Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т. 11, № 3, 315-329

УДК 517.5

В. В. Шкапа (Ін–т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ КЛАСІВ $L^{\psi}_{\beta,1}$

We obtain the exact order estimates of the best orthogonal trigonometric approximations of periodic functions that are analogues of the Bernoulli kernels and functions of the classes $L^{\psi}_{\beta,1}$ in the space L_q, $1 < q < \infty$.

Отримано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень періодичних функцій, які є аналогами ядер Бернуллі та функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q, $1 < q < \infty$.

У роботі встановлено порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень 2π-періодичних функцій D^{β}_{ψ}, які є аналогами ядер Бернуллі. З використанням цих результатів одержано порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,1}$ у просторі L_q при $1 < q < \infty$.

Наведемо спочатку необхідні позначення та означення, які будуть нами використовуватися.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені q, $1 \leq q < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$) на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма у цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)| \,, & q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_q$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Скрізь нижче будемо вважати, що для $f \in L_q$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Нехай, далі, $\psi \neq 0$ довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}}{\psi(|k|)} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [1] (див. також [2, с. 25], [3, с. 132]), називатимемо (ψ,β)-похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \ i \ f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \big\{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\big\}, 1 \leq p \leq \infty.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$ (див., наприклад, [2, с. 25]).

Нехай для фіксованої функції натурального аргументу ψ і числа $\beta \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi(|k|)e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}e^{ikx}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної на $[-\pi,\pi]$ функції D^{β}_{ψ}. Тоді кожну функцію $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)D^{\beta}_{\psi}(t)dt,$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1,\ 1 \leq p \leq \infty$ (див., наприклад, [3, с. 135]).

Зазначимо, що функції D^{β}_{ψ} називають аналогами ядер Бернуллі.

Розглянемо для $f \in L_q$ апроксимативну характеристику

$$e_m^{\perp}(f)_q = \inf_{\Theta_m} \left\| f(\cdot) - S_{\Theta_m}(f, \cdot) \right\|_q , \tag{1}$$

де $S_{\Theta_m}(f,x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \hat{f}(n_k) e^{in_k x}$, Θ_m — набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$. Величину (1) називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q$. Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m^{\perp}(F)_q = \sup_{f \in F} e_m^{\perp}(f)_q.$$

Зазначимо, що величина (1) була введена Е. С. Белінським (див., наприклад, [4]), і останнім часом дослідження її на тих або інших функціональних класах отримало потужний розвиток у роботах багатьох авторів [5–13]. У цих роботах можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

Позначимо через B множину функцій ψ, що задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le C, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що до множини B належать, наприклад, функції $\frac{1}{t^r}$, $r > 0$; $\frac{\ln^{\gamma}(t+1)}{t^r}$, $\gamma > 0$, $r > 0$ та ін.

Надалі для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \le B \le C_2 A$. Якщо тільки $B \le C_2 A$ ($B \ge C_1 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Всі сталі C_i, $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій здійснюється наближення.

1. Допоміжні твердження. У даному пункті сформулюємо декілька відомих тверджень, які нам знадобляться при доведенні отриманих результатів.

Нехай $f \in L_q, \ \ 1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{N}$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{k: \ 2^{s-1} \leq |k| < 2^s\right\}$$

і покладемо

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Тоді функцію f можна подати у вигляді

$$f(x) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \delta_s(f,x).$$

Теорема А (Літтлвуда–Пелі, див., наприклад, [14, с. 54]). *Нехай задано $1 < q < \infty$. Тоді існують додатні сталі $C_3(q)$, $C_4(q)$ такі, що для кожної функції $f \in L_q$ має місце оцінка*

$$C_3(q)\|f\|_q \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f,\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leq C_4(q)\|f\|_q.$$

Теорема Б (Марцинкевича) [15, т. 2, с. 346]. *Нехай задано послідовність $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, що задовольняє умови:*

1) $|\lambda_n| \leq M, \ n \in \mathbb{Z}$;

2) $\sum\limits_{\mu=\pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^{\nu}-1} |\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu| \leq M, \ \nu \in \mathbb{N}$.

Тоді, якщо

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_q, \ 1 < q < \infty,$$

то

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_q$$

і існує стала $C_5(q)$ така, що

$$\|F\|_q \leq C_5(q) M \|f\|_q.$$

Твердження А (див., наприклад, [16, с. 392]). *Якщо* $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, *то*

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)dx,$$

де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Твердження Б [17, с. 119]. *Нехай* $\psi(t)$ — *довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов:*

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(t-1)}\right) \ge 0,\ \ t = \overline{1, m-1}, \tag{2}$$

або

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(t-1)}\right) \le 0,\ \ t = \overline{1, m-1}, \tag{3}$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(t)}\right) = \frac{1}{\psi(t)} - \frac{2}{\psi(t+1)} + \frac{1}{\psi(t+2)}$$

і, крім того,

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{k=1}^{m-1} \psi(m)(t\psi(t))^{-1} = O(1), \tag{4}$$

де $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена по* m. *Тоді для довільного тригонометричного полінома* t_m *порядку* m *виконується нерівність*

$$\|(t_m)^{\psi}_{\beta}\|_1 \le O(1)|\psi(m)|^{-1}\|t_m\|_1,$$

в якій величина $O(1)$ — *рівномірно обмежена по* m *і* t_m.

2. Основні результати. Має місце твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $\psi \in B$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}, t \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$e^{\perp}_m(D^{\psi}_{\beta})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Доведемо оцінку зверху. Нехай l і m такі, що $2^l < m \le 2^{l+1}$. Спочатку розглянемо випадок $1 < q \le 2$. Маємо

$$e_m^{\perp}(D_\beta^\psi)_q \ll \left\| D_\beta^\psi - \sum_{s<l} \delta_s(D_\beta^\psi) \right\|_q = \left\| \sum_{s\ge l} \delta_s(D_\beta^\psi) \right\|_q = I_1.$$

Продовжимо оцінку величини I_1 з використанням теореми А, нерівності Мінковського і нерівності Ієнсена. Одержимо

$$I_1 \ll \left\| \left(\sum_{s\ge l} |\delta_s(D_\beta^\psi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = \left(\left\| \sum_{s\ge l} |\delta_s(D_\beta^\psi)|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{s\ge l} \left\| |\delta_s(D_\beta^\psi)|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{s\ge l} \|\delta_s(D_\beta^\psi)\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{s\ge l} \|\delta_s(D_\beta^\psi)\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Оцінимо величину

$$\|\delta_s(D_\beta^\psi)\|_q = \left\| \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} \right\|_q.$$

Спочатку покажемо, що виконується співвідношення

$$\left\| \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} \right\|_q \ll \psi(2^s) \left\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx} \right\|_q, \ 1 < q < \infty.$$

З цією метою для $s \ge l$ розглянемо послідовність $\{\lambda_k\}$, яка задається таким чином

$$\{\lambda_k\} = \left\{ \frac{\psi(|k|)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} \right\}, \ 2^{s-1} \le |k| < 2^s.$$

Переконаємося, що послідовність $\{\lambda_k\}$ задовольняє умови теореми Б.

Зауважимо, що для цього достатньо перевірити виконання цих умов для додатних k таких, що $2^{s-1} \leq k < 2^s$.

Оскільки $\psi \in B$ і $2^{s-1} \leq k < 2^s$, то:

$$1)\ |\lambda_k| = \left| \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right| = \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} \leq M,$$

$$2)\ \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| =$$

$$= \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \left| \frac{\psi(k)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} - \frac{\psi(k+1)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} \big(\psi(k) - \psi(k+1)\big) \leq \frac{1}{\psi(2^s)} \big(\psi(2^{s-1}) - \psi(2^s)\big) \leq$$

$$\leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq M.$$

Тепер подіємо мультиплікатором Λ_s, який задається послідовністю $\{\lambda_k\}$, на поліном $\sum\limits_{k \in \rho(s)} e^{ikx}$. Маємо

$$\Lambda_s \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} = \sum_{k \in \rho(s)} \frac{\psi(|k|)}{\psi(2^s)} e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx}.$$

Таким чином, можемо записати

$$\left\| \Lambda_s \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q = \frac{1}{\psi(2^s)} \left\| \sum_{k \in \rho(s)} \psi(|k|) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{sign} k} e^{ikx} \right\|_q.$$

З іншого боку, за теоремою Б, має місце оцінка

$$\left\| \Lambda_s \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q \leq C_6(q) M \left\| \sum_{k \in \rho(s)} e^{ikx} \right\|_q.$$

Отже,

$$\Big\| \sum_{k\in\rho(s)} \psi(|k|)e^{-i\frac{\pi}{2}\beta \mathrm{sign} k}e^{ikx}\Big\|_q \ll \psi(2^s)\Big\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx}\Big\|_q.$$

Далі, використовуючи останню оцінку, а також відоме співвідношення (див., наприклад, [18, с. 25])

$$\Big\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{ikx}\Big\|_q \asymp 2^{s\left(1-\frac{1}{q}\right)}, \quad 1<q<\infty, \tag{6}$$

одержимо

$$\|\delta_s(D_\beta^\psi)\|_q \ll \psi(2^s)2^{s\left(1-\frac{1}{q}\right)}. \tag{7}$$

Об'єднуючи співвідношення (5) та (7), матимемо

$$I_1 = \Big\| \sum_{s\geq l}\delta_s(D_\beta^\psi)\Big\|_q \ll \left(\sum_{s\geq l}\psi^q(2^s)2^{qs\left(1-\frac{1}{q}\right)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Насамкінець, врахувавши, що $\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростає, можемо записати

$$e_m^\perp(D_\beta^\psi)_q \ll I_1 \ll \psi(2^l)2^{l\left(1-\frac{1}{q}+\varepsilon\right)}\left(\sum_{s\geq l}2^{-s\varepsilon q}\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \psi(2^l)2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)} \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Тепер розглянемо випадок $2<q<\infty$. Застосовуючи теорему A і нерівність Мінковського, маємо

$$\|D_\beta^\psi - \sum_{s<l}\delta_s(D_\beta^\psi)\|_q = \Big\|\sum_{s\geq l}\delta_s(D_\beta^\psi)\Big\|_q \ll$$

$$\ll \left\|\left(\sum_{s\geq l}|\delta_s(D_\beta^\psi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q = \left(\Big\|\sum_{s\geq l}|\delta_s(D_\beta^\psi)|^2\Big\|_{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s\geq l}\left\||\delta_s(D^{\psi}_{\beta})|^2\right\|_{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{s\geq l}\|\delta_s(D^{\psi}_{\beta})\|_q^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі, використавши (7), повторимо міркування, які проводились для випадку $1 < q \leq 2$, і отримаємо шукану оцінку

$$e^{\perp}_m(D^{\psi}_{\beta})_q \ll \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}},\ 2 < q < \infty.$$

Таким чином, оцінку зверху в теоремі встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу.

Нехай Θ_m — довільний набір із m цілих чисел $n_1, ..., n_m$. Скориставшись рівністю з твердження A, адаптованою до комплексно-значних функцій, можемо записати

$$\|D^{\psi}_{\beta} - S_{\Theta_m}(D^{\psi}_{\beta})\|_q =$$

$$= \sup_{\|g\|_{q'}\leq 1}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(D^{\psi}_{\beta}(x) - S_{\Theta_m}(D^{\psi}_{\beta}, x)\right)\overline{g}(x)dx\right|. \qquad (8)$$

За заданим m виберемо l із умови $2m < 2^l \leq 4m$ і покладемо

$$g(x) = C_7 2^{-\frac{l}{q}}\sum_{k\in\rho^+(l)} e^{ikx},$$

де $\rho^+(l) = \left\{k : \ 2^{l-1} \leq k < 2^l\right\}$. Легко бачити, що $\|g\|_{q'} \leq 1$, $q' \in (1, \infty)$, при певному виборі сталої $C_7 > 0$.

Дійсно, використовуючи співвідношення (6), будемо мати

$$\|g\|_{q'} = C_7 2^{-\frac{l}{q}}\left\|\sum_{k\in\rho^+(l)} e^{ikx}\right\|_{q'} \asymp 2^{-\frac{l}{q}}2^{l\left(1-\frac{1}{q'}\right)} = 1,$$

тобто функція g при деякому виборі сталої C_7 задовольняє нерівність $\|g\|_{q'} \leq 1$.

Тепер підставивши функцію g в (8), одержимо

$$\|D^{\psi}_{\beta} - S_{\Theta_m}(D^{\psi}_{\beta})\|_q \geq \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(D^{\psi}_{\beta}(x) - S_{\Theta_m}(D^{\psi}_{\beta}, x)\right)\overline{g}(x)dx\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_\beta^\psi(x)\overline{g}(x)dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_{\Theta_m}(D_\beta^\psi, x)\overline{g}(x)dx \right| =$$

$$= \left| \left(\sum_{k\in\rho^+(l)} C_7\psi(k)2^{-\frac{l}{q}}e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right) - \left(\sum_{k\in\Theta_m\cap\rho^+(l)} C_7\psi(k)2^{-\frac{l}{q}}e^{-i\frac{\pi}{2}\beta} \right) \right| \gg$$

$$\gg 2^{-\frac{l}{q}} \sum_{k\in\rho^+(l)\setminus\Theta_m} \psi(k) \gg 2^{-\frac{l}{q}}\psi(2^l)2^l =$$

$$= 2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)}\psi(2^l) \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

Порівняємо результат теореми 1 з оцінкою найкращого m-членного тригонометричного наближення $e_m(D_\beta^\psi)_q,\ 1 < q < \infty$, яку отримано в [19]. Нагадаємо, що

$$e_m(f)_q = \inf_{\Theta_m} \inf_{T(\Theta_m,\cdot)} \left\| f(\cdot) - T(\Theta_m,\cdot) \right\|_q,$$

де $T(\Theta_m, x) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k e^{in_k x},\ a_k$ — довільні коефіцієнти.

З означення величин $e_m(f)_q$ і $e_m^\perp(f)_q$ легко бачити, що має місце співвідношення

$$e_m(f)_q \le e_m^\perp(f)_q.$$

Співставивши результати теореми 1 і теорем 1.6.2, 1.6.3 роботи [19], отримуємо, що величини $e_m(D_\beta^\psi)_q$ та $e_m^\perp(D_\beta^\psi)_q$ у випадку $1 < q \le 2$ рівні за порядком. Якщо ж $2 < q < \infty$, то має місце співвідношення

$$e_m^\perp(D_\beta^\psi)_q \asymp m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} e_m(D_\beta^\psi)_q.$$

***Зауваження* 1.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 1 - \frac{1}{q}$ порядок величини $e_m^\perp(D_\beta^\psi)_q$, $1 < q < \infty$, встановлено у роботі [10].

Далі доведемо твердження, в якому одержана оцінка величини $e_m^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_q$ при $1 < q < \infty$.

Теорема 2. *Нехай* $1 < q < \infty,\ \psi \in B,\ \beta \in \mathbb{R}$, *виконується одна з умов* (2) *або* (3) *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність*

$\psi(t)t^{1-\frac{1}{q}+\varepsilon}, t\in\mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе наступне співвідношення*

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Доведення. Оцінку зверху проведемо у більш загальному випадку. Для цього нам знадобиться допоміжне твердження

Лема 1. *Нехай* $1\le q<\infty$, $\psi\in B$, $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді має місце наступне співвідношення*

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \ll e_m^{\perp}(D_{\beta}^{\psi})_q.$$

Доведення. Згідно з означенням класу $L_{\beta,1}^{\psi}$ можемо записати

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q = \sup_{f\in L_{\beta,1}^{\psi}} \inf_{S_{\Theta_m}(f)} \|f-S_{\Theta_m}(f)\|_q =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_1\le 1} \inf_{S_{\Theta_m}(\varphi * D_{\beta}^{\psi})} \|\varphi * D_{\beta}^{\psi} - S_{\Theta_m}(\varphi * D_{\beta}^{\psi})\|_q =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_1\le 1} \inf_{S_{\Theta_m}(D_{\beta}^{\psi})} \|\varphi * (D_{\beta}^{\psi} - S_{\Theta_m}(D_{\beta}^{\psi}))\|_q.$$

Враховуючи властивість згортки (див., наприклад, [20, c. 71]), матимемо

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \le \sup_{\|\varphi\|_1\le 1} \inf_{S_{\Theta_m}(D_{\beta}^{\psi})} \|\varphi\|_1 \times \|D_{\beta}^{\psi} - S_{\Theta_m}(D_{\beta}^{\psi})\|_q \le$$

$$\le \inf_{S_{\Theta_m}(D_{\beta}^{\psi})} \|D_{\beta}^{\psi} - S_{\Theta_m}(D_{\beta}^{\psi})\|_q = e_m^{\perp}(D_{\beta}^{\psi})_q.$$

Лему доведено.

Отже, оцінку зверху в теоремі 2 отримуємо, використавши лему 1 і встановлену в теоремі 1 оцінку величини $e_m^{\perp}(D_{\beta}^{\psi})_q$:

$$e_m^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_q \le e_m^{\perp}(D_{\beta}^{\psi})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Перейдемо до встановлення оцінки знизу.

За заданим m виберемо l із умови $2m < 2^l \leq 4m$ і розглянемо функцію

$$f_l(x) = C_8\psi(2^l)\big(V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)\big),\ C_8 > 0,$$

де $V_m(x)$ — ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m}\cos kx + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(\frac{2m-k}{m}\right)\cos kx.$$

Покажемо, що $f_l \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої $C_8 > 0$.

Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(f_l)^{\psi}_{\beta}\|_1 \leq C_9,\ C_9 > 0$. Скористаємося твердженням Б.

Зауважимо, що умова (4) виконується, оскільки існує число $\alpha > \frac{1}{q}$ таке, що послідовність $\varphi(m) = m^{\alpha}\psi(m)$ не зростає, тоді

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi(m)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\varphi(m)k^{\alpha}}{m^{\alpha}\varphi(k)k} \leq \frac{1}{m^{\alpha}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{k^{\alpha}}{k} \leq 1.$$

Таким чином, одержимо

$$\|(f_l)^{\psi}_{\beta}\|_1 = C_8\psi(2^l)\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_1 \ll \frac{\psi(2^l)}{\psi(2^{l+2})}\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_1,$$

причому (див., наприклад, [21, с. 66])

$$\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_q \asymp 2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)},\ 1 \leq q \leq \infty. \tag{9}$$

Отже, $\|(f_l)^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll 1$ і $f_l \in L^{\psi}_{\beta,1}$ при певному виборі сталої C_8.

Далі розглянемо поліном

$$g(x) = C_{10}m^{-\frac{1}{q}}\big(V_{2^{l+1}}(x) - V_{2^l}(x)\big),\ C_{10} > 0.$$

Із (9) випливає, що поліном g при певному виборі сталої C_{10} задовольняє нерівність $\|g\|_{q'} \leq 1$. Скориставшись твердженням А, одержимо

$$\|f_l - S_{\Theta_m}(f_l)\|_q \geq \left|\int_{-\pi}^{\pi}\big(f_l(x) - S_{\Theta_m}(f_l,x)\big)g(x)dx\right| =$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_l(x)g(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_{\Theta_m}(f_l,x)g(x)dx \right| \gg$$

$$\gg m^{-\frac{1}{q}}\psi(2^l)\left(\|V_{2^{l+1}} - V_{2^l}\|_2^2 - m\right) \gg$$

$$\gg m^{-\frac{1}{q}}\psi(2^l)\left(2^{l+1} - m\right) \geq m^{-\frac{1}{q}}\psi(2^l)2^l \asymp \psi(2^l)2^{l\left(1-\frac{1}{q}\right)}.$$

Враховуючи вибір l, із останньої оцінки маємо

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_q \gg \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему 2 доведено.

Порівняємо результат теореми 2 з відповідним результатом, отриманим при дослідженні величин $E_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ і $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ у роботі [22]. Нагадаємо, що

$$E_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \inf_{t_{m-1} \in T_{2m-1}} \left\|f(\cdot) - t_m(\cdot)\right\|_q,$$

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \left\|f(\cdot) - S_{m-1}(f,\cdot)\right\|_q,$$

де T_{2m-1} — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{m-1} порядку не вищого за $m-1$. Отримуємо, що

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp E_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-\frac{1}{q}}.$$

Зауважимо, що для оцінки зверху у теоремі 2, можна було скористатись результатом отриманим у роботі [22] для $\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q$ та співвідношенням

$$e_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_q \leq \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q.$$

***Зауваження* 2.** У випадку $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 1 - \frac{1}{q}$, даний результат було одержано у роботі [10].

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. — Киев, 1983. — 57 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).

2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 286 с.

3. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України, 2002. — **40**. — Ч.І. — 427 с.

4. *Белинский Э. С.* Приближение "плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Яросл. ун-т. — 1988. — С. 16 – 33.

5. *Романюк А. С.* О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами с заданным числом гармоник // Оптимизация методов приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 1992. — С. 112 – 118.

6. *Романюк А. С.* Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 1. — С. 80 – 89.

7. *Федоренко А. С.* Про найкращі $m-$членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 12. — С. 1719 – 1721.

8. *Консевич Н. М.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 1. — С. 23 – 29.

9. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 2002. — **71**, № 1. — С. 109 – 121.

10. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — **70**, № 2. — С. 69 – 98.

11. *Стасюк С. А.* Найкращі $M-$членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 5. — С. 647 – 656.

12. *Войтенко С. П.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1473 – 1484.

13. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **93.** — 352 с.

14. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. —М.: Наука, 1977. — 456 с.

15. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. // М.: Мир. — 1965. — Т. 1. — 615 с.; — Т. 2. — 537 с.

16. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

17. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України, 2002. — **40**. — Ч. 2. — 468 с.

18. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc, 1993. — 419 p.

19. *Федоренко О. С.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій тригонометричними поліномами. Дис. канд. фіз.-мат.н. — 2000. — 114 с.

20. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

21. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1 – 112.

22. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1186 – 1197.