использовать определяющие уравнения деформационного типа с линейной зависимостью между девиаторами напряжений и деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н. Определяющие уравнения термопластичности с учетом третьего инварианта // Прикл. механика, 46, № 6, 2010. С. 3-16.
2. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде // ПММ. – 1951. - 15, №.2. - С.183-194.
3. Тормахов Н.Н. О связи между напряжениями и конечными пластическими деформациями при простом нагружении в пространстве истинных напряжений // Ред. Ж. "Прикл. мех.", Киев, 1985, Рук. деп. в ВИНИТИ 12.11.85№ 7899-В. 13 С.
4. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. Физические уравнения термовязкопластичности. К.: Наук. думка. – 1982. – 240 с.
5. Тормахов Н.Н. Тензометр для высокотемпературных испытаний // Заводская лаборатория. – 1994. - №9, с. 58-59.

УДК 517.5

ДЕРЕЦ Е. В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Получена оптимальная интервальная квадратурная формула для класса дифференцируемых периодических функций с заданной выпуклой вверх мажорантой модуля непрерывности третьей производной. При этом рассматриваются квадратурные формулы с непересекающимися узловыми интервалами, использующие усреднение функции и её производной.

The optimal interval quadrature formula in the class of functions with convex magorant of the modulus of continuity of third derivative is obtained. The interval quadrature formula is imputate disjoint intervals and averaging of function and it's derivative.

Введение. Одним из традиционных объектов исследования в теории приближений являются методы приближения интегралов. Общая постановка экстремальной задачи теории квадратур и первые основополагающие результаты принадлежат С.М. Никольскому и А.Н. Колмогорову. Большое количество работ посвящено решению для различных классов функций задач оптимизации формул приближенного интегрирования, использующих значения функции в n точках (узлах) (см., например, [4, 7, 9, 10] и библиографию к ним). Вместе с тем в ряде работ рассматривались задачи оптимизации так называемых интервальных квадратурных формул, в которых вместо значений функции в узлах использовались усредненные значения интегрируемой функции, либо функции и ее производных по некоторым интервалам в области определения. С точки зрения приложений использование интервальных квадратурных формул является более естественным, чем приближенное интегрирование, использующее значения функции в узлах, поскольку результаты измерений физических величин являются средними значениями измеряемой функции.

Перейдем к точной постановке рассматриваемой задачи. Будем рассматривать интервальные квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{2h}\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} c'_k \frac{1}{2h}\int_{x_k-h}^{x_k+h} f'(t)dt + R_n\left(f,\vec{c}_n,\vec{c}'_n,\vec{x}_n,h\right) \qquad (1)$$

где $\vec{c}_n = \{c_k\}_{k=1}^n$, $\vec{c}'_n = \{c'_k\}_{k=1}^n$ $(c_k, c'_k \in R)$ – коэффициенты, $\vec{x}_n = \{x_k\}_{k=1}^n$, $x_k \in [0,2\pi)$ – узлы, $h \in (0,\pi/n)$ и $R_n\left(f,\vec{c}_n,\vec{c}'_n,\vec{x}_n,h\right)$ - погрешность квадратурной формулы (1) на функции f. Погрешностью квадратурной формулы (1) на классе $\aleph$ называют величину $R_n\left(\aleph,\vec{c}_n,\vec{c}'_n,\vec{x}_n,h\right) = \sup\limits_{f\in\aleph} R_n\left(f,\vec{c}_n,\vec{c}'_n,\vec{x}_n,h\right)$. Квадратурная формула с узлами $\vec{x}_n^*$ и коэффициентами $\vec{c}_n^*$, $\vec{c}'^*_n$ называется наилучшей на классе $\aleph$, если

$$R_n(\aleph,h) = \inf_{\vec{c}_n,\vec{c}'_n,\vec{x}_n} R_n\left(\aleph,\vec{c}_n,\vec{c}'_n,\vec{x}_n,h\right) = R_n\left(\aleph,\vec{c}^*_n,\vec{c}'^*_n,\vec{x}^*_n,h)\right).$$

Интервальные квадратурные формулы изучались во многих работах (см., например, [1, 2, 11, 12]). В настоящей работе рассматривается задача оптимизации квадратурных формул вида (1) для класса функций W^3H^ω, который определяется следующим образом. Пусть H^ω - множество 2π–периодических непрерывных функций $f(t)$, модуль непрерывности которых $\omega(f,t) \le \omega(t)$, где $\omega(t)$– заданный модуль непрерывности, W^rH^ω $(r = 1,2,...)$ – множество 2π–периодических функций $f(t)$, у которых $f^{(r)}(t) \in H^\omega$.

Отметим, что при переходе к пределу при $h \to 0$ интервальная квадратурная формула $\int_0^{2\pi} f(t)dt \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{2h}\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt$ превращается в обычную квадратурную формулу, использующую значения функции в узлах. Оптимальность обычной формулы прямоугольников для классов $H^\omega[a,b]$ была доказана Н. П. Корнейчуком [5]. В. П. Моторным [8] было доказано, что формула прямоугольников при нечетных r и любом выпуклом вверх модуле непрерывности $\omega(t)$ является оптимальной для классов W^rH^ω. Р.Н. Шарипов [11] рассмотрел задачу оптимизации интервальных квадратурных формул в различных постановках на классах $Lip1$, определенных на отрезке. В. П. Моторным [12] было показано, что интервальный аналог формулы прямоугольников

$\int_0^{2\pi} f(t)dt \approx \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2h}\int_{\frac{2\pi k}{n}-h}^{\frac{2\pi k}{n}+h} f(t)dt$ для классов W_∞^r является наилучшей интервальной квадратурной формулой как среди формул вида (1), так и среди формул вида $\int_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{2h}\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt + R_n(f,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h)$, при этом рассматриваются интервальные квадратурные формулы с произвольно расположенными узловыми интервалами.

Основным результатом работы является следующая теорема

Теорема 1. Пусть $0 < h < \pi/(2n)$. Для любого выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ квадратурная формула прямоугольников с узлами $\vec{x}_n^0 = \{\tau + 2\pi(k-1)/n\}_{k=1}^n$, $\tau \in [0, 2\pi/n)$ и коэффициентами $\vec{c}_n^0 = \{2\pi/n\}_{k=1}^n$, $\vec{c}_n'^0 = 0$ является оптимальной квадратурной формулой для класса W^3H^ω среди всех квадратурных формул вида (1), узлы которых удовлетворяют условию

$$x_1 + h < x_2 - h < ... < x_k + h < x_{k+1} - h < ... < x_n + h < x_1 + 2\pi - h. \qquad (2)$$

Вспомогательные результаты. Будем называть 2π-периодическую непрерывную функцию $f(t)$ ω-сплайном, если для $t \in [x_i, x_{i+1}]$ $|f(t)| = \min\{\omega(2t - 2x_i, 2x_{i+1} - 2t)\}/2$, и при этом $f(t)$ меняет знак в каждой из точек $0 = x_0 < x_1 < ... < x_{2n} = 2\pi$. Пусть M_n - множество всех ω-сплайнов, имеющих среднее значение 0 на периоде, M_n^r - множество r-х периодических интегралов от функций $f \in M_n^r$, $\varphi_{n,0} \in M_n$ - ω-сплайн, соответствующий равномерному разбиению $x_i = \pi i/n$, $i = 0,...,2n$, $\varphi_{n,0}(t) > 0$ при $t \in (0, \pi/n)$, $\varphi_{n,r}(t) = I_r(\varphi_{n,0}(t))$ - r-й периодический интеграл от функции $\varphi_{n,0}(t)$, равный в среднем нулю. Для любой 2π-периодической интегрируемой функции $g(t)$ будем обозначать функцию Стеклова $g_h(x) = S_h g = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} g(u)du$. Кроме того, обозначим $f_{0,r}(t) = S_h\varphi_{n,r}(t) + \max_t S_h\varphi_{n,r}(t)$, $F_{n,r}(t) = \Phi(S_h\varphi_{n,r};t)$, $r = 0,1,2,...$, где $\Phi(f,t)$ - Σ-перестановка Н. П. Корнейчука функции $f(t)$ (определение и свойства перестановок приведены в [6]). Нам потребуется ряд вспомогательных утверждений, полученных в работе [3].

Лемма 1. Пусть $r = 1,2,3,...$, $0 < h < \pi/(2n)$. Для любой системы точек $\vec{x}_n = \{x_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющей условию (2), существует функция $f_r(\vec{x}_n;t) \in M_n^r$, для которой функция Стеклова $f_{r,h}(\vec{x}_n;t)$ принимает наименьшее значение, равное нулю, в этой системе точек $\vec{x}_n$.

Лемма 2. Пусть $f \in M_n$, $h < \pi/(2n)$, $\omega(t)$ - выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любого $t > 0$

$$\frac{1}{\|f_{h,\pm}\|_1}\int_0^t \Phi(f_{h,\pm};u)du \le \frac{1}{\|\varphi_{n,0}\|_1}\int_0^t F_{n,0}(u)du .$$

Лемма 3. Пусть $f \in M_n$, $h < \pi/(2n)$, $\omega(t)$ - выпуклый модуль непрерывности. Если функция Стеклова $f_h(t)$ $2n$ раз меняет знак на интервале $[0,2\pi)$, то расстояние между любыми двумя соседними экстремумами функции $f(t)$ не меньше, чем h.

Лемма 4. Пусть $f \in M_n$, $h < \pi/(2n)$, $\omega(t)$ - выпуклый модуль непрерывности. Если функция Стеклова $f_h(t)$ $2n$ раз меняет знак на интервале $[0,2\pi)$, то

$$\left|\Phi'\left(\{f_{1,h}\}_{\pm};t\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|F'_{n,1}(t)\right| \quad \text{для всех } t \in (0,\pi/n), \tag{3}$$

$$\left|\Phi'\left(f_{1,h};t\right)\right| \le \left|F'_{n,1}(t)\right| \quad \text{для всех } t \in (0,\pi/n), \tag{4}$$

при этом неравенства (3) и (4) являются строгими на множестве положительной меры, если $f(t)$ отлична от $\varphi_{n,0}(t+\alpha)$.

Положим $\gamma_k = \gamma_k(f) = \dfrac{\|f_{k,h}\|_1}{\|S_h\varphi_{n,k}\|_1}$, $k = 0,1,...$, где $f_{k,h} = I_k f_h$ и $f \in M_n$.

Лемма 5. Если $f \in M_n$, то $\|f_h\|_1 \ge \|S_h\varphi_{n,0}\|_1$, то есть $\gamma_0 \ge 1$.

Лемма 6. Пусть $f \in M_n$ и $h < \dfrac{\pi}{n}$. Если функция Стеклова $f_h(t)$ $2n$ раз меняет знак в интервале $[0,2\pi)$ и функция $f(t)$ отлична от $\varphi_{n,0}(t+a)$, то $1 < \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2$.

Основные результаты.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in M_n$ и $h < \pi/(2n)$. Предположим, что функция Стеклова $f_h(t)$ $2n$ раз меняет знак в интервале $[0,2\pi)$, $g(t) = I_3 f_h(t) + C$, где C - произвольная константа. Рассуждая так же, как при доказательстве неравенства (38) в работе [12], можно показать, что

$$\Psi(g;t) \ge \gamma_2 \Psi(S_h\varphi_{n,3}(t)), \tag{5}$$

где $\Psi(g;t)$ - функция, определенная в работе [12]. При этом вместо соответствующих лемм работы [12] используются леммы 2-5.

Рассмотрим произвольную интервальную квадратурную формулу вида (1), у которой узлы $\vec{x}_n$ удовлетворяют условию (2), но при этом вектор $\vec{x}_n$ отличается от вектора $\vec{x}_n^0$ и его сдвигов. Пусть $f_3^{(3)}(\vec{x}_n;t)$ – функция, существование которой доказано в лемме 1. Поскольку функция $f_3(\vec{x}_n;t)$ обращает в ноль квадратурную сумму, справедлива оценка

$$R_n(W^3H^\omega,\vec{c}_n,\vec{c}\,'_n,\vec{x}_n,h) > R_n(f_3(\vec{x}_n,t),\vec{c}_n,\vec{c}\,'_n,\vec{x}_n,h) = \int_0^{2\pi} f_{3,h}(\vec{x}_n,t)dt$$

Так как $f_3^{(3)}(\vec{x}_n;t)$ $2n$ раз меняет знак в интервале $[0,2\pi)$, то в силу (5) и леммы 6 справедлива оценка

$$\int_0^{2\pi} f_{3,h}(\vec{x}_n,t)dt = \int_0^{2\pi} \Psi\big(f_{3,h}(\vec{x}_n,*);t\big)dt \ge \gamma_2 \int_0^{2\pi} \Psi\big(S_h\varphi_{n,3}(*);t\big)dt = \gamma_2 \int_0^{2\pi} f_{0,3}(t)dt > \int_0^{2\pi} f_{0,3}(\vec{x}_n,t)dt,$$

где $f_{0,3}(t) = S_h\varphi_{n,3}(t) + \max_t S_h\varphi_{n,3}(t)$.

Для доказательства теоремы остается заметить, что в силу основной леммы Н.П. Корнейчука [6, стр. 190]

$$\int_0^{2\pi} f_{0,3}(\vec{x}_n,t)dt = R_n(W^3H^\omega,\vec{c}_n^{\,0},\vec{c}\,'^{\,0}_n,\vec{x}_n^{\,0},h).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко В. Ф. Об одной задаче оптимизации приближенного интегрирования / В. Ф. Бабенко // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их приложениям. –Днепропетровск, 1984. –С. 3–13.
2. Бабенко В. Ф. Об оптимальных интервальных квадратурных формулах на классах дифференцируемых периодических функций / В. Ф. Бабенко, Д.С. Скороходов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007. – № 8. – С. 16–25.
3. Дерец Е. В. О наилучшей интервальной квадратурной формуле для класса функций W^3H^ω / Е. В. Дерец // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2011. – Т. 19, № 6/1. – С. 47 – 56.
4. Женсыкбаев А. А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. – 1981 – Т. 36, №4. – С. 107 – 159.
5. Корнейчук Н. П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных / Н. П. Корнейчук // Мат. заметки. – 1968. – 3, №5. – С. 565-576.
6. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук – Наука, М. – 1976.
7. Моторный В.П. Исследования Днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн.–1990 – Т. 42, вып.1.– С. 18 – 33.
8. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / В. П. Моторный // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1974. – 38б №3. – С. 583–614.
9. Никольский С. М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988.
10. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974.
11. Шарипов Р.Н. Наилучшие интервальные квадратурные формулы для классов

Липшица / Р. Н. Шарипов // Конструктивная теория функций и функцион. анализ. Казань, 1983. – Вып. 4. – С. 124 – 132.

12. Motornyi V. P. On the best interval quadrature formula in the class of functions with bounded r^{th} derivative // East journal of approximations. – 1998. - Vol. 4 , №4. – P. 459 – 478.

СКОСАРЕНКО Ю.В.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ КРАТКОВРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК

В работе рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния замкнутой ребристой цилиндрической оболочки, подверженной действию распределенных по ее поверхности кратковременных усилий. На торцах оболочки заданы граничные условия шарнирного опирания. В основу решения задачи положена классическая теория оболочек и стержней и энергетический метод.

The paper considers the problem of determining the stress-strain state of ribbed cylindrical shell closed, subject to the action distributed over the surface of short-term effort. At the ends of the shell are given simple support boundary conditions. The basis of decision laid the classical theory of shells and cores, and the energy method.

Введение. Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния замкнутой ребристой цилиндрической оболочки, подверженной действию распределенных по ее поверхности кратковременных усилий. На торцах оболочки заданы граничные условия шарнирного опирания.

В основу решения задачи положена классическая теория оболочек и стержней и энергетический метод.

Перемещения точек срединной поверхности оболочки представлялись в виде двойных тригонометрических рядов по пространственным координатам

$$u = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=0}^{N}(u_{1mn}^{1}(\tau)\cos n\theta + u_{1mn}^{2}(\tau)\sin n\theta)\cos d_m\xi$$

$$v = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=0}^{N}(u_{2mn}^{1}(\tau)\sin n\theta + u_{2mn}^{2}(\tau)\cos n\theta)\sin d_m\xi$$

$$w = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=0}^{N}(u_{3mn}^{1}(\tau)\cos n\theta + u_{3mn}^{2}(\tau)\sin n\theta)\sin d_m\xi\,, \quad (1)$$