

АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТНЫХ АЛГОРИТМОВ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

В статье приводится авторское мнение к обоснованию механизма преобразования с использованием пакетных алгоритмов вейвлет-анализа (ВА). Анализ механизма пакетного быстрого вейвлет-преобразования (ПБВП) проводится по характеристикам "дерева" и основан на трёх примерах расчёта новых детализирующих коэффициентов (ДК): 1 – для контрольного сигнала, 2 – для тестового с наличием скачков и 3 – специально сформированного гауссова сигнала с провалами. Показано, что результат реконструкции любых двух последующих расщеплений в точности соответствует реконструкции исходного корневого узла.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, пакетное быстрое вейвлет-преобразование.

Введение. Вейвлет-анализ является разновидностью обобщённого спектрального анализа и отличается от классического гармонического анализа, названного в [1] "королевством Фурье", мощным набором математических методов частотно-временного и пространственно-фазового анализа многомасштабных явлений. ВА получил название локализованного спектрального анализа (или спектрального анализа локальных возмущений).

Содержание ВА состоит из трёх основных компонент: разложение сигнала (декомпозицию) на совокупность аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов, преобразование определённой части коэффициентов в зависимости от решаемой задачи, реконструкцию (восстановление) сигнала. Акцент в статье сделан на алгоритмы декомпозиции, которые можно классифицировать на следующие виды: непрерывные, быстрые дискретные и пакетные. Последние подразделяются в зависимости от порядка следования коэффициентов, структурно представляемую, так называемым, "деревом", на алгоритмы одиночного, двойного и частотно-временного "дерева".

Пакетное БВП является адаптивным, оно позволяет более точно приспособливаться к особенностям сигналов путём выбора оптимальной формы "дерева" разложения. Процедура включает два этапа: на первом строится полное "дерево", на втором по выбранной функции стоимости строится наилучшая структура "дерева". На рис. 1 и рис. 2 показаны графики алгоритма ПБВП при обработке тестового сигнала до третьего уровня.

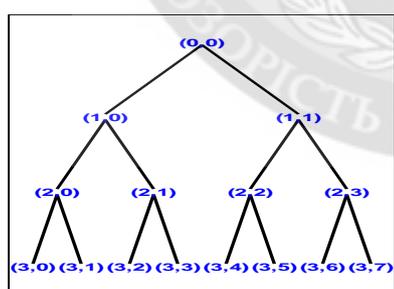


Рис. 1

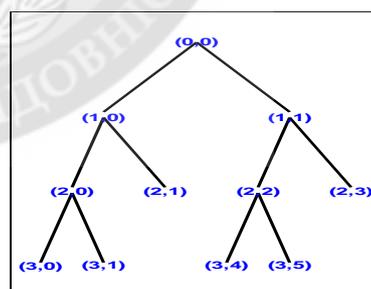


Рис. 2

Механизм типового БВП хорошо описан в целом ряде изданий (в частности, [2, 3]), в то время как подобная информация о механизме ПБВП практически отсутствует. Требуется определение и описание и сам результат ПБВП. Таковым, очевидно, является совокупность ВК всех терминальных (конечных) узлов схемы. Так, для схемы рис. 2 выходной вектор соответствует: $V = [3.0; 3.1; 2.1; 3.4; 3.5; 2.3]$.

Анализ механизма пакетного алгоритма БВП. Под механизмом пакетного преобразования в данном случае понимается интерпретация процедуры итеративного образования ВК правой (детализирующей) ветви схемы рис. 1 и рис. 2 и выяснение физического смысла коэффициентов с использованием сравнительного анализа с типовым алгоритмом. Для представления механизма БВП принято использовать, во-первых,

геометрическую схему последовательности операций алгоритма – "дерево" преобразований, во-вторых, решётку ВК на плоскости "время – масштаб (1/частота)".

Анализ механизма ПБВП по характеристикам "дерева" основан на трёх примерах расчёта новых (по сравнению с алг. Малла) [1] детализирующих коэффициентов (ДК): 1 – для контрольного сигнала, 2 – для тестового с наличием скачков и 3 – специально сформированного гауссова сигнала с провалами.

Пример 1. Дискретный сигнал с равномерным уменьшением амплитуды $n = 8$, при уровне декомпозиции равном 2 и типе вейвлета – db1 (Хаара), $x = [8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1]$.

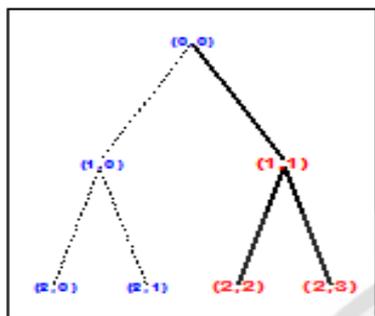


Рис. 3

График "дерева" представлен на рис. 3. Анализ проводился для правой ветви с узлами: 1.1, 2.2 и 2.3. Результат в узле 1.1 определяется разностью соседних отсчётов сигнала, нормированной к $\sqrt{2}$, и соответствует значениям: $[0.7\ 0.7\ 0.7\ 0.7]$. Это значение определяет выходной ДК-1 типового алгоритма БВП.

Для новых ДК ПБВП при расщеплении узла [1.1] получим по 2 значения: для ДК-2.2: $[1.0\ 1.0]$, для ДК-2.3 $[0\ 0]$. Проверочный расчёт показывает, что первый результат соответствует нормированной сумме ДК узла [1.1], а второй – нормированной разности. Следовательно, принцип вычисления ВК в правой ветви "дерева" повторяет алгоритм стандартного алгоритма Малла, но,

если для БВП источником детализации всегда является сглаженная предыдущая версия сигнала, то для ПБВП на разных уровнях (при числе уровней больше двух) исходными версиями являются как сглаженные, так и флюктуирующие версии.

Возникает задача интерпретации геометрического смысла результатов расщепления в правой ветви "дерева". Формулировка данных версий по поставленной задаче основана на анализе вида ДК в узлах "дерева" для двух специально сформированных сигнальных функций, которые можно отнести к классу сложных, поскольку в них сочетаются относительно гладкие участки и локальные возмущения (примеры 2 и 3).

Пример 2. Тестовый гладкий сигнал с двумя локальными скачками (отн. амплитуда 25%) и числом отсчётов $n = 256$. Сформированная сигнальная функция и выборки ДК в узлах: [1.1], [2.2] и [2.3] представлены на рис. 4а, и 4б. Уровень декомпозиции принят равным двум, тип вэйвлета – Добеши-4 (db4). На рис. 4а, кроме сигнала, показаны выборки ДК в указанных узлах (размер выборки изменяется с изменением уровня). На рис. 4б показаны результаты реконструкции сигнала по данным ДК.

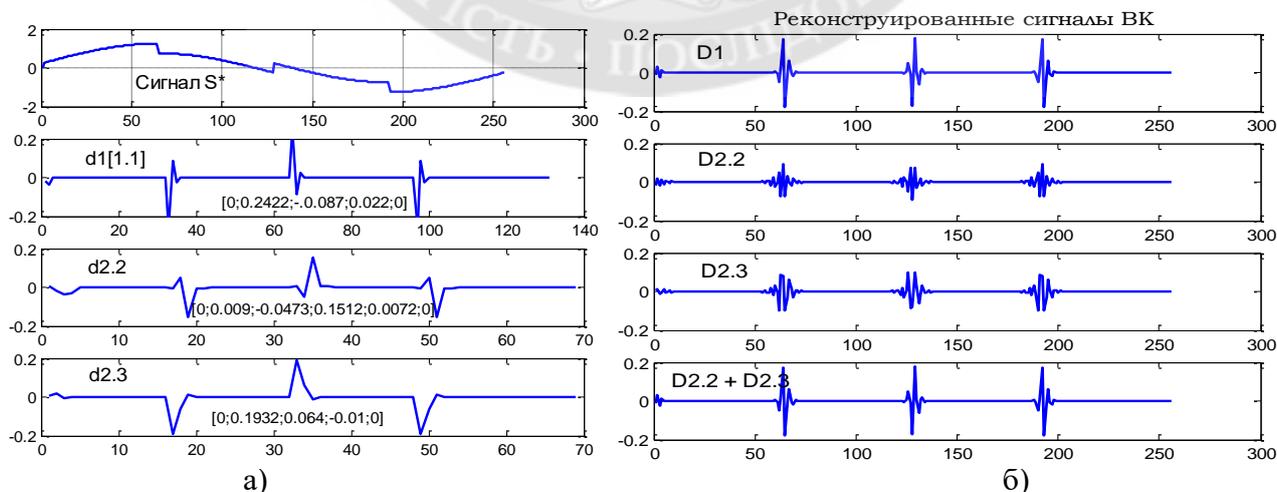


Рис. 4. Сформированная сигнальная функция и выборки ДК в узлах

На графиках рис. 4а приведены вычисленные значения ДК в области второго максимума.

Выводы из анализа: 1 – данные вполне подтверждают предыдущие (пример-1) выводы о принципе формирования расщеплённых версий предыдущей аппроксимации сигнала; 2 – для визуальной фиксации локальных возмущений целесообразно использовать результат d 2.3, хотя другие версии в количественном отношении мало отличаются; 3 – поскольку от уровня к уровню происходит сжатие сигнала, практически желательно использовать реконструированные по коэффициентам версии в соответствующих узлах сигналы. Такие версии представлены на рис 4.б. Нижний график рис. 4б показывает реконструированную сумму ДК d 2.2 и d 2.3. По виду он является полной копией сигнала в узле d 1.1. Для количественной оценки рассчитана ошибка воспроизведения сигнала по D1 и (D2+D3), которая составляет величину порядка 10^{-6} . Ошибка вычислялась в соответствии с выражением:

$$\text{err} = \text{norm}(D1-(D2.2+D2.3)).$$

Следовательно, (вывод 4) суммарный сигнал d 2.2 и d2.3 полностью соответствует сигналу исходной версии в корневом узле. Аналитически это обосновывается обеспечением восстановления сигнала, но одновременно констатирует факт полной эквивалентности исходного ДК и результата его расщепления. Формально возникает вывод о том, что расщепление коэффициентов не приносит новой информации, но надо иметь в виду появление возможностей выбора ВК, наиболее удовлетворяющего поставленной задаче анализа.

Фрагмент программы расчёта в интерактивном режиме с использованием пакета [4-6] приведен в виде блока ниже.

```
x=linspace(0,2*pi,256); s1=sin(x);s2=sign(sin(2*x)); s=s1+0.25*s2; % Формирование сигнала.
V=wpdec(s,2,'db4');d1=wpcoef(V,2);d22=wpcoef(V,5);d23=wpcoef(V,6);% Пакетное ВВП и выборка ДК.
Subplot(411);plot(s);subplot(412);plot(d1);subplot(413);plot(d22);subplot(414);plot(d23);% Распечатка .
D1=wprcoef(V,2);D22=wprcoef(V,5);D23=wprcoef(V,6);
Figure; subplot(411);plot(D1);subplot(412);plot(D22);subplot(413);plot(D23);subplot(414);plot(D22+D23);
```

Пример 3. Сигнал гауссовой формы с числом отсчётов $n = 512$ и двумя провалами (отн. амплитуда до 10 %). Результаты показаны на рис. 5а и 5б. Последовательность эпюров на рис. 5б представляет вид реконструированных ДК по абсолютной величине. Значения элементов векторов ДК в области импульсов, полученные при расчёте следующие:

D1 = [....., 0.14, **0.49**, **0.46**, 0.02, 0.135, 0.134, 0.02, **0.457**, **0.512**, 0.14

D22 = [....., 0.1, 0.14, **0.18**, **0.184**, **0.195**, 0.15, 0.187, **0.245**, **0.28**, 0.22,

D23= [..... , 0.31, 0.27, 0.174, 0.28, , 0.14, 0.1, 0.27, 0.26, 0.14, 0.24,

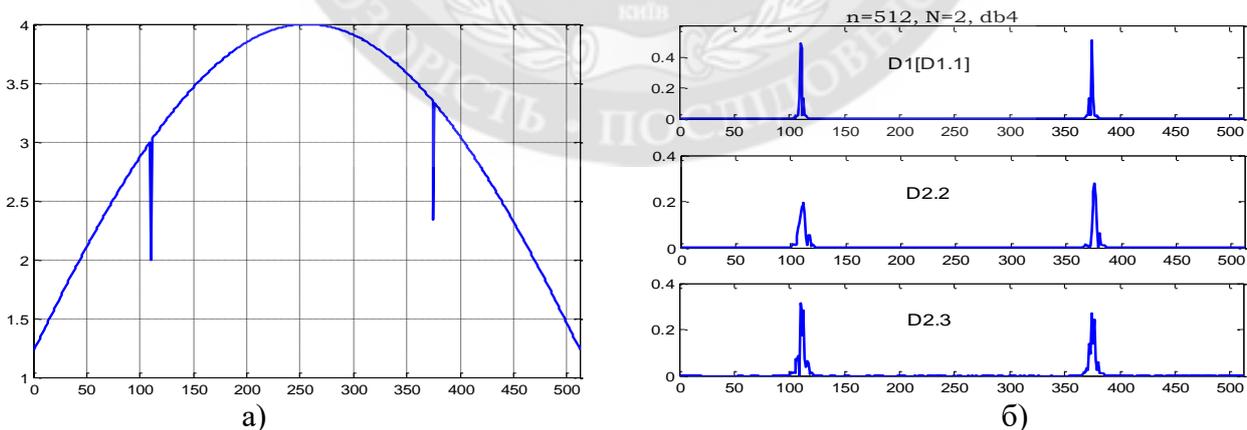


Рис. 5

Количественный анализ выборочных значений ДК подтверждает сделанные ранее выводы о механизме их формирования после очередного расщепления в предыдущем узле "дерева", который позволяет сформулировать выводы о геометрическом смысле ДК правой ветви ПБВП. Как определено в известных источниках по теории вейвлетов [7, 8], при стандартном алгоритме Малла ДК уровня j пропорциональны разностям смежных скользящих средних длины 2^{N-j-1} (N – максимальный уровень декомпозиции). При пакетном

алгоритме для ДК правой ветви "дерева" можно интерпретировать следующим образом: ДК левого узла пропорционален (с точностью нормирующего множителя) сглаженной версии флюктуаций исходных смежных значений, а ДК правого узла – "флюктуации флюктуаций", поскольку это значение элемента формируется пропорционально скользящей разности флюктуации.

Программный фрагмент расчёта соответствует приведенному выше после замены первой строки (формирование сигнала).

Другой подход к анализу механизма ПБВП основан на рассмотрении, так называемой решётки ВК, которая соответствует графическому представлению числа ВК по уровням декомпозиции на плоскости "время – масштаб(частота)". Для типового БВП такой график приведен в ряде источников по вейвлетам, в то время как, автору не известен ни один источник, в котором бы приводилась информация по решётке ВК древовидной структуры вейвлет-пакета. Задача построения решётки ПБВП решается на примере анализа результатов декомпозиции сложного тестового сигнала по алгоритму "полного дерева" и оптимальному с точки зрения критерия энтропийной функции стоимости (до уровня 4 ,вейвлет 'db8', число отсчётов сигнала 32).

Графическое представление "дерева" декомпозиции для типового алгоритма Малла и 2-х указанных выше показано на рис. 6а, рис. 6б, рис. 6в.

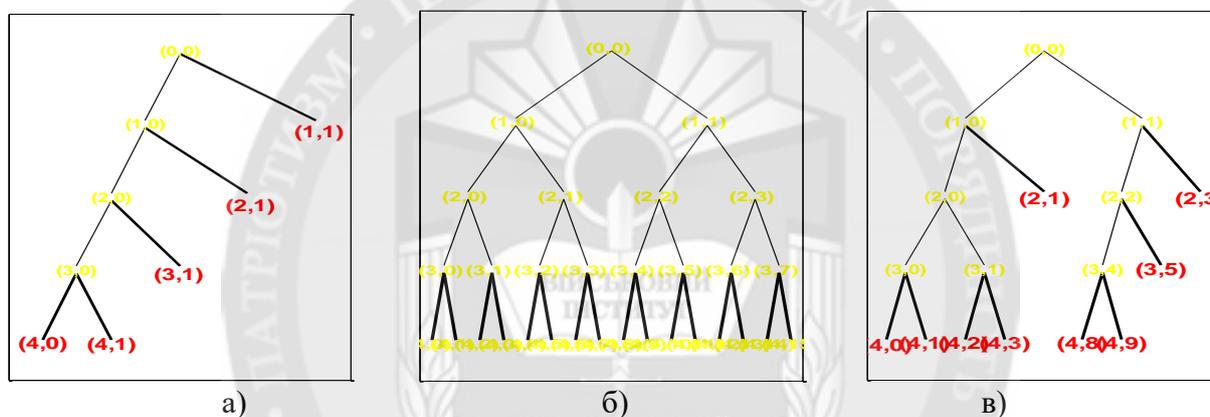


Рис. 6. Графическое представление "дерева" декомпозиции

Терминальные (выходные) узлы выделены цветом. Полное "дерево" ПБВП обладает избыточностью, поэтому используется его оптимизация.

Целью анализа является определение размерности вектора коэффициентов (всех – ВК) на каждом уровне в результирующей матрице. Результаты представлены графиками "решётки" ВК на плоскости поля анализа, приведенными на рис. 7а, рис. 7б, рис. 7в.

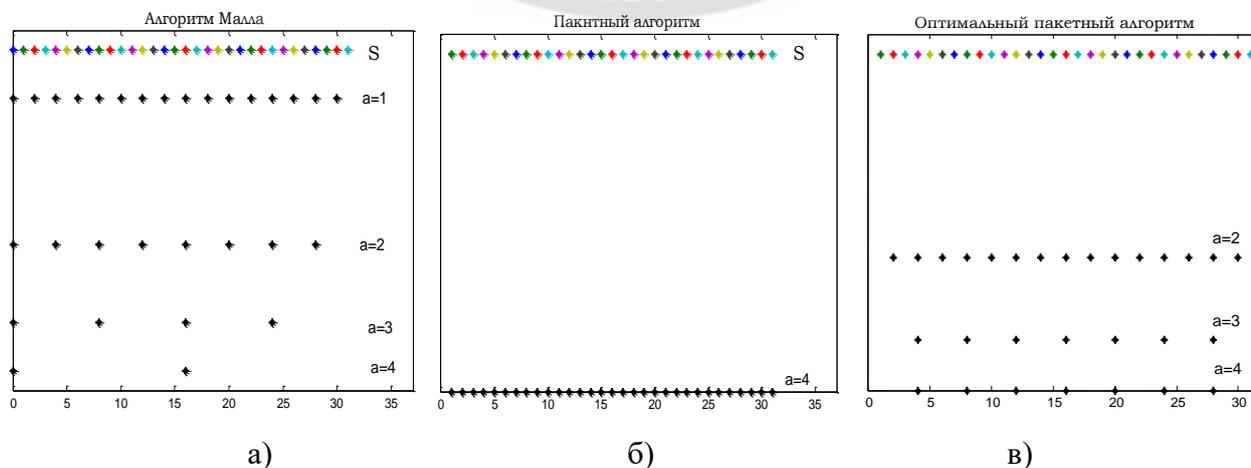


Рис. 7. Графики "решётки" ВК на плоскости поля анализа

В классическом варианте (рис. 7а) число коэффициентов на каждом последующем уровне уменьшается в 2 раза, на последнем сохраняется 2 (один из них выходной аппроксимирующий), общее число ВК соответствует числу отсчетов сигнала (в примере 32).

Для вейвлет-пакета с полным "деревом" терминальными являются только узлы на последнем уровне (рис. 7б), в которых ВК имеют размерность 2, поэтому общая размерность вектора ВК также равна 32 (рис. 7б). Для оптимального алгоритма (рис. 7в) число и положение терминальных узлов зависит от алгоритма оптимизации и может быть различным. При этом суммарное число ВК с учётом размерности на соответствующих уровнях) равно числу отсчетов сигнала (8+8+4+12).

Выводы. Пакетные алгоритмы ВА теоретически считаются продуктом более высокого класса по сравнению с типовым алгоритмом БВП по методу Малла, однако практика их применения к обработке большинства часто используемых в радиотехнических системах сигналов в явном виде не обнаруживает их преимуществ перед алгоритмом Малла. Как оказывается из примеров, во многих случаях после применения энтропийных критериев оптимальности структура "дерева" алгоритма либо приводится к типовому, либо близка к ней (сохраняются некоторые узлы разветвления, как правило на уровне [1.1]).

Показано, что результат реконструкции любых двух последующих расщеплений в точности соответствует реконструкции исходного корневого узла и в целом сигнал реконструкции по всем конечным (терминальным) узлам правого (ВЧ) "дерева" соответствует сигналу, реконструированному по первому исходному узлу детализирующих коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Malla, S. A wavelet tour of signal processing / S. Malla. - San Diego: Academic press, 2005. – 577 с.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам – Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.
3. Воробьёв В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб.:Изд-во ВУС, 1999. – 202 с.
4. Смоленцев Н.К. Вейвлет-анализ в MATLAB – М.: ДМК Пресс, 2010. – 448 с.
5. Дьяконов В.П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров – М.: ДМК Пресс, 2011. – 976 с.
6. Дьяконов В.П., Круглов В.В. Математические пакеты расширений MATLAB. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001. - 488 с.
7. Чуи К. Введение в вейвлеты – М.: Мир, 2001. – 412 с.
8. Бурнаев Е.В. Применение вейвлет-преобразования для анализа сигналов – М.:МФТИ, 2007. – 138 с.

REFERENCES:

1. Malla, S. A wavelet tour of signal processing / S. Malla. - San Diego: Academic press, 2005. – 577 с.
2. Dobeshi I. Desjat' lekcij po vjeevletam – Izhevsk NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika", 2001. – 464 s.
3. Vorob'jov V.I., Gribunin V.G. Teorija i praktika vejevlet-preobrazovanija. – SPb.:Izd-vo VUS, 1999. – 202 s.
4. Smolencev N.K. Vejevlet-analiz v MATLAB – M.: DMK Press, 2010. – 448 s.
5. D'jakonov V.P. MATLAB i SIMULINK dlja radioinzhenerov – M.: DMK Press, 2011. – 976 s.
6. D'jakonov V.P., Kruglov V.V. Matematicheskie pakety rasshirenij MATLAB. Special'nyj spravocchnik. – SPb.: Piter, 2001. - 488 s.
7. Chui K. Vvedenie v veevlety – M.: Mir, 2001. – 412 s.
8. Burnaev E.V. Primenenie vejevlet-preobrazovanija dlja analiza signalov – M.:MFTI, 2007. – 138 s.

Рецензент: д.т.н., проф. Барабаш О.В., професор кафедри інформаційних технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

к.т.н. Лоза В.М.

АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ПАКЕТНИХ АЛГОРИТМІВ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ

У статті наводиться авторська думка до обґрунтування механізму перетворення з використанням пакетних алгоритмів вейвлет-аналізу. Аналіз механізму пакетного швидкого вейвлет-перетворення проводиться по характеристикам "дерева" і заснований на трьох прикладах розрахунку деталізуючих коефіцієнтів: 1 – для контрольного сигналу, 2 – для тестового з наявністю стрибків і 3 – спеціально сформованого гаусова сигналу з провалами. Показано, що результат реконструкції будь-яких двох наступних розщеплень в точності відповідає реконструкції вихідного кореневого вузла.

Ключові слова: вейвлет-аналіз, пакетне швидке вейвлет-перетворення.

Ph.D. Loza V.N.

MECHANISM ANALYSIS OF TRANSFORMATION OF SIGNALS USING PACKET ALGORITHM WAVELET ANALYSIS

The article presents the author's opinion to the justification of the conversion mechanism using wavelet packet analysis algorithms. An analysis of a batch of fast wavelet transform is carried out on the characteristics of the "tree" and is based on three examples detailing the calculation of the coefficients: 1 - for the pilot signal, 2 - to the test signal with the presence of jumps and 3 - exploited a Gaussian signal failures. It is shown that the result of the reconstruction of any two subsequent splitting corresponds exactly to the original root reconstruction assembly.

Keywords: wavelet analysis, batch fast wavelet transform.