УДК 517.933

Геннадій Пугачов

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА СТЕПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ ПРИ РОЗГЛЯДІ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Механічні коливальні системи з двома степенями свободи займають значне місце в практичних розрахунках характеристик транспортних засобів і досить широко представлені в підручниках і монографіях. Це значною мірою належить до розрахунку вимушених коливань. Тим часом, прийнятий авторами аналітичний апарат для вільних коливань системи з двома степенями свободи при непрозорому відношенні з початковими умовами процесу не дозволяє проводити практичні обчислення. Стаття присвячена розгляду математичного аспекту указаного виду коливань з урахуванням початкових умов процесу.

Механические колебательные системы с двумя степенями свободы занимают значительное место в практических расчетах характеристик транспортних средств и достаточно широко представлены в учебниках и монографиях. Это в наибольшей степени относится к расчету вынужденных колебаний. Между тем, принятый авторами аналитический апарат для свободных колебаний системы с двумя степенями свободы при непрозрачном отношении с начальними условиями процесса не позволяет проводить практические вычисления. Статья посвящена рассмотрению математического аспекта указаного вида колебаний с учетом начальних условий процесса.

The mechanical oscillating systems with two degrees of freedom are of significance in practical calculations of the transport characteristics and are available in textbooks and monographs. It is to a great extent practical as to the calculation of the forced vibrations. Meantime, analytical method that is widely used in calculation of free vibrations of the system with two degrees of freedom under uncertain initial data is unsuitable for practical calculations. The mathematical aspect of above type of vibrations with initial conditions of the process is discussed in the paper.

Ключові слова: частота коливань, головна частота коливань, початкові умови процесу.

Постановка проблеми

Механічні коливальні системи з двома степенями вільності займають повідне місце в практичних розрахунках дисциплін, пов'язаних із динамікою транспортних засобів. Вони знайшли відповідне місце в підручниках, наприклад [1], і в класичних монографіях, наприклад [2], а потім були розповсюджені і в інших виданнях. Між тим, математичний апарат для розрахунків в згаданих джерелах має суттєві недоліки, що не дозволяють отримати практичні результати розрахунків. В цьому знаходять відображення некоректності приведеної теоретичної розробки теми.

Аналіз стану проблеми

Приймаючи загальне рішення для коливальної системи у формі, приведеній в роботі [1], для поточних координат x_1 і x_2, маємо:

$$x_1 = A_1 \sin(p_1 t + \alpha) + A_2 \sin(p_2 t + \alpha); \qquad (a)$$

$$x_2 = B_1 \sin(p_1 t + \alpha) + B_2 \sin(p_2 t + \alpha), \qquad (b)$$

де p_1 і p_2 – головні частоти коливань, α – початкова фаза процесу; A_1 ; A_2 ; B_1 ; B_2 – сталі процесу, визначення яких проводиться за початковими умовами процесу (на момент часу t = 0):

$$\begin{aligned} &(A_1 + A_2) \cdot \sin\alpha = x_{10}; \\ &(B_1 + B_2) \cdot \sin\alpha = x_{20}; \\ &(p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2) \cdot \cos\alpha = \dot{x}_{10}; \\ &(p_1 \cdot B_1 + p_2 \cdot B_2) \cdot \cos\alpha = \dot{x}_{20}. \end{aligned} \qquad (c)$$

Система приведених відношень є невизначеною через зневажливе ставлення автора до поняття початкової фази процесу, як до чогось другорядного і зрозумілого за визначенням. Між тим, загальний вираз для визначення початкової фази через початкові умови процесу має вигляд:

$$\alpha = arctg \frac{\dot{x}_0}{p \cdot x_0},$$

де $\tilde{o}_{10}$ і $\tilde{o}_{10}$ – координата і швидкість відповідної маси на момент t=0;

p – кутова частота процесу.

Тобто, за наявності двох мас і чотирьох значень початкових координат і швидкостей для двох значень головних частот у загальному випадку ми маємо чотири значення початкових фаз коливань, а не одну, як це вживано у співвідношеннях (с).

Некоректність математичних рішень стосується навіть таких авторитетних джерел, як [2], про що мова йтиме в основному матеріалі статті.

Постановка завдання

Розглянемо систему з двома степенями свободи, зображену на рис. 1, і визначимо основні відношення процесу для загальних параметрів коливальної системи, що дозволить проводити розрахунки при будь-яких початкових умовах.

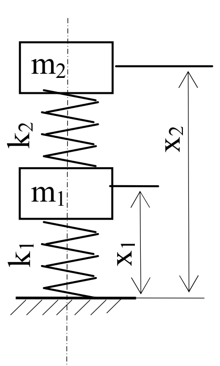

Рис. 1. Коливальна система

Основний матеріал

Рівняння рівноваги приведеної системи під дією пружних сил і сил інерції має вигляд:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1);$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

Для спрощення запису введемо позначення:

$$\frac{k_1 + k_2}{m_1} = a, \qquad \frac{k_2}{m_1} = b, \qquad \frac{k_2}{m_2} = c, \qquad (2)$$

з урахуванням яких рівняння (1) приймають вид:

$$\ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = 0;$$
$$\ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0. \qquad (3)$$

Приймаючи приватні рішення у формі

$$x = A\cdot\cos(pt-\alpha),$$

зазначимо, що для кожної з мас будуть свої початкові умови і своє значення початкової фази коливань α_i , тобто форма приватних рішень має бути такою:

$$x_1 = A\cdot\cos(pt-\alpha);$$
$$x_2 = B\cdot\cos(pt-\beta). \qquad (4)$$

Саме цим і відрізняється запропоноване рішення від рішень, приведених у роботах [1, 2].

Підстановка форм (4) у рівняння (3) приводить до алгебраїчних рівнянь:

$$A\cdot(a-p^2)\cdot\cos(pt-\alpha) - B\cdot b\cdot\cos(pt-\beta) = 0;$$
$$-A\cdot c\cdot\cos(pt-\alpha) + B\cdot(c-p^2)\cdot\cos(pt-\beta) = 0. \qquad (5)$$

Окрім очевидних значень коефіцієнтів, задовольняючих систему у стані спокою (A=B=0), їх значення, відмінні від нульових, можуть бути лише у разі, коли визначник системи буде дорівнювати нулю.

Розкривши визначник після скорочень ,отримаємо:

$$(a - p^2)(c - p^2) - bc = 0,$$

або

$$p^4 - (a + c)p^2 - c(a - b) = 0.$$

Це частотне рівняння має два дійсних і позитивних значення частот для двох головних форм коливального процесу:

$$p_{1,2}^2 = \frac{a+c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b\cdot c}. \qquad (6)$$

Відношення (5) дають можливість визначити співвідношення коефіцієнтів для кожної форми коливань:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{b \cdot \cos(p_1 t - \beta_1)}{(a - p^2) \cdot \cos(p_1 t - \alpha_1)} = \frac{1}{\lambda_1}; \qquad (7)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{b \cdot \cos(p_2 t - \beta_2)}{(a - p^2) \cdot \cos(p_2 t - \alpha_2)} = \frac{1}{\lambda_2}. \qquad (8)$$

Ці відношення є постійними для процесу з заданими початковими умовами, згідно з якими визначаються початкові фази коливального процесу:

$$\alpha_1 = arctg \frac{\dot{x}_{10}}{p_1 \cdot x_{10}}; \qquad (9)$$

$$\alpha_2 = arctg \frac{\dot{x}_{10}}{p_2 \cdot x_{10}}; \qquad (10)$$

$$\beta_1 = arctg \frac{\dot{x}_{20}}{p_1 \cdot x_{20}}; \qquad (11)$$

$$\beta_2 = arctg \frac{\dot{x}_{20}}{p_2 \cdot x_{20}}. \qquad (12)$$

Приватні рішення для кожної з форм процесу мають вигляд:

$$x_1^{(1)} = A_1 \cdot \cos(p_1 t - \alpha_1);$$

$$x_2^{(1)} = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot \cos(p_1 t - \beta_1);$$

$$x_1^{(2)} = B_2 \cdot \cos(p_2 t - \alpha_2);$$

$$x_2^{(2)} = \lambda_2 \cdot B_2 \cdot \cos(p_2 t - \beta_2).$$

Загальне рішення отримаємо, об’єднуючи приватні:

$$x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = A_1 \cdot \cos(p_1 t - \alpha_1) + B_2 \cdot \cos(p_2 t - \alpha_2); \qquad (13)$$

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = \lambda_1 \cdot A_1 \cdot \cos(p_1 t - \beta_1) + \lambda_2 \cdot B_2 \cdot \cos(p_2 t - \beta_2); \qquad (14)$$

Отримані рівняння показують, що в загальному випадку маси розглянутої системи здійснюють складний рух, що не є періодичним, якщо головні частоти випадково не опинились сумірними. Коливання будуть чисто гармонічними лише у тому разі, коли початкові умови визначать для неї одну з головних форм коливань.

Висновки

Вищенаведені аналітичні визначення щодо вільних коливань двомасової системи використані в теоретичному курсі дисципліни «Конструювання та динаміка електрорухомого складу», а в практичному курсі дисципліни дають змогу проводити розрахунки параметрів системи для заданих початкових умов. На підставі викладеного в даній статті матеріалу були розроблені облікові програми, що використовуються у навчальному процесі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Вериго М. Ф.* Динамика вагонов. Конспект лекций. – М.: ВЗИИТ, 1971. – 176 с.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1969. – 439 с.