

**БУДІВНИЦТВО ТА ЦИВІЛЬНА ІНЖЕНЕРІЯ (192)**

---

---

УДК 624.014

**АЛГОРИТМ УПРАВЛІННЯ СПЕКТРОМ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ І ФОРМ КОЛИВАНЬ  
ЗА РАХУНОК ЗМІНИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЩОГЛОВИХ СИСТЕМ**

Д-р техн. наук В. Б. Гриньов, асист. В. В. Виноградов

**ALGORITHM FOR CONTROLLING THE SPECTRUM OF EIGENFREQUENCIES AND  
VIBRATION MODES BY CHANGING THE GEOMETRIC PARAMETERS OF MAST  
SYSTEMS**

D. Sc. (Tech.) V. B. Grinyov, assistant V. V. Vynogradov

DOI: <https://doi.org/10.18664/1994-7852.194.2020.230025>

***Анотація.** У статті розглядається модель щогли з шістьма рівнями закріплення вант. Головну увагу в роботі приділено розгляду методів управління спектром власних частот. Автоматизація процесів обчислення забезпечується за рахунок програмування вбудованого модуля в програмі Revit. У роботі проведено аналіз чутливості для першої та другої власних частот. Наведено співвідношення на випадок завдання пошуку екстремуму власної частоти з заданим номером за умови, що загальний обсяг варійованих поясів фіксований.*

***Ключові слова:** щогли з вантовим закріпленням, управління спектром власних коливань, розподіл геометричних характеристик, варійовані величини.*

***Abstract.** The article considers a model of a mast with six levels of fastening of cables. The main attention in the work is considered to the methods of control of the natural frequency spectrum, due to the use of methods of sensitivity analysis and optimization. The above task is achieved by varying the cross-sectional area of the pipes - racks. Automation of computational processes is provided by programming the built-in module in the Revit program. For more convenient and faster control of the natural frequency spectrum, the algorithm described above was written in a free add-on for Revit - Dynamo. With the help of so-called nodes, an application was created that took data from the depicted 3D model Revit and performed calculations. This allows you to easily use optimality conditions similar to the maximum principle.*

*The sensitivity analysis for the first and second own is carried out in the work. The mechanism of their management within the limits of the investigated model is shown. The relations in the case of the problem of finding the natural frequency extremum with a given number are given, provided that the total amount of varied bands is fixed.*

*The numerical control algorithm is based on the necessary optimality conditions in the form of the maximum principle for rod models. A variant of varying the area of the belts along the height of the mast is proposed. The sensitivity analysis for the first and second natural frequencies is carried out and its use for construction of effective computational process is shown. Based on the results of the work, a working software algorithm was created for fast analysis of mast oscillations on extensions. Graphs of zones of possible change of the first and second frequencies are resulted. The distribution of the cross-sectional area for frequencies is shown. To compare the results of natural frequency calculations on other calculation models, the first and second natural frequencies of bending oscillations were calculated by the finite element method in the SCAD complex. The errors*

for the points of the curves (constant in the height of the mast area of the belts) do not exceed 10%. It should be noted that the consideration of optimization problems of the above type on the basis of finite element models is quite difficult; for them it is not possible to formulate the necessary conditions of optimality similar to the principle of maximum.

**Keywords:** masts with cable fastening, control of the spectrum of natural oscillations, distribution of geometrical characteristics, variable values.

**Вступ.** Можливість управління спектром власних коливань металевих конструкцій на відтяжках, особливо значної висоти або габаритів, завжди викликала значну зацікавленість. Щогли мобільного зв'язку є особливим відносно новим типом висотних споруд. У технічній літературі недостатньо рекомендацій, адресованих проектувальникам щогл мобільного зв'язку, відсутні обов'язкові нормативні документи з їх проектування. При проектуванні і експлуатації щогл мобільного зв'язку відбувається високий рівень перевитрати матеріалу і висока пошкоджуваність конструкції. Дані обставини обумовлюють необхідність удосконалення методів розрахунку, діагностики та розвитку ефективного перерозподілу обсягу матеріалу та можливість таким чином управляти спектром власних коливань. Також з настанням епохи 5G, яка так стрімко розповсюджується Європою, все більше щогл потребують перерахунку в результаті збільшення навантаження. З огляду на їх функціональність до щогл мобільного зв'язку виставляють вимоги необхідної несучої здатності, жорсткості, стійкості, надійності і довговічності з урахуванням забезпечення мінімальної маси, а також технологічності виготовлення і монтажу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питання оптимізації стрижнів за спектром власних частот розглянуто в роботах вітчизняних вчених, таких як Гриньов В. Б., Філіппов А. П., Понтрягін Л. С., Болтянський В. Г., Гамкрелідзе Р. В., Міщенко Е. Ф. та ін. У цілому питання оптимізації та аналізу чутливості знайшли відображення у працях багатьох закордонних науковців, зокрема Хог Е., Чой К., Комкова В.

Зауважимо, що використання підходів, описаних в [3, 9], для щогл на відтяжках мобільного зв'язку описується вперше. На нашу думку, в умовах швидкого збільшення кількості даних конструкцій треба більше уваги приділяти питанню збалансованості використання матеріалу. На сьогодні саме таке завдання є актуальним у світі мобільних вишок, адже збільшення обладнання та часта його заміна стимулюють постійний аналіз таких систем. Саме використання сучасних ВІМ-моделей щогл та програмування їх швидкого аналізу та розрахунку є важливим завданням сучасного інженерного світу.

**Визначення мети та завдання дослідження.** *Мета роботи* – на прикладі щогли з шістьма рівнями відтяжок проаналізувати проблеми управління спектром власних частот. Запропонувати варіант варіювання площею поясів за висотою щогли. Провести аналіз чутливості для першої і другої власних частот і показати його використання для побудови ефективного обчислювального процесу. Показати можливості поширення розробленого підходу на більш загальні завдання управління спектром та створити модель для швидкого аналізу та управління.

*Об'єкт дослідження* – шістдесятиметрова щогла на відтяжках при розгляді можливості управління спектром власних коливань.

*Предмет дослідження* – процеси управління спектром власних коливань щогл мобільного зв'язку.

**Основна частина дослідження.** Всі побудови в роботі проводяться на прикладі щогли мобільного зв'язку висотою  $l = 60\text{ м}$  з шістьма рівнями вантових відтяжок, схема якої зображена на рис. 1.

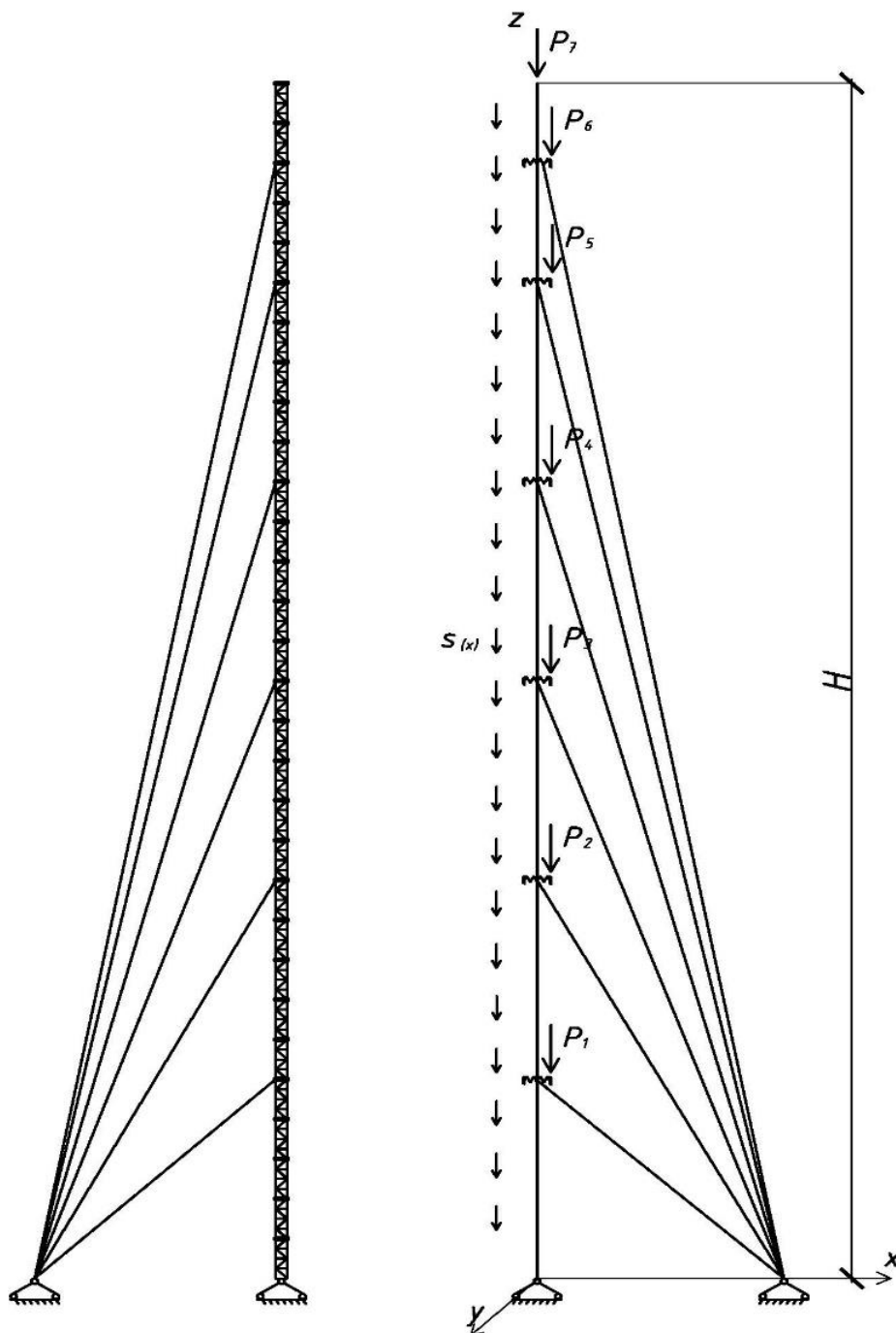


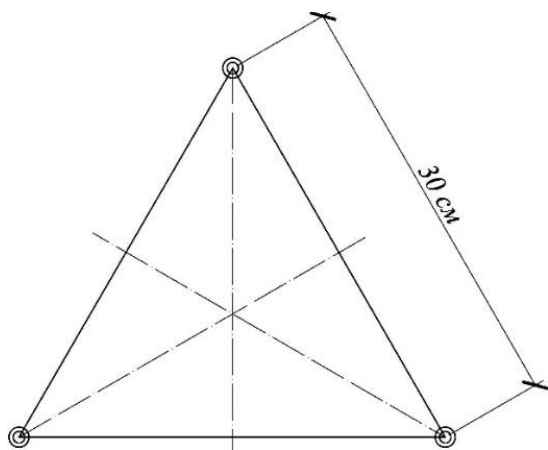
Рис. 1. Загальний вигляд розрахункової схеми щогли (стрижнева модель):  
 $P_1$ – $P_7$  – осеві зосереджені сили, що реалізують вплив на щоглу вант і ваги обладнання;  
 $s(x)$  – поздовжнє навантаження, що визначається власною вагою щогли

Щогла складена з двометрових секцій тригранного поперечного перерізу (рис. 2).

На рис. 3 показано обладнання, яке навішується на щоглу. Між собою секції з'єднуються фланцями. Пояси подано трубчастими елементами, що мають

фіксовані внутрішній і зовнішній діаметри в межах однієї секції. Будемо вважати, що від секції до секції зовнішній діаметр залишається постійним, а внутрішній може змінюватися відповідно до даних, наведених в таблиці.

а



б

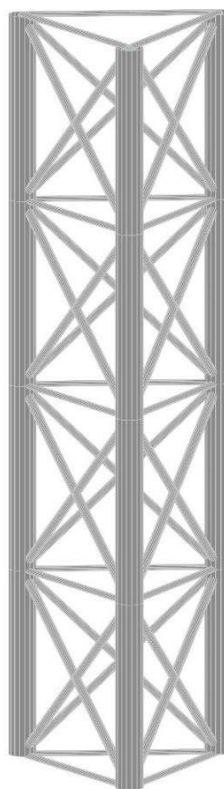


Рис. 2. Загальний вигляд секцій (б) і схема поперечного перерізу (а)

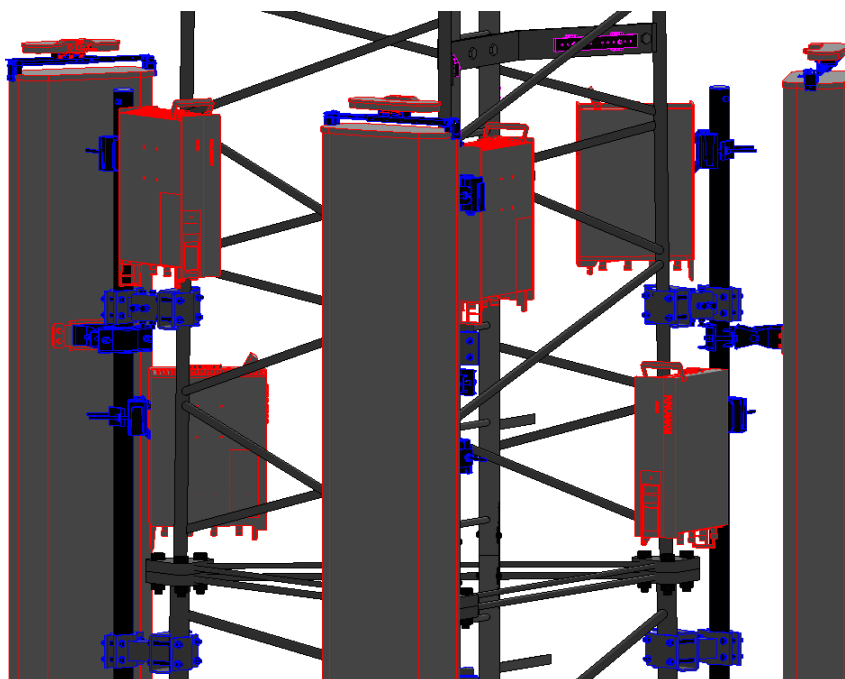


Рис. 3. Обладнання, що монтується на щоглах

Набір можливих варіантів перерізів поясів

Номер за сортаментом	1	2	3	4	5	6	7
Параметри труби, діаметр x товщина, см	4.8x0.2	4.8x0.22	4.8x0.25	4.8x0.28	4.8x0.3	4.8x0.32	4.8x0.35
$F, \text{см}^2$	8.670	9.496	10.721	11.928	12.723	13.511	14.679
$I_z, \text{см}^4$	1325.6	1452.5	1638.3	1822.4	1943.7	2063.8	2241.7

Далі будемо вважати, що варійованою вважається функція, яка визначає розподіл сумарної площі поясів за висотою щогли  $F(z)$ . При цьому дискретний характер варіювання замінимо на певному етапі на безперервний; тобто вважатимемо, що варіюється безперервна  $F(z)$ , яка підлягає обмеженням

$$F_1 \leq F(z) \leq F_2, \quad (1)$$

де  $F_1, F_2$  відповідають сортаменту 1 і 7 в таблиці.

Решітка для секції, показаної на рис. 2, складається з круглих прутів діаметром  $\varnothing 1.4$  см. При цьому решітка для різних секцій залишається тією самою.

Момент інерції поперечного перерізу при згині в площині  $zx$  буде позначатися  $I(z)$ , при цьому момент інерції буде функцією площі в рамках обмежень (1). З геометрії перетину (рис. 2) можна припустити  $I = \alpha F$ . З таблиці видно, що можна прийняти  $\alpha = 152.9$ .

Модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ , питома вага  $\gamma = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$ , щільність

матеріалу  $\mu = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 / \text{см}^2$  однакова для поясів і решітки. Відтяжки (ванти) являють собою канат одинарної завивки типу Т діаметром  $\varnothing 1.4$  см за стандартом ГОСТ 3063-80. Зусилля попереднього натягу канатів однакове для всіх рівнів і становить 200 кг.

Крайова задача для власних форм згинальних коливань може бути записана у формі [2, 12].

Для поздовжнього деформування мають місце диференціальні рівняння

$$\frac{dw}{dx} = \frac{N}{EF}, \quad \frac{dN}{dx} = -s \quad (2)$$

з граничними умовами

$$w(0) = 0 \quad N(l) = P_7 \quad (3)$$

і умовами в точках прикладання поздовжніх зосереджених сил  $P_i$ , породжених натягом вант,

$$w(z_i^-) = w(z_i^+); \quad N(z_i^-) + P_i = N(z_i^+); \quad i = \overline{1,6}. \quad (4)$$

У цих виразах  $z_i^-$ ,  $z_i^+$  – значення координати знизу і зверху від точки  $z_i$ , функції  $w(z)$ ,  $N(z)$  являють собою переміщення і осьові сили. Розподілене осьове навантаження має вигляд

$$S(x) = -\gamma(F + F_d). \quad (5)$$

Величина  $F_d$  виходить шляхом ділення сумарного обсягу решітки на довжину секції. У нашому випадку  $F_d = 8.3 \text{ см}^2$ . Деформації згину щогли можуть бути описані системою диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{dz} = \varphi; \quad \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{M}{EI}; \quad \frac{dM}{dz} = Q - N\varphi; \quad \frac{dQ}{dz} = -p^2 \mu(F + F_d)u; \quad (6)$$

з граничними умовами

$$u(0) = M(0) = 0; \quad M(H) = 0; \quad Q(H) = -p^2 m_H u(l), \quad (7)$$

і умовами в точках кріплення відтяжок

$$u(z_i^-) = u(z_i^+); \quad \varphi(z_i^-) = \varphi(z_i^+); \quad M(z_i^-) = M(z_i^+); \quad Q(z_i^-) + c u(z_i) = Q(z_i^+); \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

В умовах (7) величина  $m_H$  являє собою масу обладнання на верхньому майданчику щогли,  $p$  – власна частота. Жорсткості  $C_i$  (монтажні жорсткості) характеризуються параметрами вантового вузла і підраховуються за співвідношеннями, наведеними в роботі [5].

Для будь-якої функції  $F(x)$ , підпорядкованої обмеженням (1), крайова задача (6), (7), (8), з урахуванням співвідношень (2), (3), (4), визначає спектр власних частот  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$  і відповідних власних функцій  $u_i(z)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Нехай форма коливань  $u_i(x)$  (а точніше, набір функцій  $u_i(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $M(z)$ ,  $Q(z)$ ) належить до безлічі власних функцій, що відповідають власній частоті  $p$  із заданим номером. Новий серійний номер власної частоти, в разі простих (некратних) частот, присвоюється в процесі їх чисельного знаходження. Поставимо задачу знаходження в рамках обмежень (1) функції  $F(x)$ , що доставляє в рамках зазначеного вище різноманіття власних форм екстремальне значення власній частоті  $p$ , тобто

$$\text{розглянемо задачу мінімізації функціонала} \quad J(F) = kp^2 = \min, \quad (9)$$

для  $k = +1(-1)$  це відповідає мінімізації (максимізації) власної частоти. Власну частоту можна подати за допомогою формули Релея [3]

$$p^2 = \int_0^{p^+} \frac{M^2}{EI} dz \bigg/ \int_0^H \mu(F + F_d) u^2 dz. \quad (10)$$

Необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму [8] для функціонала (9) з урахуванням виразу (10) детально розглянуто в монографії [3].

З огляду на важливу властивість самоспряженості необхідні умови будуть подані крайовим завданням (2)–(4), кривих, замкнених на оптимальному  $F(x)$  умовою максимуму гамільтоніана

$$H = k \cdot \left[ \frac{M^2}{E\alpha F} + p^2 \mu(F + F_d) u^2 \right]. \quad (11)$$

З огляду на те, що при максимізації гамільтоніана (11) величини  $M$ ,  $u$  розглядаються як параметри, які можна отримати з формули [3],

для  $k = -1$

$$F = \begin{cases} F_2, & F^* \geq F_2; \\ F^*, & F_1 \leq F \leq F_2; \\ F^*, & F \leq F_1; \end{cases} \quad (12)$$

де  $F^* = \frac{|M|}{p\mu\sqrt{\alpha\mu E}}$  знаходиться за умови, що

$$H(F) \text{ для } k = -1 \text{ опукла вгору функція} \quad \left( \frac{\partial^2 H}{\partial F^2} \leq 0 \right);$$

для  $k = 1$

$$F = \begin{cases} F_1, & H(F_1) \geq H(F_2); \\ F_2, & H(F_1) < H(F_2). \end{cases} \quad (13)$$

Це є наслідком того, що гамільтоніан  $H(F)$  – це опукла вниз функція  $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial F} \leq 0\right)$  і оптимальне рішення можна знайти тільки з ділянок границь (1).

Співвідношення (12), (13) замикають вихідну крайову задачу, роблять її нелінійною. Далі буде використаний підхід, викладений в [3, 11], заснований на послідовному наближенні оптимального рішення на послідовності варійованих функцій. Важливу роль при цьому відіграє

аналіз чутливості, змістом якого є знаходження функціональних похідних  $\frac{\partial J}{\partial F}$ . Використовуючи результати, викладені в [9], можна записати

$$\frac{\partial J}{\partial F} = \frac{\partial H}{\partial F} = k \left[ -\frac{M^2}{\alpha E F^2} + p^2 \mu u^2 \right], \quad (14)$$

що визначає функції чутливості для даної задачі. На рис. 4 показані форми коливань і функції чутливості для першої і другої власних частот в разі  $F(x) \equiv F_2$ . Для функцій  $\delta F(z)$ , що визначають необхідні зміни площі поперечного перерізу щогли в межах обмежень (1), зміни власної частоти будуть визначатися інтегралом

$$\delta J = k \int_0^l \left( \frac{\partial H}{\partial F} \delta F \right) dz = k \int_0^l \left[ -\frac{M^2}{\alpha E F^2} + p^2 \mu u^2 \right] \delta F dz. \quad (15)$$

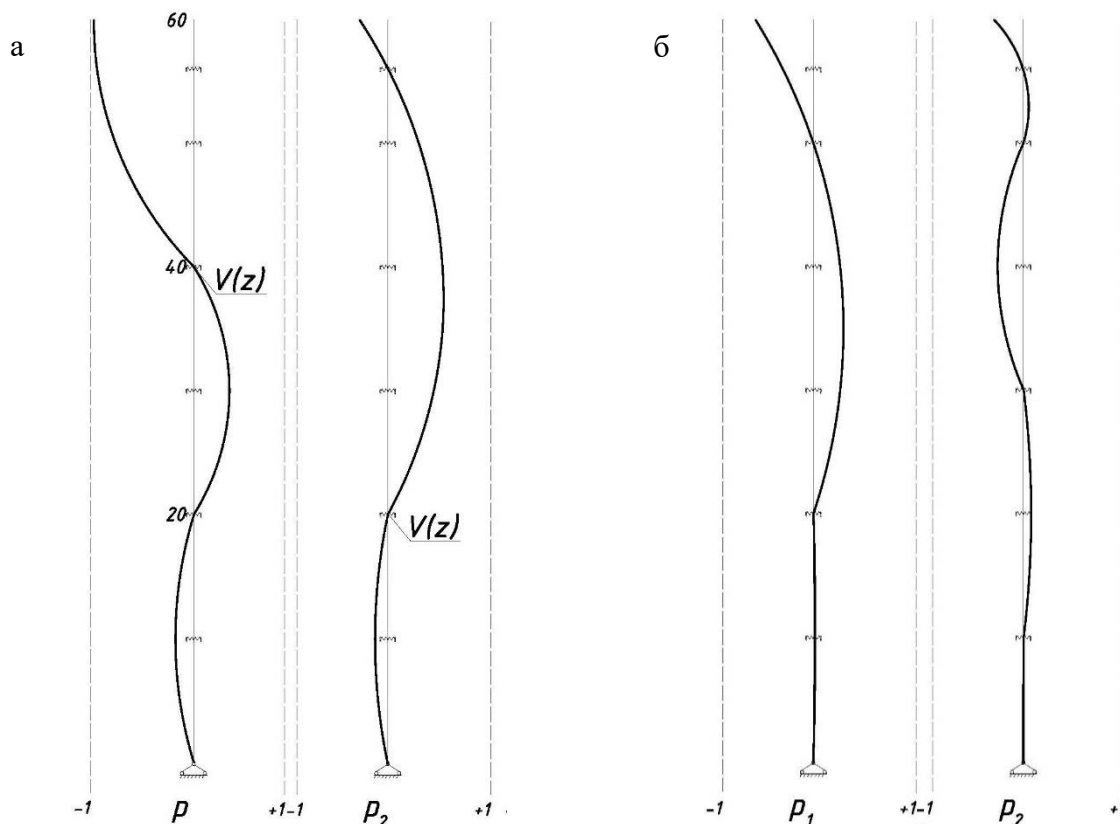


Рис. 4. Форми коливань (а) і функції чутливості (б) для першої  $p_1$  і другої  $p_2$  власних частот

Варіації площі будуть сильніше впливати в тих перетинах, де більша величина похідної, більша чутливість. Зауважимо, що для випадку максимізації власної частоти, згідно з формулою (12), на ділянках оптимального рішення  $F_*$  всередині інтервалу  $[F_1, F_2]$ , похідна (14) перетворюється в нуль. Для інших законів

$F(x)$  вона показує тенденцію зміни частоти.

Розв'язання крайової задачі на власні значення здійснювалося на основі методу початкових параметрів при використанні основних програмних модулів з роботи [2]. Перерахунок законів зміни площі поперечного перерізу  $F(z)$  проводився відповідно до залежності

$$F_{i+1}(z) = F_i(z) + k \left[ -\frac{M_i^2(z)}{\alpha E F_i^2(z)} + p_i^i \mu u^2(z) \right] \Delta F. \quad (16)$$

При цьому нове наближення  $F_{i+1}(z)$  мало би підпорядковуватися обмеженням (1). Якщо в будь-якій точці  $F_{i+1}(z) > F_2 (< F_1)$ , то приймалося  $F_{i+1}(z) = F_2 (= F_1)$ . Величина кроку  $\Delta F$

була постійна за висотою щогли; зокрема, в проведених розрахунках приймалося  $\Delta F = (F_2 - F_1) / 3$ . На рис. 5 наведено замкнуті криві в координатах об'єм ( $V$ ) – власні частоти ( $p$ ) (для другої і першої власних частот).

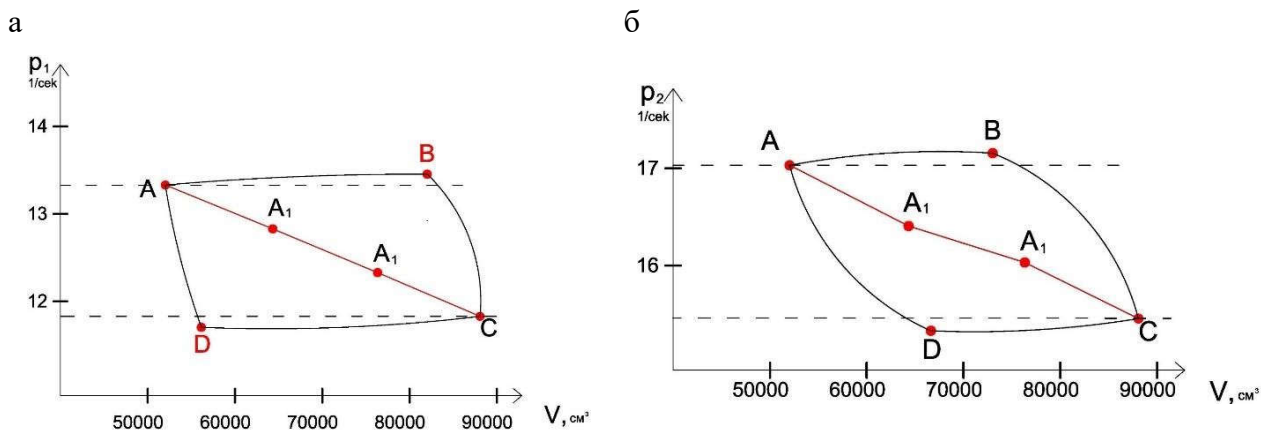


Рис. 5. Зони можливих змін першої (а) і другої (б) власних частот

Криві  $AA'C$  відповідають залежностям частот від обсягу для щогл постійного за висотою поперечного перерізу. Характерно, що для мінімальної в рамках обмежень (1) площі поперечного перерізу (точка А) відповідає більша величина частоти, ніж для максимального значення площі (точка С). Оскільки власні частоти визначаються співвідношенням характеристик жорсткості та інерційних характеристик, із зазначеного

співвідношення можна зробити висновок, що зростання площі поперечного перерізу переважно збільшує інерційні характеристики. Ця обставина характерна як для першої, так і для другої власних частот.

На рис. 6 наведено розподіли  $F(x)$ , відповідні частотам  $p_1^+, p_1^-$  і  $p_2^+, p_2^-$ . Жирною пунктирною лінією показана частинна апроксимація оптимального рішення відповідно до дискретної схеми варіювання, наведеної в таблиці. Для



конкретного  $z$  значення площі в межах секції приймається рівним до найбільш близького з дискретних наборів, зазначених

в таблиці. Така дискретизація оптимальних розподілів  $F(x)$  практично не впливає на величини власних частот.

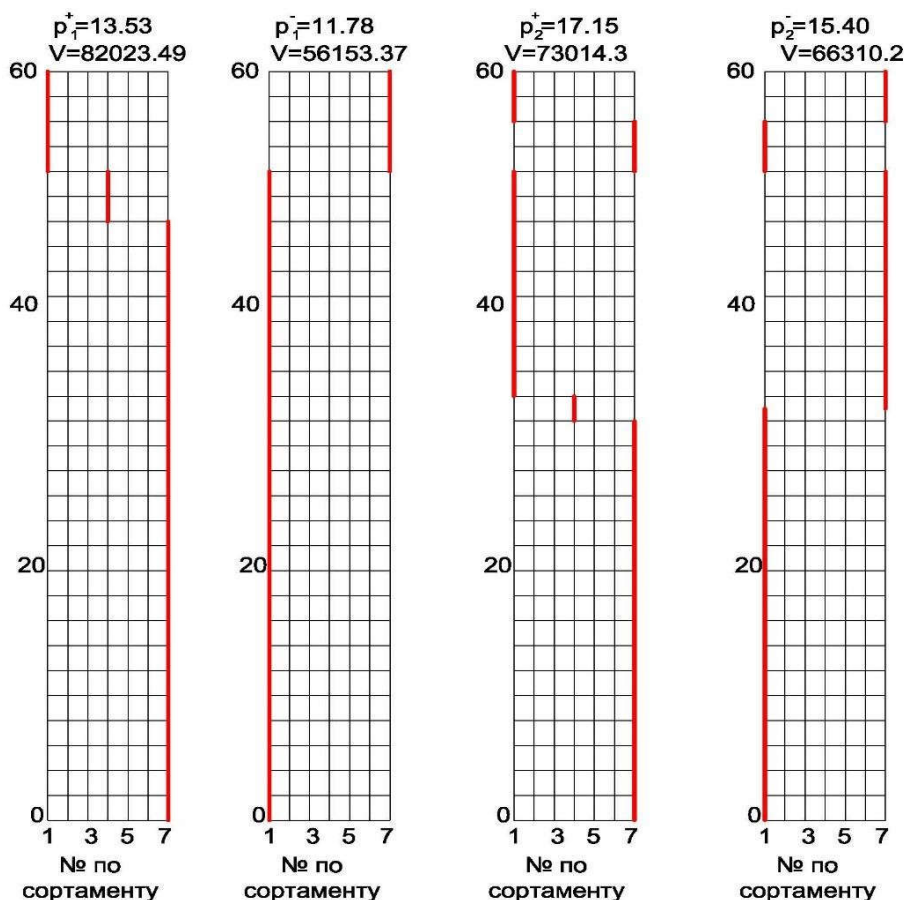


Рис. 6. Розподіл площі перетину для частот  $p_1^+, p_1^-$  і  $p_2^+, p_2^-$

Наведені співвідношення узагальнюються на випадок завдання пошуку екстремуму власної частоти з заданим номером за умови, що загальний обсяг варійованих поясів фіксований,

$$V = \int_0^l F(x) dz = const. \quad (17)$$

Для такого завдання функціонал якості (9) модернізується

$$J(F) = kp^2 + k_0 \int_0^l F dz, \quad (18)$$

де  $k_0$  – невизначений множник Лагранжа для обліку умови сталості обсягу (17). Гамільтоніан в цьому випадку набуває вигляду

$$H = k \left[ \frac{M^2}{E\alpha F} + p^2 \mu (F + F_d) u^2 \right] + k_0 F. \quad (19)$$

Для заданої задачі оптимізації функція чутливості позначається так, як це запропоновано в [3], через  $V \rightarrow p$ . Функція чутливості матиме вигляд

$$\frac{\partial J}{\partial F} = k \left[ -\frac{M^2}{\alpha E F^2} + p \mu u \right] + k_0. \quad (20)$$

Аналогічні побудови мають місце і для двоїстої задачі, що позначається  $V \rightarrow p$  відповідно до [3,10] як завдання знаходження  $F(x)$ , що надає в рамках обмежень (1) екстремального значення обсягу матеріалу при фіксованому значенні відповідної власної частоти. Рішення даних завдань утворюють в координатах  $V, p$  замкнуту криву; приклади таких кривих для

першої і другої власних частот згинальних коливань показано на рис. 5. Для будь-якого фіксованого обсягу  $V \in [V_1, V_2]$  верхні ділянки ABC відповідають, в рамках завдання  $V \rightarrow p$ , максимальним, а нижні ADC – мінімальним власним частотам. Для фіксованого значення частоти  $p \in [p^-_1, p^+_2]$  ліві ділянки DAB відповідають мінімальним, а праві BCD – максимальним величинам обсягів.

Точки зазначених замкнутих кривих будувалися шляхом вирішення завдань  $V \rightarrow p$  на основі формул, аналогічних (16):

$$F_{+i}(z) = F_i(z) + \left[ k \left[ -\frac{M_i^2(z)}{\alpha E F_i^2(z)} + (p^i)^2 \mu u_i^2(z) \right] + k_0 \right] \Delta F, \quad (21)$$

де величини  $k_0, k$  нормовані  $|k| \leq 1, |k_0| \leq 1$ . Це досягається на кожному кроці шляхом їх поділу на  $\max(|k|, |k_0|)$ . Питання виконання умов (17) на кожному кроці вирішується підбором величини  $k_0$  в (21). Слід зауважити, що для завдання  $p \rightarrow V$  така проблема важко вирішувана.

У процесі нормування величина  $k$  в (21) змінюється і дає змогу побудувати необхідні наближення до оптимального рішення.

Як видно з характеру замкнутої кривої, на ділянці АВ для частоти  $p_1$  величина максимальної частоти мало залежить від величини обсягу. Такою ж властивістю володіє мінімальна частота для ділянки DC. Це існує внаслідок своєрідного співвідношення характеристик жорсткості та інерційних характеристик для даного варіанта конструкції.

Замкнені криві ABCD визначають резерви даної конструкції з точки зору можливих змін першої і другої власних частот згинальних коливань і обсягу (ваги) матеріалу поясів.

Для порівняння результатів розрахунків власних частот за іншими

розрахунковими моделями перша і друга власні частоти згинальних коливань розраховувалися методом скінченних елементів у комплексі SCAD. При побудові розрахункової моделі використовували схему, показану на рис. 2. Похибки для точок кривих Aa1 A2C (постійної за висотою щогли площі поясів) не перевищують 10 %. Слід зауважити, що розглядати завдання оптимізації зазначеного вище типу на основі скінченно-елементних моделей досить важко; для них не вдається сформулювати необхідні умови оптимальності, аналогічні принципу максимуму [8]. Оптимізація на дискретному наборі варійованих величин можлива, але тягне за собою значні обчислювальні труднощі.

Для більш зручного та швидкого управління спектром власних частот вищеописаний алгоритм було записано в безкоштовному доповненні для програми Revit – Dynamo. За допомогою так званих нодів було створено аплікацію, яка брала дані з зображеної 3D моделі Revit та проводила розрахунки. На рис. 7 подано так званий Dynamo Script для розглянутої задачі.

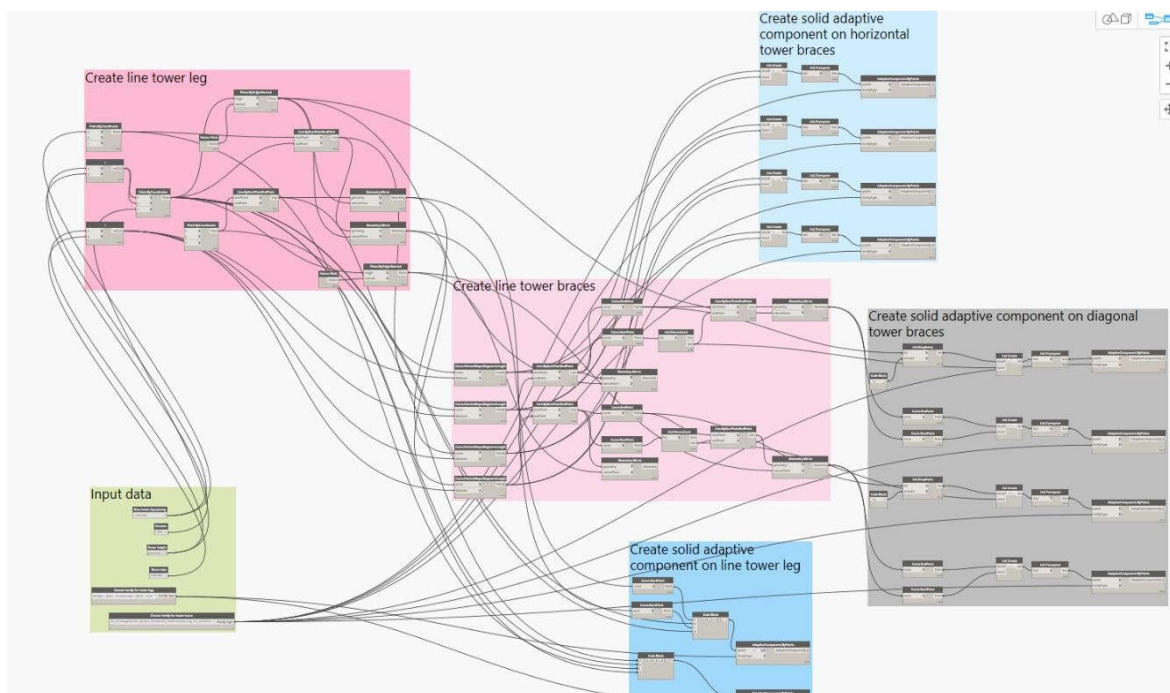


Рис. 7. Dynamo Script для управління власними частотами

**Висновки.** У роботі запропоновано підхід до проблеми управління спектром власних частот згинальних коливань щогл на відтяжках. Чисельний алгоритм управління базується на необхідних умовах оптимальності у формі принципу максимуму для стрижневих моделей. Запропоновано варіант варіювання площею

поясів за висотою щогли. Проведено аналіз чутливості для першої і другої власних частот і показано його використання для побудови ефективного обчислювального процесу. Показано можливості поширення розробленого підходу на більш загальні завдання управління спектром.

### Список використаних джерел

1. Гриньов В. Б. Деякі особливості завдань оптимізації статично навантажених балок. *Науковий вісник будівництва*. Харків: ХДТУБА, 2011. Вип. 62. С.88–96.
2. Гриньов В. Б., Алешечкіна Т. Н. Розрахунок одновимірних елементів конструкцій. Харків: Видавництво Іванченко І. С., 2013. 177 с.
3. Гриньов В. Б., Філіппов А. П. Оптимізація стрижнів по спектру власних частот. Київ: Наукова думка, 1979. 211 с.
4. Про одну модельну задачу оптимізації щогл мобільного зв'язку / В. Б. Гриньов, Ю. М. Яровий, Т. А. Алешечкіна, В. В. Виноградов, В. А. Левада. Матеріали IV Міжнародної науково-технічної інтернет-конференції. Харків, 2014. С. 138–142.
5. Дривинг А. Я. Стойкость мачт на оттяжках. Москва: Изд-во литературы по строительству, 1964. 112 с.
6. Перельмутер А. В. SCADOffice. Розрахунок щогл на відтягненнях. Київ: Вид-во СКАД СОФТ, 2004. 46 с.
7. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Изд. 4-е, перераб. Москва: Изд-во СКАД СОФТ, 2011. 736 с.

8. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Э. Ф. Мищенко. Москва: Наука, 1969. 384 с.
9. Хог Е., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. Москва: Мир, 1988. 428 с.
10. Об одной модельной задаче оптимизации мачт мобильной связи / В. Б. Гринев, Ю. Н. Яровой, Т. А. Алешечкина, В. В. Виноградов, В. А. Левада. Материалы IV Международной научно-технической интернет-конференции. Харьков, 2014. С. 138–142.
11. Editor Madugula. Dynamic response of lattice towers and guyed masts (Committee rapport) : Editor Madugula. M.K.S. Reston (US) ASCE, 2002. P. 266.
12. Smith B. W. Communication structures : Smith B. W. Thomas Telford, 2007. P. 352.

---

Гриньов Володимир Борисович, доктор технічних наук, професор кафедри будівельної та теоретичної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА). E-mail: vladimir.grinyov@gmail.com.

Виноградов Віталій Володимирович, асистент кафедри будівельної та теоретичної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури. E-mail: vitaliy.rda@gmail.com.

Grinyov Vladimir, Dr.Sc. (Tech.), professor of the Department of Structural and Theoretical Mechanics, Kharkiv National University of civil engineering and Architecture. Email: vladimir.grinyov@gmail.com.

Vynogradov Vitaliy, Assistant Professor, Department of Structural and Theoretical Mechanics, Kharkiv National University of civil engineering and Architecture. Email: vitaliy.rda@gmail.com.

Статтю прийнято 16.11.2020 р.