УДК 539.3

М. М. Крюков

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ ОРТОТРОПНИХ ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ

Пропонується підхід до розв'язання тривимірної задачі теорії пружності для ортотропної циліндричної оболонки, що базується на поєднанні методів відокремлення змінних, сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. Виконано аналіз деформованого стану товстостінної ортотропної циліндричної оболонки при неосесиметричному навантаженні, коли її торці жорстко закріплені.

Предлагается подход к решению трехмерной задачи теории упругости для ортотропной цилиндрической оболочки, который базируется на сочетании методов разделения переменных, сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации. Проведен анализ деформированного состояния толстостенной ортотропной цилиндрической оболочки при неосесимметричном нагружении, когда её торцы жестко защемлены.

An approach is suggested to solution of the elasticity theory problem for orthotropic cylindrical shell. It is based on combination of the methods of variables division, spline-collocation and discrete orthogonalization. A strained state of a thick-walled orthotropic cylindrical shell for nonsymmetrical loading under rigid fastening of its faces is analyzed.

Ключові слова: теорія пружності, циліндричні оболонки, В-сплайни, метод сплайн-колокації, метод дискретної ортогоналізації.

Розв'язання тривимірних задач теорії пружності для ортотропних циліндричних оболонок пов'язане з великими математичними і обчислювальними труднощами [1, 2, 5, 7 – 11]. Зокрема, в монографії [2] запропоновано підхід до розв'язання задач статики анізотропних товстостінних циліндричних і сферичних оболонок, що базується на застосуванні подвійних тригонометричних рядів для відокремлення змінних і подальшого інтегрування одновимірних задач за допомогою стійкого чисельного метода дискретної ортогоналізації. Якщо відокремлення по коловій змінній можливе за рахунок періодичності розв'язку, то відокремлення в осьовому напрямі можливе лише для певних видів граничних умов на торцях циліндричних і сферичних оболонок.

В даній статті пропонується підхід до розв'язання тривимірних задач деформування товстостінних циліндричних оболонок, що базується на поєднанні методів відокремлення змінних, сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації. Розглянемо ортотропну циліндричну оболонку в циліндричній системі координат z, θ, r. Вихідні рівняння теорії пружності мають вигляд $[2, 9, 10]$: рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{r}}\left(\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \tau_{rz}\right) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0;$$
$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + r\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + 2\tau_{r\theta} = 0; \qquad (1)$$
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\mathrm{rz}}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta\right) = 0;$$

рівняння Коші:

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};\ e_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right);\ e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r};$$
$$e_{r\theta} = \frac{1}{\mathrm{r}}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \qquad (2)$$
$$e_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z};\quad e_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta};$$

співвідношення узагальненого закону Гука:

$$e_z = a_{11}\sigma_z + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_r;\quad e_{r\theta} = a_{44}\tau_{r\theta};$$
$$e_\theta = a_{12}\sigma_z + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_r;\quad e_{rz} = a_{55}\tau_{rz}; \qquad (3)$$
$$e_r = a_{13}\sigma_z + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_r;\quad e_{r\theta} = a_{66}\tau_{z\theta}.$$

У подальшому будемо розглядати такі крайові умови на торцях оболонки $z = 0,\ z = L$:

1) $\sigma_z = u_\theta = u_r = 0$; (4)

2) $u_z = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0$; (5)

3) $u_z = u_\theta = u_r = 0$; (6)

4) $u_z = u_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0$. (7)

Напружено деформований стан ортотропних оболонок, коли на торцях задано умови першого (4) і другого (5) типів, розглянуто в [2], оскільки вони допускають відокремлення змінних в осьовому і коловому напрямах за допомогою подвійних тригонометричних рядів.

Перетворюючи вихідні рівняння (1) – (3), розв'язувальну систему рівнянь у переміщеннях u_r, u_θ, u_z можна записати у вигляді:

$$F_1\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z}, \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial r}\right) = 0;$$
$$F_2\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}, u_\theta, \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}, \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial_\theta}\right) = 0; \qquad (8)$$
$$F_3\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}, u_r, \frac{\partial u_r}{\partial r}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}, \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}\right) = 0$$
$$\left(r_1 \le r \le r_2;\quad 0 \le 0 < 2\pi;\quad 0 \le \mathrm{z} \le \mathrm{L}\right).$$

На внутрішній і зовнішній циліндричних поверхнях оболонки $r = r_1$ і $r = r_2$ задаються умови:

при $r = r_1$ $\quad \sigma_r = q_r^-,\ \tau_{zr} = q_z^-,\ \tau_{\theta r} = q_\theta^-;$ (9)

при $r = r_2$ $\quad \sigma_r = q_r^+,\ \tau_{zr} = q_z^+,\ \tau_{\theta r} = q_\theta^+.$

Напруження σ_r, τ_{zr}, $\tau_{\theta z}$ в переміщеннях мають вигляд:

$$\sigma_r = b_{31}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{32}}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) + b_{33}\frac{\partial u_r}{\partial r};$$

$$\tau_{r\theta} = b_{44}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(u_\theta - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\right); \qquad (10)$$

$$\tau_{rz} = b_{55}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right).$$

Оскільки оболонка замкнена в коловому напрямі, всі факторі напружено деформованого стану запишемо у вигляді наступних тригонометричних рядів:

$$u_z = \sum_{k=0}^{\infty}\left(u_k(z,\ r)\cos k\theta + u_k^{'}(z,\ r)\sin k\theta\right);$$

$$u_\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\left(v_k(z,\ r)\sin k\theta + v_k^{'}(z,\ r)\cos k\theta\right);$$

$$u_r = \sum_{k=0}^{\infty}\left(w_k(z,\ r)\cos k\theta + w_k^{'}(z,\ r)\sin k\theta\right); \qquad (11)$$

$$q_z = \sum_{k=0}^{\infty}\left(q_{zk}(z,\ r)\cos k\theta + q_{zk}^{'}(z,\ r)\sin k\theta\right);$$

$$q_\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\left(q_{\theta k}(z,\ r)\sin k\theta + q_{\theta k}^{'}(z,\ r)\cos k\theta\right);$$

$$q_r = \sum_{k=0}^{\infty}\left(q_{rk}(z,\ r)\cos k\theta + q_{rk}^{'}(z,\ r)\sin k\theta\right).$$

Після відокремлення змінних в рівняннях (8) – (10) отримаємо для кожного члена розкладу без штрихів двовимірну систему рівнянь вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \Phi_1\left(k,\ u,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \frac{\partial u}{\partial r},\ \frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{\partial w}{\partial r},\ \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z}\right);$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \Phi_2\left(k,\ \frac{\partial u}{\partial z},\ v,\ \frac{\partial v}{\partial r},\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\ w,\ \frac{\partial w}{\partial r}\right); \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \Phi_3\left(k,\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z},\ v,\ \frac{\partial v}{\partial r},\ w,\ \frac{\partial w}{\partial r},\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

$$(r_1 \le r \le r_2;\quad 0 \le z \le L).$$

Індекси біля функцій пропускаємо.

Напруження σ_r, $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} після відокремлення змінних мають вигляд:

$$\sigma_r = b_{31}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{b_{32}}{r}(kv + w) + b_{33}\frac{\partial w}{\partial r}; \qquad \tau_{r\theta} = b_{44}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}(v + kw)\right); \qquad (13)$$

$$\tau_{rz} = b_{55}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Двовимірну крайову задачу для системи (12) будемо розв'язувати за допомогою методів сплайн-колокації і дискретної ортогоналізації.

Враховуючи, що в систему рівнянь входять частинні похідні не вище другого порядку, розв'язок представимо у вигляді:

$$u(r, z) = \sum_{i=0}^{N} u_i(r)\ \varphi_i^{(1)}(z);$$
$$v(r, z) = \sum_{i=0}^{N} v_i(r)\ \varphi_i^{(2)}(z); \qquad (14)$$
$$w(r, z) = \sum_{i=0}^{N} w_i(r)\ \varphi_i^{(3)}(z);$$

де $u_i(r)$, $v_i(r)$, $w_i(r)$ – невідомі функції, а $\varphi_i^{(k)}(z)$ – лінійні комбінації B-сплайнів третього степеня на рівномірному розбитті $\Delta(0 = z_0 < z_1 < z_2 < ... < z_N = L)$, що задовольняють крайові умови на торцях $z = const$ (6) – (9) [3, 4, 6].

В результаті перетворень отримуємо систему $6(N+1)$ звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\bar{y}_1}{dr} = \bar{y}_2;$$

$$\frac{d\bar{y}_2}{dr} = -\frac{1}{b_{55}} U_0^{-1}\left[\left(-k^2\frac{b_{66}}{r^2}U_0 + b_{11}U_2\right)\bar{y}_1 + \frac{b_{55}}{r^2}U_0\bar{y}_2 + \right.$$
$$\left. + k\frac{b_{12}+b_{66}}{r}U_1\bar{y}_3 + \frac{b_{12}+b_{55}}{r}W_1\bar{y}_5 + (b_{13}+b_{55})W_1\bar{y}_6\right];$$

$$\frac{d\bar{y}_3}{dr} = \bar{y}_4;$$

$$\frac{d\bar{y}_4}{dr} = -\frac{1}{b_{44}} V_0^{-1}\left[-k\frac{b_{12}+b_{66}}{r}U_1\bar{y}_1 - \left(\frac{b_{44}+k^2 b_{22}}{r^2}V_0 - b_{66}V_2\right)\bar{y}_3 + \frac{b_{44}}{r}V_0\bar{y}_4 - \right. \qquad (15)$$
$$\left. - k\frac{b_{22}+b_{44}}{r^2}W_0\bar{y}_5 - k\frac{b_{44}+k^2 b_{23}}{r}W_0\bar{y}_6\right];$$

$$\frac{d\bar{y}_5}{dr} = \bar{y}_6$$

$$\frac{d\bar{y}_6}{dr} = -\frac{1}{b_{33}} W_0^{-1}\left[\frac{b_{13}-b_{12}}{r}U_1\bar{y}_1 + (b_{13}+b_{55})U_1\bar{y}_2 - k\frac{b_{22}+b_{44}}{r^2}V_0\bar{y}_3 + \right.$$
$$\left. + k\frac{b_{23}+b_{44}}{r}V_0\bar{y}_4 - \left(\frac{b_{22}+k^2 b_{44}}{r^2}W_0 - b_{55}W_2\right)\bar{y}_5 + \frac{b_{33}}{r}W_0\bar{y}_6\right]$$

$$(r_1 \le r \le r_2).$$

Тут $\bar{y}_1 = \{u_0(r), u_1(r)..., u_N(r)\}^T$; $\bar{y}_2 = \{u'_0(r), u'_1(r)..., u'_N(r)\}^T$;

$\bar{y}_3 = \{v_0(r), v_1(r)..., v_N(r)\}^T$; $\bar{y}_4 = \{v'_0(r), v'_1(r)..., v'_N(r)\}^T$;

$\bar{y}_5 = \{w_0(r), w_1(r)..., w_N(r)\}^T$; $\bar{y}_6 = \{w'_0(r), w'_1(r)..., w'_N(r)\}^T$;

$U_0 = \{\varphi_i^{(1)}(\bar{z}_s)\}$, $U_1 = \{\varphi_i^{(1)'}(\bar{z}_s)\}$, $U_2 = \{\varphi_i^{(1)''}(\bar{z}_s)\}$,

$V_0 = \{\varphi_i^{(2)}(\bar{z}_s)\}$, $V_1 = \{\varphi_i^{(2)'}(\bar{z}_s)\}$, $V_2 = \{\varphi_i^{(2)''}(\bar{z}_s)\}$,

$$W_0 = \left\{\varphi_i^{(3)}\left(\bar{z}_s\right)\right\}, \quad W_1 = \left\{\varphi_i^{(3)\prime}\left(\bar{z}_s\right)\right\}, \quad W_2 = \left\{\varphi_i^{(3)\prime\prime}\left(\bar{z}_s\right)\right\}$$

квадратні матриці $(N+1)$-го порядку, $\bar{z}_s$ $\left(0 \le \bar{z}_s \le L\right)$ – точки колокації $\left(s = \overline{1,N+1};\ i = \overline{0,N}\right)$. Коефіцієнти b_{ij} виражаються через пружні сталі a_{ij} наступним числом:

$$b_{11} = \left(a_{22}a_{33} - a_{23}^2\right)/\Delta; \quad b_{12} = \left(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}\right)/\Delta; \quad b_{13} = \left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right)/\Delta;$$
$$b_{22} = \left(a_{11}a_{33} - a_{13}^2\right)/\Delta; \quad b_{23} = \left(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}\right)/\Delta; \quad b_{33} = \left(b_{11}b_{22} - a_{12}^2\right)/\Delta;$$
$$b_{44} = 1/a_{44}; \quad b_{55} = 1/a_{55}; \quad b_{66} = 1/a_{66}; \tag{16}$$
$$\Delta = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}^2\right) - a_{12}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right).$$

Зробивши подібні перетворення з крайовими умовами на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндричної оболонки, отримаємо відповідні крайові умови для одновимірної системи рівнянь (15). Крайову задачу розв’язуємо за допомогою стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації [2-4].

За допомогою запропонованого підходу проаналізовано деформування ортотропної циліндричної оболонки під дією внутрішнього тиску $q_r^- = -q_0 \cos k\theta$, коли торці жорстко закріплені, т.б. виконуються умови (6). При розв’язанні задачі пружні характеристики матеріалу оболонки приймають значення: $E_z = 1{,}90E_0$ $E_\theta = 1{,}20E_0$; $E_r = 0{,}45E_0$; $\nu_{z\theta} = 0{,}15$; $\nu_{r\theta} = 0{,}30$; $\nu_{rz} = 0{,}07$; $G_{z\theta} = 0{,}30E_0$; $G_{\theta r} = 0{,}23E_0$; $G_{zr} = 0{,}23E_0$.

У табл. 1 наведено розподіли амплітудних значень прогину оболонки $\dfrac{u_r}{10E_0^{-1}q_0}$ по товщині $\left(r^* = (r - r_1)/(r_2 - r_1)\right)$ при $r_1 = 8$; $r_2 = 12$; $z_0 = 0$; $z_0 = 10$ $\left(L = 10\right)$ для різних значень k в перерізі $z = \dfrac{L}{2}$.

Таблиця 1. **Розподіли амплітудних значень радіальних переміщень в перерізі $z = \frac{L}{2}$ для різних значень k**

r^* \ k	0	1	2	3	4
0,0	0,124·10	0,135·10	0,143·10	0,126·10	0,985
0,2	0,105·10	0,117·10	0,126·10	0,110·10	0,834
0,4	0,919	0,104·10	0,113·10	0,969	0,706
0,6	0,829	0,947	0,104·10	0,878	0,621
0,8	0,777	0,895	0,982	0,825	0,574
1,0	0,750	0,869	0,954	0,796	0,548

З табл. 1 видно, що різниця амплітудних значень радіальних переміщень циліндричних поверхонь складає від 30% до 40% відносно навантаженої поверхні для розглянутих значень k, яка характеризує змінюваність навантаження в коловому напрямі.

В табл. 2 наведено розподіли амплітудних значень радіального переміщення $\dfrac{u_r}{10E_0^{-1}q_0}$ в перерізі $z = L/2$ при різних значеннях відносної товщини $h^* = \dfrac{h}{R_{сер}}$

$(R_{сер} = 10)$ для різних значень k. В чисельнику дано їх значення на зовнішній, а в знаменнику – внутрішній (навантаженій) поверхнях.

Таблиця 2. **Вплив відносної товщини оболонки на радіальні переміщення.**

k \ $\frac{h}{R_{сер}}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
0	$\frac{0{,}169\cdot 10^2}{0{,}173\cdot 10^2}$	$\frac{0{,}666\cdot 10}{0{,}697\cdot 10}$	$\frac{0{,}225\cdot 10}{0{,}260\cdot 10}$	$\frac{0{,}732}{0{,}121\cdot 10}$
1	$\frac{0{,}230\cdot 10^2}{0{,}233\cdot 10^2}$	$\frac{0{,}835\cdot 10}{0{,}865\cdot 10}$	$\frac{0{,}264\cdot 10}{0{,}297\cdot 10}$	$\frac{0{,}869}{0{,}135\cdot 10}$
2	$\frac{0{,}374\cdot 10^2}{0{,}377\cdot 10^2}$	$\frac{0{,}113\cdot 10^2}{0{,}116\cdot 10^2}$	$\frac{0{,}313\cdot 10}{0{,}343\cdot 10}$	$\frac{0{,}954}{0{,}143\cdot 10}$
3	$\frac{0{,}510\cdot 10^2}{0{,}513\cdot 10^2}$	$\frac{0{,}125\cdot 10^2}{0{,}128\cdot 10^2}$	$\frac{0{,}298\cdot 10}{0{,}327\cdot 10}$	$\frac{0{,}796}{0{,}126\cdot 10}$
4	$\frac{0{,}533\cdot 10^2}{0{,}555\cdot 10^2}$	$\frac{0{,}111\cdot 10^2}{0{,}113\cdot 10^2}$	$\frac{0{,}233\cdot 10}{0{,}260\cdot 10}$	$\frac{0{,}548}{0{,}985}$

З табл.2 видно, що для тонких оболонок $\frac{1}{20} \div \frac{1}{10}$ переміщення u_r майже не змінюється по товщині, а при $\frac{h}{R_{ñåð}} = \frac{1}{5}$ це змінювання складає приблизно 10%. Звідси можна зробити припущення для відносно тонких оболонок про незмінність прогину по товщині, які використовуються в деяких наближених теоріях ортотропних оболонок.

В табл. 3 наведено значення прогину оболонки $\frac{u_r}{10E_0^{-1}q_0}$ в перерізі $z = L/2$ при різних відношеннях довжини до середнього радіуса $\frac{L}{R_{сер}}$ $\left(R_{ñåð} = \frac{(r_1 + r_2)}{2}\right)$ для різних значень k, коли $r_1 = 8$; $r_2 = 12$ $(R_{сер} = 10)$. В чисельнику наведено значення прогину на зовнішній поверхні, а в знаменнику – на внутрішній.

З табл. 3 видно вплив $\frac{L}{R_{сер}}$ на прогини для різних значень k. Зокрема збільшення цього параметру в 3 рази з $\frac{L}{R_{сер}} = 1$ до $\frac{L}{R_{сер}} = 3$ приводить до збільшення максимальних амплітудних значень радіального переміщення навантаженої поверхні для $k = 0$ в 1,7; $k = 1$ – 5,7; $k = 2$ – 6,3; $k = 3$ – 2,7; $k = 4$ – 1,6 разів.

Таблиця 3. **Вплив відносної довжини оболонки на радіальні переміщення**

k \ $\frac{L}{R_{cep}}$	1	1,5	2	2,5	3
0	$\frac{0{,}732}{0{,}121\cdot 10}$	$\frac{0{,}121\cdot 10}{0{,}174\cdot 10}$	$\frac{0{,}145\cdot 10}{0{,}201\cdot 10}$	$\frac{0{,}155\cdot 10}{0{,}212\cdot 10}$	$\frac{0{,}157\cdot 10}{0{,}214\cdot 10}$
1	$\frac{0{,}869}{0{,}135\cdot 10}$	$\frac{0{,}186\cdot 10}{0{,}238\cdot 10}$	$\frac{0{,}319\cdot 10}{0{,}374\cdot 10}$	$\frac{0{,}493\cdot 10}{0{,}550\cdot 10}$	$\frac{0{,}710\cdot 10}{0{,}769\cdot 10}$
2	$\frac{0{,}954}{0{,}143\cdot 10}$	$\frac{0{,}226\cdot 10}{0{,}278\cdot 10}$	$\frac{0{,}404\cdot 10}{0{,}462\cdot 10}$	$\frac{0{,}613\cdot 10}{0{,}676\cdot 10}$	$\frac{0{,}821\cdot 10}{0{,}897\cdot 10}$
3	$\frac{0{,}796}{0{,}126\cdot 10}$	$\frac{0{,}154\cdot 10}{0{,}204\cdot 10}$	$\frac{0{,}217\cdot 10}{0{,}269\cdot 10}$	$\frac{0{,}260\cdot 10}{0{,}314\cdot 10}$	$\frac{0{,}287\cdot 10}{0{,}342\cdot 10}$
4	$\frac{0{,}548}{0{,}985}$	$\frac{0{,}846}{0{,}130\cdot 10}$	$\frac{0{,}100\cdot 10}{0{,}146\cdot 10}$	$\frac{0{,}107\cdot 10}{0{,}153\cdot 10}$	$\frac{0{,}110\cdot 10}{0{,}156\cdot 10}$

Таким чином, використання сплайн-функцій дозволяє розв’язувати задачі статики товстостінних ортотропних циліндричних оболонок з достатньою точністю для більш широкого класу крайових умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Балбоян А.А.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала // Изв. АН Арм.ССР. Сер. физ.-мат. наук . – 1961. – № 14. – С. 61 – 70.
2. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. – К.: Вища шк., 1985. – 190 с.
3. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор)// Прикл. механика. – 1995. – № 6. – С. 32 – 38.
4. *Григоренко Я.М., Шевченко Ю.Н. Крюков Н.Н.* и др. Численные методы. – К.: «А.С.К», 2002. – 448 с. – (Механика композитов: в 12-ти т.; Т. 11).
5. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
6. *Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
7. *Колтунов М.А., Васильев Ю.И., Пасько Д.А.* Прочность полых цилиндров. – М.: Машиностроение, 1981. – 264 с.
8. *Колтунов М.А., Васильев Ю.И., Черных В.А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высш. шк. 1975. – 526 с.
9. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
10. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1966. – 492 с.
11. *Прокопов В.К.* Равновесие упругого осесимметричного нагруженного толстостенного цилиндра // Прикл. математика и механика. – 1949. – № 135. – 144.