

УДК 533.6: 6297

КОРИТЬКО О.І., провідний науковий співробітник, кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ ПРИ СТАЛОМУ ТА НЕСТАЛОМУ ЇХ РУСІ НА ДОЗВУКОВИХ ЧИСЛАХ M

Запропонована в роботі методика побудована на основі методу дискретних вихорів з використанням лінійних підходів. В інтересах спрощення розрахунків закони зміни кінематичних параметрів руху літальних апаратів приймаються гармонічними, а їх частоти та амплітуди мають невеликі значення.

Ключові слова: аеродинамічна задача, співвідношення Прандтля-Глауєрта, кінематичні параметри руху літального апарата, метод дискретних вихорів.

По причині значних труднощів отримання несталих аеродинамічних характеристик як теоретичними так і особливо експериментальними методами дуже часто в практиці досліджень розрахункові моделі динаміки руху літальних апаратів (ЛА) побудовані на використанні квазістаціонарних аеродинамічних теорій. Звичайно, цей вимушений підхід не завжди являється виправданим. Неврахування несталих складових аеродинамічних сил та моментів може привести до суттєвих похибок, які, в свою чергу, іноді можуть стати фатальними в реальному польоті, оскільки вирішальним чином впливають на його безпеку.

Більшість існуючих теоретичних методів [6], які дають можливість отримати несталі аеродинамічні характеристики дуже складні та потребують громіздких розрахунків, з якими навіть сучасні комп'ютери справляються з великими труднощами.

З експериментальним визначенням указаних характеристик справи склалися в світовій практиці ще гірше. По причині надзвичайно великих складнощів проведення відповідних дослідів вони являються просто унікальними, вимагають невиправдано великих фінансових витрат та дуже часто принципово являються нездійсненими. Тому орієнтуватися на цей шлях отримання несталих аеродинамічних характеристик для практичних потреб мабуть теж недоцільно.

В зв'язку з цим в даний час, навіть при наявності дуже потужних комп'ютерів та інтенсивному їх розвитку, все частіше повертаються до використання лінійних, більш економних підходів, все більше приділяють увагу їх розвитку та вдосконаленню [6].

Дана робота присвячена подібній проблемі, а саме розвитку та доведення до практичного використання одного із таких підходів.

1.1 Постановка задачі

Розглянемо несталий рух (ЛА) з малими відносними значеннями товщини

його частин та кінематичних параметрів $q_i(t)$ (a, b – кутів атаки і ковзання; $w_{x,y,z}$ – безрозмірних кутових швидкостей обертання навколо центру мас; d – кутів відхилення рульових поверхонь і засобів механізації крила та інше). Будемо вважати, що основним являється поступальний рух з постійною швидкістю V_0 .

Форма ЛА та його частин, а також їх деформація і закони зміни кінематичних параметрів руху та їх похідних відносно безрозмірного часу t ($\frac{\partial a}{\partial t} = \mathfrak{a}$, $\frac{\partial b}{\partial t} = \mathfrak{b}$, та інші „параметри з крапками”) вважаються відомими.

Виберемо прямокутну, зв’язану з ЛА систему координат $Oxyz$ з початком в його центрі мас. Вісь Ox направимо вздовж подовжньої вісі ЛА назад, Oy – вверху, Oz – перпендикулярно першим двом вправо, вздовж розмаху правої половини крила.

Течія повітря поза поверхнею ЛА, та його вихрового сліду потенційна. Існує потенціал швидкостей часток повітря Φ , збурених ЛА. Причому складові цих швидкостей

$$W_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad W_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad W_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1)$$

1.1.1 Математичне формулювання краєвої задачі

Рух середовища (часток повітря) описується у вибраній системі координат лінеаризованим рівнянням нерозривності [1...3]

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} + 2M^2 \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

де $\Phi = V_0 \cdot b \cdot j(x, h, z, t, M)$; $x = \frac{x}{b}$, $h = \frac{y}{b}$, $z = \frac{z}{b}$ – безрозмірні координати вибраної системи; b – характерний лінійний розмір ЛА;

j – безрозмірний потенціал збурених швидкостей часток повітря; $t = \frac{b}{V_0} \cdot t$, t – час руху.

В реальному польоті кінематичні параметри руху ЛА змінюються в часі, як правило, по гармонічному закону (або дуже близькому до нього). В цих випадках вони можуть бути представлені

$$q_i = q_i^* \cdot \cos(p_i^* \cdot t + e_i), \quad \mathfrak{q}_i = -p_i^* \cdot q_i^* \cdot \sin(p_i^* \cdot t + e_i), \quad (3)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, K,$$

де q_i^* – незалежні від часу амплітуди чи характерні значення кінематичних параметрів $q_i(t)$; e_i – зсув фази q_i – того руху; K – загальна кількість кінематичних параметрів руху та деформації ЛА; $p_i^* = p_i \cdot b/V_0$ – число Струхаля (критерій подібності несталоного руху ЛА), p_i – кругова частота зміни i – того кінематичного параметру.

Потенціал збурених швидкостей виразимо через коефіцієнти аеродинамічних похідних

$$j(x, h, z, t, M) = \sum_{i=1}^K [j^{q_i}(x, h, z) \cdot q_i(t) + j^{\Phi_i}(x, h, z) \cdot \Phi_i(t)]. \quad (4)$$

Тепер отримаємо рівняння, яким повинні задовольняти функції j^{q_i} і j^{Φ_i} . Для цього підставимо (4) в (2). Зберемо всі члени при співмножниках $\cos p^* \cdot t$, та відзначимо, що згідно (3) $\Phi_i = -q_i^* p^{*2} \cdot \cos p^* \cdot t$. Дотримуючись прийнятих припущень, які введені нами при вирішенні аеродинамічної задачі в лінійній постановці, на підставі (2) отримаємо наступну систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} (1 - M^2) \frac{\partial^2 j^{q_i}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j^{q_i}}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 j^{q_i}}{\partial z^2} - 2M^2 p^{*2} \cdot \frac{\partial j^{\Phi_i}}{\partial x} + M^2 \cdot p^{*2} j^{q_i} &= 0, \\ (1 - M^2) \frac{\partial^2 j^{\Phi_i}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j^{\Phi_i}}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 j^{\Phi_i}}{\partial z^2} + 2M^2 \frac{\partial j^{q_i}}{\partial x} - 2M^2 p^{*2} \cdot j^{\Phi_i} &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, \dots, K. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ми будемо вирішувати задачу в найбільш приближеному до практики випадку руху ЛА, а саме – коли він має коливальний характер, а частоти зміни кінематичних параметрів та відхилення рульових поверхонь достатньо малі і $p^* \rightarrow 0$. Тоді система (5) значно спроститься

$$\left. \begin{aligned} (1 - M^2) \frac{\partial^2 j^{q_i}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j^{q_i}}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 j^{q_i}}{\partial z^2} &= 0, \\ (1 - M^2) \frac{\partial^2 j^{\Phi_i}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j^{\Phi_i}}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 j^{\Phi_i}}{\partial z^2} + 2M^2 \frac{\partial j^{q_i}}{\partial x} &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, \dots, K. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Отримана система рівнянь при кожному i – я може вирішуватись незалежно. Крім того задача спрощується за рахунок того, що з'являється можливість роздільного визначення спочатку j^{qi} а потім $j^{\#}$.

1.1.2 Краєві (межові) умови задачі

В усіх варіантах задач, які ми будемо вирішувати (крайових задач) межові умови на ЛА для нормальної похідної потенціалу швидкостей виражає вимогу про плавне обтікання ЛА. Вона буде, природно, цілком справедливою у випадку прийнятих раніше припущень про малість товщин, кінематичних параметрів руху та деформацій поверхні ЛА. Його можливо записати у вигляді умови, що в кожній точці поверхні ЛА нормальна складова відносно швидкості повинна обертатися в нуль (умова непротікання)

$$W_{0n} = 0. \quad (7)$$

При вирішенні задачі обтікання ЛА доводиться також використовувати умову на вихровому сліді, який створюється за ЛА. Ця умова необхідна при вирішенні задачі в лінійній постановці лише для того, щоб визначити закон зміни чисто несталих (поперечних) вихорів. Формою вихрового сліду як фактору другого порядку малості нехтують.

Для визначення останньої умови скористаємося відомою теоремою Томсона про сталість циркуляцій швидкості по любому замкнутому рідинному контуру в ідеальному баротронному середовищі, коли масові сили відсутні або потенційні

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, z, t) &= \Gamma^*(x^*, y, z, t^*), \\ t^* &= t - \frac{(x^* - x)}{V_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) $\Gamma^*(x^*, y, z, t^*)$ – циркуляція вектору швидкості часток повітря по замкнутому контуру при $z = const$ в момент часу t^* , який охоплює перетин несучої поверхні ЛА та проходить через задню її крайку; $\Gamma(x, y, z, t)$ – циркуляція в тому ж перетині $z = const$, але в момент часу $t > t^*$ по довільному контуру, який теж охоплює цю несучу поверхню.

Для вирішення задачі обтікання поверхні ЛА необхідні деякі вихідні гіпотези, які прямо чи опосередковано базуються на даних натурних досліджень. Однією із таких являється гіпотеза (постулат) Чаплигіна-Жуковського. У випадку циркуляційного обтікання несучих поверхонь ЛА для виділення єдиного рішення, при умові моделювання їх обтікання приєднаним вихровим шаром $g(x, y, z, t)$, являється умова [1...3]

$$g(x, y, z, t)|_{t^*} = 0. \quad (9)$$

В цій формулі індекс l^* означає приналежність до задніх крайок несучих поверхонь.

При визначених умовах вирішення задачі, аеродинамічне навантаження на тонких несучих поверхнях ЛА можна розраховувати по формулі

$$\Delta \bar{p} = \sum_{i=1}^K (\Delta p^{-q_i} \cdot q_i + \Delta \bar{p}^{g^*} \cdot g^*), \quad i=1,2,3,\dots,K, \quad (10)$$

де $\Delta p^{-q_i} = \frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial q_i}$, $\Delta \bar{p}^{g^*} = \frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial g^*}$, $\Delta \bar{p} = \frac{2 \cdot (p_n - p_e)}{r_\infty V_0^2}$, p_{n_i} та p_{e_i} – тиск на нижньому та верхньому боці i – тої панельки; r_∞ – густина повітря.

В свою чергу похідні аеродинамічних навантажень при вирішенні часткових задач (відповідних значенням i – я) розраховуються за допомогою теореми Жуковського „в малому” [1...3].

$$\Delta p^{-q_i} = -2g^{q_i}, \quad \Delta \bar{p}^{g^*} = -2g^{g^*}, \quad i=1,2,3,\dots,K, \quad (11)$$

де $g^{q_i} = \frac{\partial g}{\partial q_i}$, $g^{g^*} = \frac{\partial g}{\partial g^*}$.

Формули (11) записані для випадку використання вибраної нестандартної системи координат (вісь Ox направлена назад).

1.2 Чисельний метод вирішення задачі

1.2.1 Схематизація та моделююча вихрова система

Моделювання обтікання ЛА здійснюється за допомогою системи дискретних вихорів та безперервного вихрового шару. Вони розташовуються на базових площинах, з котрих складається розрахункова схема ЛА, та в сліді, який знаходиться в одній площині з цими площинами і простягається назад до нескінченності. Порядок схематизації ЛА викладено в роботі [4].

Моделююча схема базових площин складається із трапецій з основами, паралельними осі Ox , довільно орієнтованими в просторі. Ці трапеції розбиваються на панельки, які теж мають трапецієвидну форму з своїми основами, які паралельні основам базових площин та вісі Ox .

Основним елементом моделюючої вихрової системи являється підковоподібний вихор, який складається із одного поперечного приєданого постійної циркуляції по розмаху та двох вільних, які сходять з кінців приєданого і паралельні вісі Ox . Ці вільні вихори ідуть вниз по потоку до нескінченності. Приєдані вихори розташовуються поперек кожної панельки на відстані $1/4$ її хорди від носка. Крім того, при зміні з часом циркуляції приєднаних вихорів з них будуть сходити вільні вихори, вісі яких паралельні тим приєднаним з яких вони зійшли. Ці

вільні вихори

розповсюджуються вниз по потоку теж з часом до нескінченності. Таким чином, і базова площина і частина поверхні в сліді за нею будуть безперервно заповнені вихровим шаром із указаних вільних вихорів.

1.2.2 Забезпечення виконання краєвих умов

Виконання краєвої умови про затухання збурень при безкінечному віддаленні від ЛА та його сліду забезпечується використанням при розрахунку цих збурень від моделюючих газодинамічних особливостей (вихорів) відомого закону Біо-Савара [1...3].

Умова непротікання поверхні ЛА (7) зноситься на найближчу до неї схематизуючу базову площину та виконується в так званих контрольних точках (точках колокації). Ці точки розташовуються на середніх лініях згаданих вище панельок та віддалені від задніх їх крайок на відстань рівну $\frac{1}{4}$ розмірів їх хорд. Останній ряд контрольних точок на базових площинах буде лежати не між сусідніми приєднаними поперечними вихорами, а між останнім рядом цих вихорів та задньою гострою крайкою даної площини (несучої поверхні). Це забезпечує, при безкінечному збільшенні числа приєднаних вихорів, автоматичне виконання гіпотези Чаплигіна–Жуковського (9).

1.2.3 Алгоритм розрахунку аеродинамічних характеристик

При вирішенні задачі для малих чисел Струхаля ($p^* \rightarrow 0$) процес розрахунків значно спрощується, що вже було продемонстровано в п.п. 1.1.1(б). Таким чином, вирішення загальної прямої аеродинамічної задачі зводиться до розв'язання двох систем лінійних алгебраїчних рівнянь $N - go$ порядку (N – кількість панельок, а значить і підковоподібних вихорів та контрольних точок).

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N A_{mj} \cdot \Gamma_m^{q_i} = B_j, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N A_{mj} \cdot \Gamma_m^{q_i} = - \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial A_{mj}^{(2)}}{\partial p^*} \cdot \Gamma_m^{q_i} - M^2 \cdot B_j, \quad (13)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, K. i$

В цих системах $A_{mj} = \vec{w}_a^{-mj} \cdot \vec{n}_o^{-j}$, $B_j = \vec{w}_*^{-j} \cdot \vec{n}_o^{-j}$, \vec{w}_a^{-mj} – вектор безрозмірної збуреної швидкості m – тим підковоподібним вихором в j – тій контрольній точці; \vec{n}_o^{-j} – орт нормалі до базової площини в j – тій контрольній точці; \vec{w}_*^{-j} – вектор безрозмірної переносної швидкості в j – тій контрольній точці; $\Gamma_m^{q_i} = \frac{\partial \Gamma_m}{\partial q_i}$, Γ_m – безрозмірна циркуляція m – того підковоподібного вихора;

$A_{mj}^{(2)} = w_a^{-mj(2)} \cdot n_{oj}, w_a^{-mj(2)}$ – вектор безрозмірної збуреної швидкості, які генеруються вихровою системою сліду, створеною внаслідок несталого руху ЛА в j -тій контрольній точці; p^* – число Струхалія; $\Gamma_m^{\Phi} = \frac{\partial \Gamma_m}{\partial \Phi}$, $\Phi = \frac{\partial q_i}{\partial t}$, $q_i = a, b, w_{x,y,z}, \dots, q_k$.

В підсумку ми можемо переконатись, що загальне рішення задачі зводиться до почергового вирішення систем (12) та (13).

При розв'язанні першої системи (12) визначаються похідні циркуляцій приєднаних моделюючих вихорів $\Gamma_m^{q_i}$. Праві частини другої системи (13) розраховуються з використанням рішень першої. Рішеннями другої системи являються несталі аеродинамічні похідні Γ_m^{Φ} .

В рамках лінійної теорії урахування стисливості середовища можна здійснювати шляхом зведення задачі до обтікання нестисливою рідиною відповідних несучих поверхонь (компоновок). В разі руху тонкого ЛА як жорсткого тіла та деформаціях його поверхні по гармонічним відносно часу законам з числами Струхалія $p^* \rightarrow 0$ можна підібрати такі перетворення геометрії несучих поверхонь та такі межові умови в нестисливій рідині, що рішення задачі для них буде задовольняти усім умовам задачі для вихідного ЛА, який рухається в газі. Співвідношення для цих перетворень носять імена відомих вчених Прантля-Глаурта та достатньо повно наведені в роботі [3].

Важливо відзначити ще ту обставину, що ЛА – об'єкти, які майже завжди мають площину симетрії (чи антисиметрії). Цією властивістю є можливість скористатись для суттєвого скорочення об'єму розрахунків. А саме – цілком справедливо в цьому разі розглядати тільки одну частину ЛА, яка лежить лише по одну сторону від площини симетрії. Збурення від протилежної частини треба буде враховувати як рівні по величині розглядуваним, але розташовані симетрично відносно згадуваної площини. Якщо має місце анти симетрія (наприклад – відхилення елеронів), то вказані збурення ще до всього будуть мати і протилежний знак. При цьому порядок систем рівнянь (12) та (13) зменшиться в багатьох випадках майже в два рази.

Якщо з протилежної сторони площини симетрії відсутні ті чи інші елементи (наприклад зовнішні підвіски озброєння), то в алгоритмі розрахунку дуже легко передбачити відсутність симетрії(антисиметрії) саме для цих елементів.

Дуже цікаво, що останній підхід можливо використовувати також при розрахунках аеродинамічних характеристик ЛА з несиметричними бойовими пошкодженнями планера. Для цього необхідно лише пошкоджені ділянки вважати відсутніми з протилежної сторони площини симетрії. На відсутніх (пошкоджених) ділянках не буде виконуватися умова непротікання (7) та виникати відповідне аеродинамічне навантаження.

По знайденим значенням Γ^{q_i} та Γ^{Φ} розраховуються величини g^{q_i} та g^{Φ}

$$g^{q_i} = \frac{\Gamma^{q_i}}{\Delta b_i}, \quad g^{\Phi} = \frac{\Gamma^{\Phi}}{\Delta b_i}. \quad (14)$$

В цих формулах Δb_i – величини середніх ліній (хорд) раніше згадуваних панелюк.

За допомогою теореми Жуковського „в малому” (11) розраховують похідні аеродинамічних навантажень, а їх підсумовуванням по всім базовим поверхням схематизованої компоновки – похідні відповідних сумарних аеродинамічних сил та моментів.

Якщо згадане підсумування проводити окремо по групах базових площин, які схематизують відповідні частини ЛА чи зовнішніх підвісок озброєння, наприклад, то отримаємо сумарні аеродинамічні характеристики згаданих окремих частин (чи зовнішніх вантажів) з урахуванням їх взаємного впливу (інтерференції). А в свою чергу, такий підхід відкриває можливість побудови моделі динаміки взаємного руху об’єктів озброєння і ЛА під час бойового чи вимушеного скидання та відділення. З’являється можливість проведення досліджень по визначенню безпечності такого відділення, та відпрацювання необхідного керування для забезпечення останнього з повним урахуванням несталості процесу.

З допомогою отриманих похідних легко розрахувати значення самих коефіцієнтів. Наприклад, для подовжнього руху ЛА:

$$\begin{aligned} C_y &= C_{y0} + C_y^a \cdot a + C_y^{w_z} \cdot w_z + C_y^{d_3} \cdot d_3 + C_y^{\alpha} \cdot \alpha + C_y^{w_z} \cdot w_z + C_y^{\alpha_3} \cdot \alpha_3; \\ m_z &= m_{z0} + m_z^a \cdot a + m_z^{w_z} \cdot w_z + m_z^{d_3} \cdot d_3 + m_z^{\alpha} \cdot \alpha + m_z^{w_z} \cdot w_z + m_z^{\alpha_3} \cdot \alpha_3; \quad (15) \\ C_{y0} &= C_y^{j_{kp}} \cdot j_{kp} + C_y^{j_{z0}} \cdot j_{z0}; \quad a_0 = -\frac{C_{y0}}{C_x}; \quad m_{z0} = m_z^{j_{kp}} \cdot j_{kp} + m_z^{j_{z0}} \cdot j_{z0}; \\ \bar{x}_F &= -\frac{m_z^a}{C_y^a}; \quad \bar{x}_\partial = -\frac{m_z}{C_y}. \end{aligned}$$

В формулах (15) d_3 – кут відхилення закрилків чи рулів висоти (можливо того або іншого, чи того і іншого); j_{kp} і j_{z0} – кути установлення крила і нерухомого горизонтального оперення; \bar{x}_F і \bar{x}_∂ – відносні координати подовжніх фокусу та центру тиску ЛА; C_{y0} і m_{z0} – значення коефіцієнтів при $a = 0$.

Аналогічно можна записати формули для випадків інших видів руху та деформації ЛА.

1.3 Про точність та достовірність результатів

Точність та достовірність методу, зміст якого коротко викладений в даній роботі, багаторазово та різностороннє перевірявся співставленнями з точними аналітичними рішеннями, даними, отриманими по іншим методам авторами, чисельними експериментальними даними, наведеними в різноманітних джерелах та

отриманими в спеціально виконаних авторами дослідах, ретельними методичними дослідженнями. Метод має фундаментальне математичне обґрунтування [7...9], яке весь час знаходиться на шляху неперервного розвитку та вдосконалення [10...12]. Багато матеріалів указаних вище співставлень наведені в монографіях [1...3] та інших роботах.

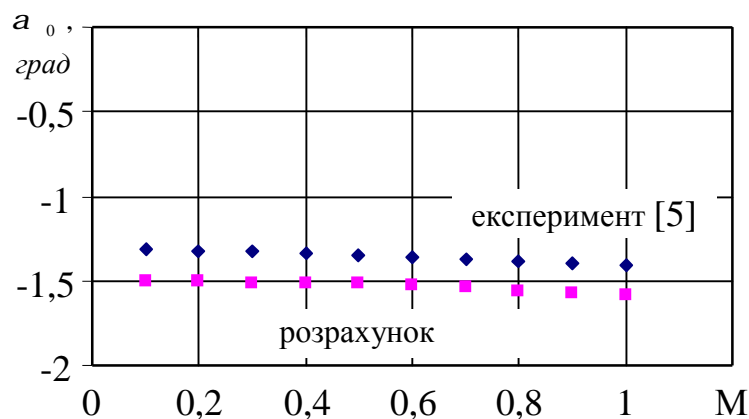


Рис. 1. Залежність a_0 від числа M

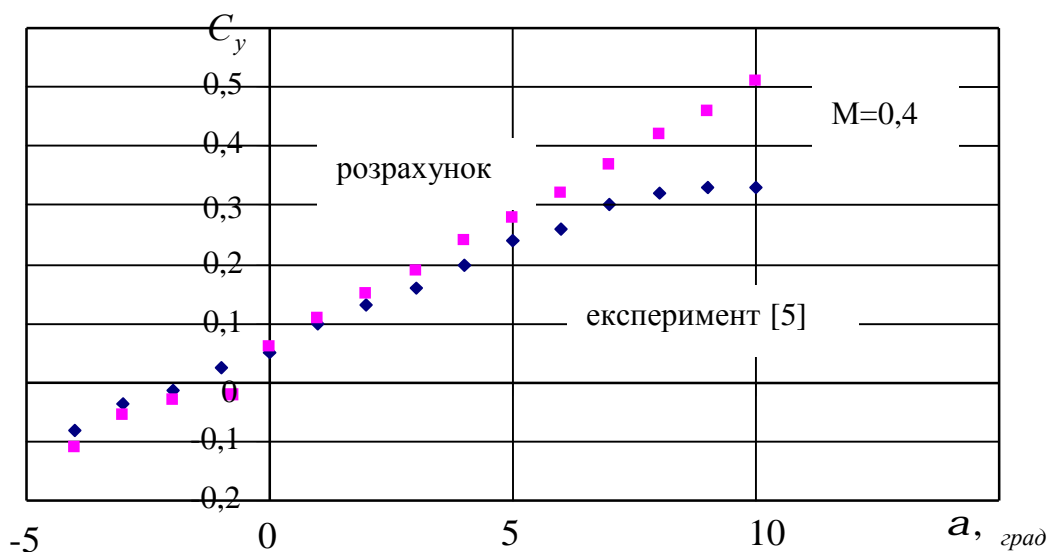


Рис. 2. Залежність C_y від кута a

Деякі порівняння результатів розрахунків та експериментальних даних проводились і в даній роботі, вони наведені на рис 1, 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – М: Наука, 1965.
2. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. – М: Наука, 1971.

3. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях.
4. Корытько А.И. Расчёт аэродинамических характеристик летательного аппарата при дозвуковых скоростях полёта с помощью ЭВМ. –К: КВВАИУ, 1988.
5. Беспилотный разведчик «Рейс», техническое описание, книга I, часть 1 – основные характеристики, 143.00.0000.000 ТС–1, 1976.
6. Editer by H.J. Wirz, J.J. Smoldern; von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode – Genese, Belqinm. Перевод с английского под редакцией О.М. Белоцерковского, В.П. Шидловского. –М: «Мир», 1981.
7. Лифанов И.К., Полонский Я.Е. Обоснование численного метода «дискретных вихрей» решения сингулярных интегральных уравнений. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
8. Лифанов И.К., Полонский Я.Е., Тимофеев И.Я. Численный метод дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений. В сб.: Аэродинамика неустановившихся движений. Труды ЦАГИ, 1975, вып. 1705.
9. Лифанов И.К. О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши. ДАН СССР, 1978, т. 239, №2.
10. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавлении движущегося штампа в упругую плоскость с учётом тепловыделения. ПММ, 1982, т. 46, №3.
11. Лифанов И.К., Матвеев А.Ф. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения на отрезке с переменными коэффициентами. М.: Препринт ИТЭФ, 1983, №185.
12. Лифанов И.К., Моляков И.О. О численном решении сингулярного интегрального уравнения второго рода. М: Труды ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, «Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов», вып.1313, 1986.

Надійшла до редакції 29.10.2011