+\alpha\left(\overline{\lambda}-0,2\right)+\overline{\lambda}^2\right]. \tag{2.c}$$

де Ф – фактори для визначення понижувального коефіцієнта χ, λ_1 - значення гнучкості для визначення умовної гнучкості.

$$\overline{\lambda}=\left[\beta_A A f_y/N_{c1}\right]^{0,5}=\left(\lambda/\lambda_1\right)\left[\beta_A\right]^{0,5}. \tag{2.d}$$

$$\lambda_1 = \pi\left[E / f_y\right]^{0,5} = 93,9\varepsilon;\ \varepsilon = \left[235 / f_y\right]^{0,5}\left(f_y\ \ вH / мм^2\right); \qquad (2.e)$$

Тобто рекурентна формула між умовною гнучкістю у формулі (2.d) за європейськими нормами і державними нормами у формулі (1.c) при β_A =1,0 має вид:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y \lambda_x^2}{\pi^2 E}} = \frac{\lambda_x}{\pi}\sqrt{\frac{f_y}{E}} = \frac{\overline{\lambda_x}}{\pi} \to \bar{\lambda} = \frac{\overline{\lambda_x}}{\pi}. \qquad (2.f)$$

Наведені формули (1) і (2) показують, що коефіцієнт поздовжнього згину φ є величиною, подібною до фактора стійкості χ, який обчислюється за Єврокодом 3. Структура формули однакова, але перед знаком радикала у формулі (1.b) в ДБН стоїть знак «мінус», а у формулі (2.b) за Єврокодом − знак «плюс».

У статті наведено підхід щодо узагальнення аналітичного апарату для визначення фактора стійкості за різними нормами.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Теоретичні роботи з перевірки стійкості центрально-стиснутих елементів з урахуванням розвитку пружно-пластичних деформацій має цікаву історію [1…52]. Перші зауваження, що модуль деформації змінює своє значення при певних напруженнях, належать Т. Юнгу (Youngs T., 1807) [16]. Ще Е. Ламарль показав, що при втраті стійкості ідеального металевого стрижня за Л. Ейлером (Euler, L., 1759 р.) [14, 15] і Лагранжа відбувається вигин стрижня, і в найбільш напружених волокнах стрижня напруження перевищує границю пружної роботи матеріалу. У 1889 році Ф. Енгесер (F. Engesser) [17,18] запропонував теорію дотичного модуля для визначення критичних напружень при втраті стійкості стояків при врахуванні пружно-пластичних властивостей сталі. Через деякий час після досліджень А. Консідера (Considere A., 1891 р.), [19] Ф. Енгесер запропонував теоретичний підхід подвійного модуля для визначення стійкості металевих стрижнів. В наступних дослідженнях у 1908 р. Карман Т. (*Theodore von Kármán*) [8, 19] експериментально підтвердив можливість використання теорії подвійного модуля для визначення критичного навантаження центрально-стиснутих стрижнів. Це було суттєвим внеском у теорію стійкості сталевих елементів, бо врахування розвитку пластичних деформацій відкрило шлях до підвищення несучої спроможності сталевих конструкцій. Для практичного використання результатів Ясинським Ф. С. [20] у 1892−1893 роках було узагальнено результати експериментальних досліджень (Баушингера, Тетмайєра і Косіндера) і складені таблиці критичних напружень для стрижнів з різною гнучкістю. Джонсоном, (Johnson, J. B.) у 1983−2004 рр. [21] отримана апроксимуюча крива для розрахунку стійкості й запропонована формула для визначення критичних напружень при розвитку обмежених пластичних деформацій. $\sigma_{cr}= \alpha - \beta\lambda^2$, α і β – деякі коефіцієнти характеристик стрижня і сталі. В більшості випадків формулу Джонсона при розвитку пластичних деформацій для діапазону гнучкості $\lambda \leq \lambda_1$ використовують як апроксимацію у формі запису: $\sigma_{cr}= f_y - (f_y - \sigma_e)(\lambda_1/\lambda)^2$. Для такої апроксимації для коефіцієнта поздовжнього згину отримуємо параболічну залежність для коефіцієнта поздовжнього згину: $\varphi= \sigma_{cr}/ f_y= 1 - (1-\sigma_e/ f_y)(\lambda_1/\lambda)^2$. Лінійну апроксимацію для визначення критичних напружень при розвитку обмежених пластичних деформацій використовували Тетмайер і Ясинський Ф. С. Тетмайер запропонував таку залежність: $\sigma_{cr}= \sigma_u[1-a\ \lambda]$, де $a_1 = (1/\pi)[(\sigma_e /E)(1-\sigma_e/\sigma_u)]^{0,5}$, σ_e – границя пропорційності роботи сталі на розтяг, σ_u – тимчасовий опір сталі. При використанні діаграми розтягу сталі Прандтля він прийняв позначення гнучкості, більше якої відбувається пружна втрата стійкості стрижня $\lambda_1 =\pi(E/f_y)^{0,5}$, тоді формула Тетмайєра [8] набуває вигляду: $\sigma_{cr}= \alpha- \beta\lambda$, $\sigma_{cr}= \sigma_u[1 - a\ (\lambda / \lambda_1)]$, *де* $a_1 = [(1-\sigma_e/\sigma_u)]^{0,5}$. Ясинський Ф.С, способом найменших квадратів, обробляє експериментальні дані Тетмайєра і Косіндера й запропоновану формулу $\sigma_{cr}= a - b\lambda$, *де* λ – розрахункова гнучкість стрижня, гнучкість стрижня; a =310 МПа, коефіцієнт b =1,14 МПа. Однією з формул для визначення стійкості стрижня з урахуванням розвитку пластичних деформацій за діаграмою Прандтля стала відома формула Ренкіна (Rankine W. J.) [22]: $\sigma_{cr}=\sigma_0/(1+\alpha\lambda^2)$, де σ_{cr} – критичні напруження, λ – гнучкість елемента, α-емпіричний коефіцієнт. В останній формулі можна прийняти $\sigma_0 =\sigma_y$, та $\alpha=\sigma_y/(\pi^2E)$, $\sigma_{El}=\pi^2E/\lambda^2$, тоді маємо такий запис критерію стійкості: $\sigma_{cr}=\sigma_y/(1+\lambda^2\sigma_y/(\pi^2E))=1/(1/\sigma_y + 1/\sigma_{El})$. $\sigma_{cr}=\sigma_y/(1+v)$; $v=\sigma_y/ \sigma_{El}$. Остаточно: $\sigma_{cr}/\sigma_y+\sigma_{cr}/\sigma_{El} \leq 1$. Достатній результат для практичного проектування і перевірки стійкості стрижнів дає формула: $\sigma_{cr}=f_y(1+v)/(1+v+v^2)$. Найбільш відомою формулою слід вважати також формулу: $N/N_{cr}+M/[M_{cr}(1-N/N_{El})]\leq 1$. У 1947 році Ф. Шенлі (Chanley F.R.,) [27,28] розробив і обґрунтував новий концептуальний підхід для оцінки втрати стійкості стрижня з урахуванням пружно-пластичних властивостей матеріалу. Теоретичні положення дотичного і подвійного модуля, на сьогодні, є основами з визначення несучої здатності центрально-стиснутих і позацентрово-стиснутих металевих елементів: стрижнів, колон, стояків.

В подальшому, в основу даних для визначення фактора стійкості за європейськими нормами [10…13, 23…26, 29…51] з урахуванням пластичних деформацій при втраті стійкості колон, взяті експериментальні дані та їх статистична обробка з подальшою апроксимацією параболічною залежністю.

У ряді робіт авторів [6, 52, 53] пропонується узагальнений підхід для теоретичного обґрунтування коефіцієнта поздовжнього згину центрально-стиснутих стрижнів і колон з урахуванням початкових залишкових напружень, початкових ексцентриситетів дії поздовжньої сили та початкових вигинів і приведеного модуля.

Виклад основних результатів досліджень. Розглянута традиційна поведінка сталевого елемента при втраті стійкості при центральному стиску. Відомо, що теорія втрати стійкості ідеального стрижня (колони) не може бути застосована на практиці внаслідок впливу технології виготовлення конструкцій та допусків точності під час збирання та виготовлення конструкцій сталевого каркасу й окремих елементів. Тому, під час розрахунку стійкості центрально-стиснутих колон розглянуто розрахункову модель стиснутої колони з ексцентриситетом прикладання поздовжньої сили. Ексцентриситет, між віссю поздовжньої сили і віссю стрижня, складає незначну величину $e_b \le i_x / 20$. Неточності виготовлення сталевих конструкцій, окрім ексцентриситету прикладання поздовжньої сили, враховані через початковий вигин осі стрижня та початкові залишкові деформації: $\delta_0 = l_0/750 ... \ l_0/500$. Розвиток пружно-пластичних деформацій враховують через теорію подвійного модуля. Прийнято також, що пружно-пластичні деформації починаються в напруженні (σ_e), яке береться з діаграми розтягу сталі. Прийнято принцип суперпозиції напружень, загальні деформації що виникають при втраті стійкості стрижня, розділені на три складові: деформації від центрального стиску (ε_N), деформації початкових недосконалостей (ε_0), деформації від поздовжнього згину (ε_M) при втраті стійкості, що враховують також початкові ексцентриситети прикладання поздовжньої сили та початкові вигини. При втраті стійкості в крайніх фібрових волокнах стрижня існують пружно-пластичні і пластичні деформації. Внаслідок поздовжнього згину та початкових недосконалостей такі деформації можуть мати значення, близькі до деформацій границі текучості сталі (ε_y), або можуть перевищувати їх ($\varepsilon_{pl} = n_{ply} \varepsilon_y$, $\varepsilon_y = f_y/E$, E – модуль деформації сталі). Загальна жорсткість стрижня з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій враховується через теорію приведеного модуля.

Таким чином, прийнята робоча гіпотеза, що в поперечному перерізі в крайніх фібрових волокнах стрижня виникають пластичні деформації при втраті стійкості [6, 52, 53].

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_0 + \varepsilon_N + \varepsilon_M . \tag{3.a}$$

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_0 + \sigma_{cal}/E + (0{,}5\pi^2 h/l^2)\ (\delta_{f0} + e_b + e_{pl})/(\sigma_{cr}/\ \sigma_{cal} - 1). \tag{3.b}$$

Кожне значення деформацій, що входить до формул (3), залежить від особливих чинників. Деформації від центрального стиску (ε_N) залежать від значення поздовжньої сили (N) і модуля пружності сталі (E). Вважається, що нормальні напруження від поздовжньої сили не більше певного нормативного значення від міцності сталі ($\sigma_{cal}= N/ A_{cal} \leq f_y$), відповідно деформації при ідеальному стиску можуть приймати значення:

$$\varepsilon_{Ny}= \sigma_{cal}/E_t, \text{ при } f_e< \sigma_{cal}= N/ A_{cal} \leq f_y. \tag{4.a}$$

$$\varepsilon_{Ne}= \sigma_{cal}/E, \text{ при } \sigma_{cal}=N/ A_{cal} \leq f_e. \tag{4.b}$$

Деформації від згину (ε_M) залежать від максимальних вигинів при втраті стійкості стрижня (δ_m): $\varepsilon_M = \dfrac{y}{p_x} \to \dfrac{1}{p_x} = -\delta_m \dfrac{\pi^2}{l^2}\left(-\sin\dfrac{\pi l}{2l}\right)$; $\varepsilon_m= y\pi^2\delta_m/l^2$.
Максимальний вигин стрижня залежить також від початкових недосконалостей (δ_{f0}, e_b) та додаткового ексцентриситету (e_{pl}) поздовжньої сили: $\delta_m= \delta_{f0}+e_b+e_{pl}$. Додатковий ексцентриситет (e_{pl}) поздовжньої сили виникає від розвитку обмежених пластичних деформацій і зміщення осі центру перерізу. Зміщення осі центру перерізу є наслідком зміни модуля деформації сталі у фібрах, в яких розвиваються пружно-пластичні і пластичні деформації. Ексцентриситет (e_{pl}) залежить також від форми перерізу стрижня. Максимальні переміщення δ_m при втраті стійкості серединного перерізу ($z=l/2$), окрім початкових недосконалостей прикладання зусилля та початкових прогинів, буде залежати від поздовжнього згину: зростання згинального моменту в серединному перерізі елемента від поздовжньої сили. Відоме рішення $\eta=f_m\sin(\pi z/l)$; $\eta^{//}=-f_m\ \pi^2\ /l^2\sin(\pi z/l)$, диференціального рівняння EI_x: $\eta^{//}+N\ (\eta+\delta_{f0}+e_b)=0$ рівноваги позацентрово-стиснутого стрижня [7, 8] при $z=l/2$ приводить до мультиплікатора: $\delta_m= (\delta_{f0}+e_b+e_{pl})/[(\pi^2 EI_x\ /\ l^2\ )/N\ -1]$. Критичні напруження при втраті стійкості та при врахуванні приведеного модуля деформацій (T_y) мають вигляд за формулами Ейлера-Кармана [7, 8].

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{\lambda_x^2} T_y = \frac{\pi^2 E T_y}{\lambda_x^2 E}\ . \tag{5}$$

Об'єднання формул (1…5) дає вираз для визначення загальних деформацій при втраті стійкості стрижня [6]. Загальні деформації визначаються через збільшення початкових розрахункових нормальних деформацій до пластичних деформацій в крайніх фібрових волокнах.

Крайні фіброві волокна мають координату поперечного перерізу ($y=h_0/2$). Введення в рівняння (3) радіусу інерції перерізу $(i_x)^2 = I_x/A_{cal}$, використання відношення площі до моменту опору перерізу $0,5h/(i_x)^2 = 0,5hA_{cal}/I_x = A_{cal}/W_x$ відкриває можливість перейти до відносного ексцентриситет $m_{xfb}=A_{cal}(\delta_{f0}+e_b+e_{pl})/W_x$ та гнучкості колони $\lambda_x=l/ i_x$.

$$\varepsilon_{pl}=\varepsilon_{0rs}+\sigma_{cal}/E+[\pi^2/(\lambda_x)^2]m_{xfb}/(\sigma_{cr}/\sigma_{cal}-1),\ \text{при}\ f_e<\sigma_{cal}=N/A_{cal}\leq f_y. \quad (6)$$

$$\varepsilon_{pl}=\varepsilon_{0rs}+(\sigma_{cal}/E)(E/E_t)+[\pi^2/(\lambda_x)^2]m_{xfb}/(\sigma_{cr}/\sigma_{cal}-1),\ \text{при}\ \sigma_{cal}=N/A_{cal}\leq f_e \quad (6.b)$$

Поточні нормальні напруження, при яких може відбуватися початок втрати стійкості стрижня, і що приводить до появи в крайніх фібрових волокнах перерізу стрижня напружень, рівних границі текучості сталі, приводять через коефіцієнт поздовжнього згину (φ) до границі текучості сталі (f_y). Від рівнянь (6) виконується перехід до квадратного рівняння відносно коефіцієнта поздовжнього згину ($\sigma_{cal}=N/A_{cal}=\varphi f_y$).

$$\varepsilon_{pl}=\varepsilon_{0rs}+\frac{\varphi f_y}{E}+\frac{\pi^2}{\lambda_x^2}\frac{m_x f_b}{\left(\frac{\pi^2 ET_y}{\lambda_x^2 f_y \varphi E}-1\right)}. \quad (7.a)$$

$$\varepsilon_{pl}=\varepsilon_{0rs}+\frac{\varphi f_y}{E}\frac{E}{E_t}+\frac{\pi^2}{\lambda_x^2}\frac{m_x f_b}{\left(\frac{\pi^2 ET_y}{\lambda_x^2 f_y \varphi E}-1\right)}. \quad (7.b)$$

Використання величини умовної гнучкості: $\overline{\lambda_x^2}=\lambda_x^2\frac{f_y}{E}$ дає таке узагальнене рівняння для визначення коефіцієнта поздовжнього згину при втраті стійкості стрижня:

$$\varphi^2\overline{\lambda_x^2}-\varphi\frac{E_t}{E}\left[\pi^2\left(\frac{T_y}{E}+m_{xfb}\right)+\overline{\lambda_x^2}\frac{E}{f_y}\left(\varepsilon_{pl}-\varepsilon_{0rs}\right)\right]+ +\pi^2\frac{E_t}{E}\frac{E}{f_y}\frac{T_y}{E}\left(\varepsilon_{pl}-\varepsilon_{0rs}\right)=0, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{pl}\left(\frac{\pi^2 E}{f_y}\frac{T_y}{\varphi E}-\lambda_x^2\right)=\varepsilon_{0rs}\left(\frac{\pi^2 E}{f_y}\frac{T_y}{\varphi E}-\lambda_x^2\right)+\frac{\varphi f_y}{E}\frac{E}{E_t}\left(\frac{\pi^2 E}{f_y}\frac{T_y}{\varphi E}-\lambda_x^2\right)+\pi^2 m_{xfb}.$$

Використання величини умовної гнучкості: $\overline{\lambda_x^2} = \lambda_x^2 \dfrac{f_y}{E}$, дає таке рівняння для визначення коефіцієнта поздовжнього згину при втраті стійкості стрижня:

$$\varphi^2 \overline{\lambda_x^2} - \varphi \frac{E_t}{E}\left[\pi^2\left(\frac{T_y}{E} + m_{xfb}\right) + \overline{\lambda_x^2}\,\frac{E}{f_y}\left(\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{0rs}\right)\right] + \\ +\pi^2 \frac{E_t}{E}\frac{E}{f_y}\frac{T_y}{E}\left(\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{0rs}\right) = 0. \tag{8.a}$$

Вводимо позначення функцій Φ_{B1t} і Φ_{B2t}.:

$$\varphi^2 \overline{\lambda_x^2} - \varphi \frac{E_t}{E}\left[\pi^2\left(\frac{T_y}{E} + m_{xfb}\right) + \overline{\lambda_x^2}\,\frac{E}{f_y}\left(\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{0rs}\right)\right]; \\ \Phi_{B2t} = \frac{E_t}{E}\frac{E}{f_y}\frac{T_y}{E}\left(\varepsilon_{pl} - \varepsilon_{0rs}\right). \tag{8.b}$$

Тепер рівняння з визначення коефіцієнта поздовжнього згину при перевірці стійкості центрально-стиснутого стрижня має запис:

$$\varphi^2 \overline{\lambda_x^2} - \varphi \Phi_{B1t} + \pi^2 \Phi_{B2t} = 0\,. \tag{8.c}$$

Квадратне рівняння (8.c), яке отримане в результаті наших досліджень, має рішення:

$$\varphi = \frac{\Phi_{B1t} \mp \sqrt{\left(\Phi_{B1t}\right)^2 - 4\Phi_{B2t}\pi^2 \overline{\lambda_x^2}}}{2\overline{\lambda_x^2}}. \tag{8.d}$$

Отримана формула (8.d) є подібною за структурою до формули норм з проектування сталевих конструкцій (1.b), що вказує на вірність теоретичних гіпотез, прийнятих у дослідженнях.

Квадратне рівняння (8.c) може мати такий вигляд.

$$\left(\frac{1}{\varphi_{1t}}\right)^2 \pi^{2\Phi_{B2t}} - \frac{1}{\varphi_{1t}}\Phi_{B1t} + \overline{\lambda_x^2} = 0\,. \tag{9}$$

$$\left(\frac{1}{\varphi_{1t}}\right)^2 - \frac{1}{\varphi_{1t}}\frac{\Phi_{B1t}}{\pi^2 \Phi_{B2t}} + \frac{\overline{\lambda_x^2}}{\pi^2 \Phi_{B2t}} = 0\,. \tag{9.a}$$

$$\frac{1}{\varphi_1}=\frac{\Phi_{B1}}{2\pi^2\Phi_{B2}}\mp\sqrt{\left(\frac{\overline{\Phi_{B1}}}{2\pi^2\Phi_{B2}}\right)^2-\frac{\overline{\lambda_x^2}}{\pi^2\Phi_{B2}}}\,. \tag{9.b}$$

Подальші перетворення приводять до запису:

$$\chi_{1t}=\left(\varphi_{1t}\right)=\frac{1}{\frac{\Phi_{B1t}}{2\pi^2\Phi_{B2t}}\mp\sqrt{\left(\frac{\overline{\Phi_{B1t}}}{2\pi^2\Phi_{B2t}}\right)^2-\frac{\overline{\lambda_x^2}}{\pi^2\Phi_{B2t}}}}. \tag{9.c}$$

Формула (9.c) є подібною за структурою до формули європейських норм з проектування металевих конструкцій (2.b), що підтверджує вірність аналітичного підходу до дослідження стійкості центрально-стиснутих металевих стрижнів з урахуванням розвитку пружно-пластичних деформацій та початкових геометричних недосконалостей.

Формули (8.d) та (9.c) спрощуються і переходять до формул, отриманих у роботі [6], і ще більше наближаються до формул вітчизняних та європейських норм (1.b, 2.b), якщо прийняти $\frac{E_t}{E}=1,0;$ початкові залишкові деформації відсутні $\varepsilon_{0rs}=0;\ f_y=T_y\varepsilon_{pl}$.

В даному випадку маємо $\Phi_{B2t}=1,0$.

$$\varphi=\frac{\Phi_{B1t}\mp\sqrt{\left(\Phi_{B1t}\right)^2-4\pi^2\overline{\lambda_x^2}}}{2\overline{\lambda_x^2}}. \tag{10.a}$$

$$\chi_{1t}=\left(\varphi_{1t}\right)=\frac{1}{\frac{\Phi_{B1t}}{2\pi^2}\mp\sqrt{\left(\frac{\overline{\Phi_{B1t}}}{2\pi^2}\right)^2-\frac{\overline{\lambda_x^2}}{\pi^2}}}. \tag{10.b}$$

Висновки

Підтверджено теоретичні основи узагальненого деформаційного підходу для визначення коефіцієнта поздовжнього згину центрально-стиснутого стрижня при врахуванні початкових залишкових напружень, ексцентриситету прикладання поздовжньої сили, початкових вигинів. Також враховується точка початку втрати стійкості через відношення значення дотичного модуля до значення модуля пружності сталі. Показано узагальнене теоретичне обґрунтування розрахунку центрально-стиснутих стрижнів за вітчизняними і європейськими нормами. Відмінність між нормативними документами з проектування металевих конструкцій за ДБН і Єврокодом 3 пояснюється різними базовими експериментальними результатами, що апроксимуються. Знак «плюс» або «мінус» перед знаком радикала у формулах (1, 2, 8, 9, 10) пояснюється тим, що величини фактору стійкості повинні бути менше одиниці в певному діапазоні, а при незначній умовній гнучкості вираз не повинен давати невизначеність. В останньому сенсі, формула європейських норм більш доречна, але має обмеження мінімальної величини умовної гнучкості. Можлива певна взаємна заміна формул для визначення центрально-стиснутих стрижнів через врахування приведених досліджень.

Література

[1] Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings : EN 1993-1-1:2005. – Brussels : CEN–CENELEC Management Centre, 2005. – 91 p. – (European Standard).

[2] Сталеві конструкції. Норми проектування : ДБН В.2.6-198:2014 – Офіц. вид. – К. : Мінрегіонбуд України Київ, 2015. – 199 с. – (Конструкції будівель і споруд. Державні будівельні норми України).

[3] Єврокод 3. Проектування сталевих конструкцій. Частина 1-3. Загальні правила. Додаткові правила для холодноформованих елементів і профільованих листів (EN 1993-1-3:2006, IDT) : ДСТУ-Н Б EN 1993-1-3:2012. – Офіц. вид. – К. : Мінрегіонбуд України, 2013. – С. 6–25. – (Система надійності та безпеки у будівництві. Національний стандарт України).

[4] Расчет стальных холодноформованных профилей в соответствии с Еврокодом 3 / [Хэйвуд М., Уэй. Э., Беляєв Н. А., Білик С .І. и др.]; Украинский Центр Стального Строительства. − К. : 2015 Изд-во ООО «НПП «Интерсервис»», 2015. − С. 99.

[5] Білик С. І. Коефіцієнт поздовжнього згину і фактор стійкості центрально-стиснутих сталевих елементів за нормативними вимогами і теоретичним підходом з урахуванням початкових залишкових деформацій та геометричних недосконалостей / С. І. Білик, А. С. Білик // Строительство, материаловедение, машиностроение : Сб. науч. трудов. −ДН-ВСК : ГВУЗ ПГАСА, 2015. − № 82. − с. 32−37.

[6] Timoshenko S. P. Theory of Elastic Stability / S. P. Timoshenko, J. M. Gere. − New York : McGraw Hill Kogakusha Ltd., 1961. − 541 p.

[7] Timoshenko S. P. History of Strength of Materials / S. P. Timoshenko. − New York : McGraw-Hill, 1953. – 452 p.

[8] Тимошенко С. П. Об устойчивости упругих систем / С. П. Тимошенко. − Київ : Типографія С. В. Кульженко, 1910. − 188 с

[9] Bleich F. Buckling Strength Of Metal Structures / F. Bleich. − New York : McGraw-Hill Book Co., Inc., 1952. − 498 p.

[10] Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкцій / Ф Блейх. – М. : Госиздат физ-мат литературы, 1959. – 544 с.

[11] Barta Thomas A. Some simple thoughts on column buckling / Thomas A. Barta. − 1975. − Band 23. − P. 178−291

[12] Jones R**.** M**.** Deformation Theory of Plasticity/ R**.** M**.** Jones // Blacksburg (Virginia,USA) : Bull Ridge Publishing, 2009. – 622 p.

[13] Singer J. Buckling Experiments, Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures / J. Singer, J. Arbocz, T. Weller // Shells, Built-up Structures, Composites and Additional Topics. − New York : John Wiley and Sons Inc., 1998. − Volume 2. – 1136 p.

[14] Euler L. Sur La Force De Colonnes / L. Euler // Memoires de Acadgmie de Berlin. − T. XIII (1759). − 252 p.

[15] Musschenbroek P. Van. Introductio da Cohaerentiam Corporum Firmorum / P. Van. Musschenbroek. − Lugduni, 1729. − 258 p.

[16] Youngs T. A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts / T. Youngs. − London, 1807. − P. 320−324.

[17] Engesser F. Ueber die Knickfestigkeit gerader Staebe / F. Engesser // Zeits. f. Arch. U. Ing. − Ver. zu Hannover, 1889. −Vol. XXXV. − 455 p.

[18] Engesser F. Ueber die Berechnung auf Knickfestigkeit beanspruchter Staebe / F. Engesser / Aus Schweissund Flusseisen : Zeits. d. Oest. Ing. U. Arch. − Ver. Wien. : 1893. − 506 p.

[19] Considere A. Resistance Des Pieces Comprimees / A. Considere // Congr'ds Int. Des Procedes De Const. − Paris : Exposition Univ. Int. de 1889, − 371 p.

[20] Jasinsky, F. S., "La flexion des pieces comprimdes", Ann. Ponts Chaussdes, 2nd part, 1894, p. 233.

[21] Johnson J. B. The theory and practice of modern framed structures / Johnson J. B. − New York, 1893. − 538 p.

[22] Rankine W. J. Useful rules and tables / W. J. Rankine // The strength of struts : Selected Engineering Paper. − London : Robertson, A.,1866; ICE, 1925. − No. 28. − 304 p.

[23] Jezek K. Formulae for the Stability of Eccentrically Loaded Steel Columns. Importance of the ductility of steel for calculating and dimensioning steel structural work, especially when statically indeterminate / K. Jezek // IABSE congress report . − 1938. − P. 87−89.

[24] Ramberg W. Instability of extrusions under compressive loads / W. Ramberg, S. Levy // Journal of the Aeronautical Sciences. − 1945. − Vol. 12, October. − 485 p.

[25] Ramberg W. Description Of Stress-Strain Curves By Three Parameters / W. Ramberg,, W. Osgood. − NACA, 1943. − TN 902. − 13 p.
[26] Southwell R. V. On The Analysis Of Experimental Observations In Problems Of Elastic Stability / R. V. Southwell // Proc. Roy. Soc. − London : Series A. 135, 1932. − P. 601−616.
[27] Shanley F. R. Inelastic column theory / F. R. Shanley // Journal of the Aeronautical Sciences. − 1947. − Vol. 14, May. − P. 261−268.
[28] Shanley F. R. The Column Paradox /. F. R. Shanley // Journal of the Aeronautical Sciences. − 1946. − Vol. 13, No. 12 . − P. 78−678.
[29] Paris, P. C. Limit design of columns / P. C. Paris // Journal of the Aeronautical Sciences. − 1954. − Vol. 21, No. 1, January. − P. 43−49.
[30] Massonnet C. Stability considerations in design of steel columns / C. Massonnet // Journal of the Structural Division. Proceedings ASCE. − 1959. − Vol. 85, No. S717, September. − P. 75−111.
[31] Lee A. Y. A study on column analysis : Thesis presented in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy / A. Y. Lee ; Cornell University at Ithaca. − New York, June, 1949.
[32] Lin T. H. Inelastic column buckling / T. H. Lin // Journal of the Aeronautical Sciences. − 1950. − Vol. 17, No. 3. − P. 159−172.
[33] Johnston B. G. Column buckling theory: historic highlights / B. G. Johnston // Journal of Structural Engineering, ASCE. − 1983. − Vol. 109, No. 9, September. − P. 2086−2096.
[34] Johnston B. G. Guide to stability criteria for metal structures; 3rd ed. / B. G. Johnston. − New York : John Wiley & Sons, Inc., 1976. − P. 554−584.
[35] Duberg J. E. Inelastic column behavior / J. E. Duberg, Thomas III W. Wilder // National advisory committee for aeronautics; Technical note 226. − Langley Field (VA) : Langley Aeronautical Laboratory, 1951. − 44 p.
[36] Duberg John E. Inelastic column behavior / John E. Duberg, Thomas III W. Wilder // National advisory committee for aeronautics; Technical note 1072. − Langley Field (VA) : Langley Aeronautical Laboratory, 1951. − 302 p.
[37] Duberg John E. Inelastic column behavior / John E. Duberg, Thomas III W. Wilder // National advisory committee for aeronautics; Technical note 2267. − Langley Field (VA) : Langley Aeronautical Laboratory, 1951. − 44 p.
[38] Dwight J. B. Use of Perry Formula to Represent the New European Strut Curves / J. B. Dwight // Cambridge University; Department of Engineering Report. CUED/C-Struct/TR.30. − 1975. − P. 399−412.
[39] Davies J. M. Second-Order Generalised Beam Theory / J. M. Davies, P. Leach, D. Heinz // J. of Constructional Steel Research. − Elsevier, 1994. − 31(2-3). − P. 221−242.

[40] Young B. W. Steel column design / B. W. Young // The Structural Engineer. − 1973. − Vol. 51, No. 9, September. − P. 323−336.

[41] Young B. W. The analysis of column buckling behaviour / B. W. Young // Lecturer in Structural Engineering School of Applied Sciences; University of Sussex Brighton, England; IABSE reports of the working commissions; Rapports des commissions de travail AIPC. − Brighton, England, 1975. − P. 136−151.

[42] Yang C. H. Residual Stress and the Yield Strength of Steel Beams / C. H. Yang, L.S. Beedle, B.G. Johnston // The welding journal. − 1952. − Research Supplement 31 (4). − P. 205−229.

[43] Young B. W. Residual stresses in hot rolled members / B. W. Young // Lecturer in Structural Engineering School of Applied Sciences; University of Sussex Brighton, England; IABSE reports of the working commissions. − Brighton, England, 1975. – P.13−38.

[44] Tebedge N. Experimental studies on column strength of european heavy shapes / N. Tebedge, Wai-Fah Chen, Lambert Tall // Fritz Engineering Laboratory Lehigh; University Bethlehem, Pennsylvania U.S.A; IABSE reports of the working commissions. − 1975. − P.301− 320.

[45] Beer H. Bases Theoriques des Courbes Europeennes de Flambement / H. Beer, G.Schulz // Construction Metallique. − 1970. − No. 3. − P. 37−57.

[46] Sfintesco D. Fondement Experimental des Courbes Europeennes de Flambement / D. Sfintesco // Construction Metallique. − 1970. − No. 3. − P. 5−12.

[47] Baker M. J. Variability in the Strength of Structural Steels / M. J. Baker. − C.I.R.I.A, 1973. − 46 p

[48] Stevens L. K. Plastic Design and Trussed Frames / L. K. Stevens // Conf. on Engineering Plasticity. − Cambridge, 1968. – P. 26−33.

[49] Yeong C. Y. Post-buckling Behaviour of Tapered Columns under a Combined Load using Differential Transformation / C. Y. Yeong // Architectural Research. − 2006. No. 8. − P. 47−56.

[50] Hwon-mo Parka . Evaluation on the Post-buckling Residual Strength of H-shaped Steel Column / Hwon-mo Parka, Jae-hyouk Choib // Procedia Engineering. − 2011. − No. 10 − P. 3387–3392.

[51] Huang N. C. Inelastic buckling of eccentrically loaded columns / N. C. Huang // AIAA Journal. − 1973. − Vol. 11, No. 7. − P. 974−979.

[52] Феодосьев. В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев.– М. : Наука, 1967. – 376 с.

[53] Білик С. І. Стійкість холодно гнутих швелерів з урахуванням пластичних властивостей мало вуглецевих сталей / [С. І. Білик, А. С. Білик, М.В. Усенко, О.Є. Золотопольський] // Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського. Вип. 7. – К. : Вид-во «Сталь», 2011. – С. 26−35.

[54] Bilyk S. The peculiarities of buckling and strength analysis of frame elements of I-shaped cross-section with variable web height / S. Bilyk // Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures : Proceeding of the XI International Conference On Metal Structures (ICMS-2006), Pzeszow, Poland, 21−23 June, 2006. − P. : 144−145.

Надійшла до редколегії 4.07.2015 р.