Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 280–307

УДК 532.595

Нелинейные модальные модели третьего порядка малости, описывающие колебание жидкости в усеченных конических резервуарах *

А.В. Солодун

Институт математики НАН Украины, Киев;
solodun@imath.kiev.ua

For the problem on resonant sloshing in truncated conical reservoirs, an infinite-dimensional modal system is derived. The derivation scheme is based on the non-conformal mapping technique and Moiseev–Narimanov asymptotics.

Для задачі про резонансні коливання рідини у зрізаних конічних ємностях виведено нескінченовимірні нелінійні модальні системи. Вивід базується на методі неконформних перетворень області та асимптотиці Моісеєва–Наріманова.

1. Введение

В последние годы научные исследования в области совместной динамики твердых тел с жидкостью пополнились новыми задачами, связанными с проектированием водонапорных башен, а также с перевозками сжиженного природного газа [18, 32, 33]. При резонансном возмущении баков, частично заполненных жидкостью, движения свободной поверхности становятся существенно нелинейными. При этом силовой гидродинамический отклик значительно превышает амплитуду внешних воздействий, что может порождать неустойчивость

* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015 и гранта 03-01-12 совместных проектов НАН Украины и СО РАН.

совместных движений бака и жидкости. Обширная библиография относительно задачи о нелинейных колебаниях жидкости приведена в [4, 6, 7, 12, 14, 22, 27] и др.

Большинство работ, посвященных нелинейным колебаниям жидкости, рассматривает случай баков с вертикальными стенками (примерами являются цилиндр кругового [2, 4, 6, 25, 30] и прямоугольного [19–21] сечений). Аналитические исследования таких колебаний, как правило, связываются с применением мультимодального метода. Идея, особенности применения, преимущества, недостатки и ограничения метода подробно обсуждаются в книгах [4, 6, 22].

В настоящей работе нелинейный мультимодальный метод обобщается на случай усеченного конического бака, стенки которого, очевидно, не являются вертикальными. Технически, методологически и идейно работа продолжает исследования [1, 4, 8, 10, 11, 15–17, 23, 24, 26, 28], где используется метод неконформных отображений Луковского [2, 28] и асимптотика Нариманова–Моисеева при условии, что собственные формы колебания жидкости найдены в приближенно–аналитическим виде, и эти формы точно удовлетворяют уравнение Лапласа и условие неперетекания на стенках сосуда.

Упомянутые выше приближенные собственные формы колебания жидкости построены в настоящее время для конических [5, 9, 26, 28] и сферических баков [15, 23]. С использованием этих форм было выведено ряд малоразмерных нелинейных модальных систем для конических баков [8, 10, 26, 28]. Эти системы базируются на асимптотике Моисеева–Нариманова, однако не являются "полными", поскольку не включают все необходимые обобщенные координаты второго и третьего порядка малости. Полные в смысле асимптотики Моисеева–Нариманова модальные системы в настоящее время построены для вертикального цилиндрического [30] и сферического [24] баков. Данная статья обобщает последние результаты на случай V-образных усеченных конических баков.

2. Постановка задачи

Рассмотрим абсолютно твердый бак в форме обратного вертикального усеченного кругового конуса с углом полураствора θ_0 и невозмущенной свободной поверхностью Σ_0 единичного радиуса r_0 (рис. 1 а). Бак частично заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ и совершает поступательные движения со скоростью $\vec{v}_0(t) =$

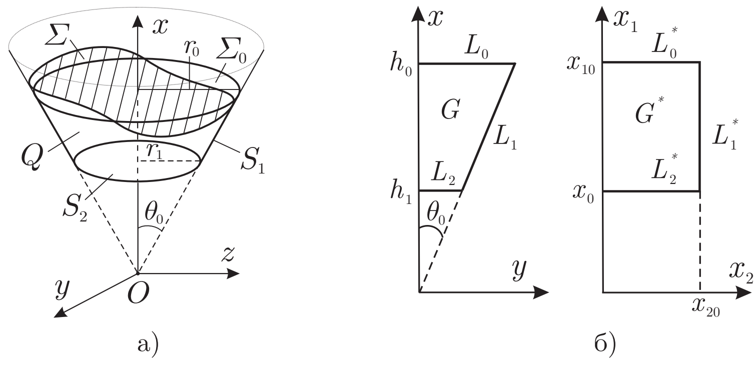

Рис 1. Рассматриваемая модель: а) эскиз; б) меридиональное сечение.

$\{\dot{\eta}_1(t), \dot{\eta}_2(t), \dot{\eta}_3(t)\}$ в проекциях на оси подвижной системы координат $Oxyz$. Начало координат размещено в условной вершине конуса O. Ось Ox направлена вдоль оси конуса в направлении, противоположном вектору ускорения сил земного тяготения $\vec{g}$ в статическом (неподвижном) положении бака.

В рамках теории потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости [4] потенциал абсолютных скоростей $\Phi(x, y, z, t)$ и возмущенная свободная поверхность, заданная неявно в виде $\zeta(x, y, z, t) = 0$, являются решением следующей краевой задачи со свободной поверхностью

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \vec{r} \in Q(t), \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu}, \quad \vec{r} \in S(t), \tag{1b}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu} - \frac{\zeta_t}{|\nabla\zeta|^2}, \quad \vec{r} \in \Sigma(t), \tag{1c}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 - \nabla\Phi \cdot \vec{v}_0 + U = 0, \quad \vec{r} \in \Sigma(t), \tag{1d}$$

$$\int_{Q(t)} dQ = \mathrm{const}, \tag{1e}$$

где $\vec{\nu}$ — орт внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем жидкости $Q(t)$, $S_1(t)$ и S_2 $(S(t) = S_1(t) + S_2)$ — смоченная боковая стенка и дно, соответственно, $\Sigma(t)$ — свободная поверхность жидкости, $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор, U – потенциал сил земного тяготения, заданный в неинерциальной системе координат $Oxyz$. Интегральное соотношение (1e) выражает условие сохранения объема жидкости и является необходимым условием разрешимости задачи Неймана (1a)-(1c).

Задача Коши для эволюционной краевой задачи со свободной границей (1a)–(1d) предполагает известными начальный профиль свободной поверхности $\Sigma(t_0)$ и распределения скоростей на $\Sigma(t)$ в начальный момент времени $t = t_0$, т.е. $\zeta(x, y, z, t_0) = \zeta_0(x, y, z)$, $\left.\dfrac{\partial\,\Phi}{\partial\,\nu}\right|_{\Sigma(t_0)} = \Phi_0(x, y, z)$, где $\zeta_0(x, y, z)$ и $\Phi_0(x, y, z)$ являются известными функциями.

Нелинейная краевая задача (1) допускает вариационную формулировку, связанную с вариационным принципом Бейтмана-Люка [7, 11, 14, 29], в котором, для случая поступательных движений бака, в качестве функции Лагранжа выступает выражение

$$L = -\rho \int_{Q(t)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + gx \right) dQ. \tag{2}$$

Луковский [3] и Майлс [31] показали эквивалентность дифференциальной и вариационной формулировок, а также впервые вывели наиболее общие нелинейные модальные системы относительно обобщенных скоростей и координат, которые связываются с возмущением собственных форм колебаний жидкости. Эти формы определяются из краевой задачи на собственные значения

$$\Delta\phi_j = 0,\ \vec{r} \in Q_0,\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu} = 0,\ \vec{r} \in S_0,\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu} = \varkappa\,\phi_j,\ \vec{r} \in \Sigma_0,\ \int\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu} dS = 0 \tag{3}$$

$(j \geq 1)$, сформулированной в невозмущенном объеме жидкости Q_0.

Для случая поступательных движений бака потенциал скоростей представляется в виде

$$\Phi(x, y, z, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \sum_j R_j(t) \phi_j(x, y, z), \tag{4}$$

где $\phi_j(x, y, z)$, будучи найденными приближенно, обязаны точно удовлетворять уравнение Лапласа и условие Неймана на смоченных стенках бака, а $R_j(t)$ — обобщенные скорости.

Если свободная поверхность допускает нормальную форму $\zeta = x - f(y,z,t) = 0$ (что верно в случае баков с вертикальными стенками), f раскладывается в обобщенный ряд Фурье, $f(y,z,t) = \sum_i \beta_i(t) f_i(y,z)$, в котором

$$f_i(y,z) = (\sigma_i/g)\phi_i(x_{10}, y, z), \tag{5}$$

а зависимые от времени коэффициенты $\beta_i(t)$ играют роль обобщенных координат. В случае неявного задания свободной поверхности $\Sigma(t)$ для баков с невертикальными стенками обобщенные координаты необходимо задавать также неявно посредством уравнения $\zeta(x,y,z,t,\{\beta_N\}) = 0$.

Как для нормального, так и неявного задания свободной поверхности, следуя вариационной схеме [4,24], можно вывести общие нелинейные модальные уравнения относительно обобщенных координат $\beta_i(t)$ и скоростей $R_j(t)$

$$\sum_K \frac{\partial A_N}{\partial \beta_K}\dot{\beta}_K = \sum_K A_{NK} R_K = 0, \quad N, K, i = 1, 2, ..., \tag{6a}$$

$$\sum_N \dot{R}_N \frac{\partial A_N}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2}\sum_{NK} \frac{\partial A_{NK}}{\partial \beta_i} R_N R_K + (\dot{\vec{v}}_0 - \vec{g})\frac{\partial \vec{l}}{\partial \beta_i} = 0, \tag{6b}$$

где

$$A_N = \rho \int_{Q(t)} \phi_N dQ, \quad A_{NK} = \rho \int_{Q(t)} (\nabla\phi_N, \nabla\phi_K)\, dQ, \quad \vec{l} = \rho \int_{Q(t)} \vec{r} dQ \tag{7}$$

являются функциями обобщенных координат $\{\beta_N\}$.

3. Модальная система для конических баков

3.1. Явное модальное представление ζ и Φ

Для получения явного (нормального) модального представления свободной поверхности можно следовать работам [6,26,28] и ввести криволинейную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с помощью преобразования координат $x = x_1,\ y = x_1 x_2 \cos x_3,\ z = x_1 x_2 \sin x_3$. Рис. 1 (б) иллюстрирует как такое преобразование координат трансформирует меридиональное сечение G невозмущенного объема жидкости в меридиональное сечение G^*, являющееся прямоугольником со сторонами $h = x_{10} - x_0$ и $x_{20} = \tan\theta_0$ в плоскости Ox_1x_2. Усеченный конический объем невозмущенного объема жидкости трансформируется в системе (x_1, x_2, x_3) в параллелепипед $(x_0 \le x_1 \le x_{10},\ 0 \le x_2 \le x_{20},\ 0 \le x_3 \le 2\pi)$.

Необходимые приближенно–аналитические собственные формы колебаний жидкости для конических баков были построены в [5,9,29]:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{matrix} \psi_{Mi}(x_2, x_3)\cos(Mx_3), \\ \psi_{mi}(x_2, x_3)\sin(mx_3). \end{matrix} \tag{8}$$

За исключением осесимметричного случая при $M = 0$, они характеризуются двумя собственными формами для каждой собственной частоты σ_{Mi}. Индекс i перенумеровывает все собственные частоты и моды для каждого фиксированного "углового" волнового числа M и задает профили стоячих волн в радиальном направлении. Заглавная буква M в (8) подразумевает смену индекса от нуля до бесконечности $(M = 0, 1, 2, \ldots)$, а прописные i и m – от единицы до бесконечности $(i, m = 1, 2, \ldots)$.

В криволинейной системе координат свободную поверхность и потенциал скоростей можно задать в следующем виде

$$\begin{aligned} f^*(x_2, x_3, t) = x_{10} + \beta_0(t) + \sum_{Mi} p_{Mi}(t) f_{Mi}(x_2)\cos(Mx_3) \\ + \sum_{Mi} r_{mi}(t) f_{mi}(x_2)\sin(mx_3), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Phi^*(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \sum_{Mi} P_{Mi}(t)\psi_{Mi}(x_2, x_3)\cos(Mx_3) \\ + \sum_{mi} R_{mi}(t)\psi_{mi}(x_2, x_3)\sin(mx_3), \end{aligned} \tag{10}$$

где p_{Mi} и r_{mi} играют роль обобщенных координат.

Особенностью нецилиндрических баков является то, что представление свободной поверхности (9) содержит обобщенную координату $\beta_0(t)$, которая зависит от других обобщенных координат и выбирается из условия сохранения объема (1e). Это условие играет роль голономной вязи. Процедура явного определения $\beta_0(t)$ через остальные обобщенные координаты (разрешение голономной вязи) описана в Приложении А.

3.2. Кинематические и динамические уравнения

Учитывая представления (9) и (10), можно переписать модальные уравнения (6) в виде

$$\sum_{Mn}\frac{\partial A^p_{Ab}}{\partial p_{Mn}}\dot{p}_{Mn}+\sum_{mn}\frac{\partial A^p_{Ab}}{\partial r_{mn}}\dot{r}_{mn}=\sum_{Mn}A^{pp}_{Ab,Mn}P_{M,n}+\sum_{mn}A^{pr}_{Ab,mn}R_{mn}=0,$$
$$\sum_{Mn}\frac{\partial A^r_{ab}}{\partial p_{Mn}}\dot{p}_{Mn}+\sum_{mn}\frac{\partial A^r_{ab}}{\partial r_{mn}}\dot{r}_{mn}=\sum_{Mn}A^{pr}_{Mn,ab}P_{Mn}+\sum_{mn}A^{rr}_{Ab,mn}R_{mn}=0 \tag{11}$$

(кинематические соотношения) и

$$\sum_{Mn}\frac{\partial A^p_{Mn}}{\partial p_{Ab}}\dot{P}_{Mn}+\sum_{mn}\frac{\partial A^r_{mn}}{\partial p_{Ab}}\dot{R}_{mn}+\frac{1}{2}\sum_{MnLk}\frac{\partial A^{pp}_{Mn,Lk}}{\partial p_{Ab}}P_{Mn}P_{Lk}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{mnlk}\frac{\partial A^{rr}_{mn,lk}}{\partial p_{Ab}}R_{mn}R_{lk}+\sum_{Mnlk}\frac{\partial A^{pr}_{Mn,lk}}{\partial p_{Ab}}P_{Mn}R_{lk}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial l_i}{\partial p_{Ab}}\ddot{\eta}_i=0,$$
$$\sum_{Mn}\frac{\partial A^p_{Mn}}{\partial r_{ab}}\dot{P}_{Mn}+\sum_{mn}\frac{\partial A^r_{mn}}{\partial r_{ab}}\dot{R}_{mn}+\frac{1}{2}\sum_{MnLk}\frac{\partial A^{pp}_{Mn,Lk}}{\partial r_{ab}}P_{Mn}P_{Lk}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{mnlk}\frac{\partial A^{rr}_{mn,lk}}{\partial r_{ab}}R_{mn}R_{lk}+\sum_{Mnlk}\frac{\partial A^{pr}_{Mn,lk}}{\partial r_{ab}}P_{Mn}R_{lk}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial l_i}{\partial r_{ab}}\ddot{\eta}_i=0 \tag{12}$$

(динамические соотношения).

С учетом представления свободной поверхности (9) и формул (22) из Приложения А можно получить явные выражения для интегралов (7). Компоненты вектора $A_N=\{\{A^p_{Ab}\},\{A^r_{ab}\}\}$ определяются следующими интегралами

$$A^p_{Ab}=\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{x_{20}}\cos Ax_3\Theta^0_{Ab}(x_2,x_3,p_{Ij},r_{ij})dx_2dx_3,$$
$$A^r_{ab}=\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{x_{20}}\sin ax_3\Theta^0_{ab}(x_2,x_3,p_{Ij},r_{ij})dx_2dx_3, \tag{13}$$

а компоненты матрицы $A_{NK}=\{\{A^{pp}_{Ab,Cd},A^{pr}_{Ab,cd}\},\{A^{pr}_{Ab,cd},A^{rr}_{ab,cd}\}\}$ следующими интегралами

$$A^{pp}_{Ab,Cd} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{x_{20}} \left(\cos Ax_3 \cos Cx_3 \Theta^1_{AbCd}(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij}) + \right.$$
$$\left. + \sin Ax_3 \sin Cx_3 \Theta^2_{AbCd}(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij})\right) dx_2 dx_3,$$
$$A^{rr}_{ab,cd} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{x_{20}} \left(\sin ax_3 \sin cx_3 \Theta^1_{abcd}(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij}) + \right.$$
$$\left. + \cos ax_3 \cos cx_3 \Theta^2_{abcd}(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij})\right) dx_2 dx_3,$$
$$A^{pr}_{Ab,cd} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{x_{20}} \left(\cos Ax_3 \sin cx_3 \Theta^1_{Abcd}(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij}) - \right.$$
$$\left. - \sin Ax_3 \cos cx_3 \Theta^2_{Abcd}(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij})\right) dx_2 dx_3, \quad (14)$$

где

$$\Theta^0_N(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij}) = \int_{x_0}^{f^*+x_{10}} x_1^2 \psi_N \, dx_1,$$
$$\Theta^1_{NK}(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij}) = \int_{x_0}^{f^*+x_{10}} \left(x_1^2 x_2 \frac{\partial \psi_N}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_1} + \right.$$
$$\left. + x_2\left(1 + x_2^2\right) \frac{\partial \psi_N}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_2} - x_1 x_2^2 \left(\frac{\partial \psi_N}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_N}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_1} \right) \right) dx_1,$$
$$\Theta^2_{NK}(x_2, x_3, p_{Ij}, r_{ij}) = \int_{x_0}^{f^*+x_{10}} \frac{1}{x_2} \frac{\partial \psi_N}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_3} dx_1. \quad (15)$$

Формулы для l_i приведены в Приложении A.4.

3.3. Асимптотическая форма модальных уравнений

Воспользовавшись адаптивным методом, детально описанным в [6,10, 30], можно получить достаточно общую бесконечномерную нелинейную модальную систему третьего порядка малости, в которой сохранены члены до третьего порядка относительно обобщенных координат. Вывод соответствующих асимптотических нелинейных модальных уравнений дается в Приложении A.

Процедура вывода состоит в том, что мы предполагаем

$$p_{Mi} \sim P_{Mi} \sim r_{mi} \sim R_{mi} \sim \epsilon \ll 1, \quad (16)$$

где ϵ^3 является порядком величины безразмерного внешнего воздействия $\eta_1(t) \sim \eta_2(t) \sim \epsilon^3$, причем членами порядка $o(\epsilon^3)$ в общих нелинейных модальных уравнениях можно пренебречь.

На первом этапе вывода уравнений мы находим элементы вектора A_N из (13), A^p_{Ab} и A^r_{ab}, с точностью до слагаемых третьего порядка малости (Приложение А.1), а также находим, с точностью до слагаемых второго порядка малости, компоненты A^{pp}_{Ab}, A^{pr}_{Ab}, A^{rr}_{ab} матрицы A_{NK} из (14) (Приложение А.2). На втором этапе мы решаем (асимптотически) кинематические уравнения (11) относительно обобщенных скоростей, которые имеют вид

$$P_{Cd} = \mathbb{Z}^p_{Cd}\dot{p}_{Cd} + \sum_{MNij}\mathbb{Z}^{pp,Cd}_{Mi,Nj}p_{Mi}\dot{p}_{Nj} + \sum_{mnij}\mathbb{Z}^{rr,Cd}_{mi,nj}r_{mi}\dot{r}_{nj} + \\ + \sum_{MNLijk}\mathbb{Z}^{ppp,Cd}_{Mi,Nj,Lk}p_{Mi}p_{Nj}\dot{p}_{Lk} + \sum_{Mnlijk}\mathbb{Z}^{prr,Cd}_{Mi,nj,lk}p_{Mi}r_{nj}\dot{r}_{lk} + \\ + \sum_{mnLijk}\mathbb{Z}^{rrp,Cd}_{mi,nj,Lk}r_{mi}r_{nj}\dot{p}_{Lk}, \qquad R_{cd} = \mathbb{Z}^r_{cd}\dot{r}_{cd} + \sum_{Mnij}\mathbb{Z}^{pr,cd}_{Mi,nj}p_{Mi}\dot{r}_{nj} + \\ + \sum_{mNij}\mathbb{Z}^{rp,cd}_{mi,Nj}r_{mi}\dot{p}_{Nj} + \sum_{MNlijk}\mathbb{Z}^{ppr,cd}_{Mi,Nj,lk}p_{Mi}p_{Nj}\dot{r}_{lk} + \\ + \sum_{MnLijk}\mathbb{Z}^{prp,cd}_{Mi,nj,Lk}p_{Mi}r_{nj}\dot{p}_{Lk} + \sum_{mnlijk}\mathbb{Z}^{rrr,cd}_{mi,nj,lk}r_{mi}r_{nj}\dot{r}_{lk}, \qquad (17)$$

где явные выражения для коэффициентов $\mathbb{Z}$ даны в Приложении А.3.

С учетом общего представления вектора $\vec{l}$ (Приложение А.4) получаем следующие асиптотические нелинейные модальные уравнения, включающие члены до третьего порядка малости,

$$L_{p_{Eh}} = \sum_{Mi}\delta_{ME}\delta_{ih}\mathbf{d}^{p,Eh}_{Mi}\ddot{p}_{Mi} + \sum_{Mi}\delta_{ME}\delta_{ih}\mathbf{g}^{p,Eh}_{Mi}p_{Mi} + \sum_{mnij}\mathbf{g}^{rr,Eh}_{mi,nj}r_{mi}r_{nj} + \\ + \sum_{MNij}\mathbf{g}^{pp,Eh}_{Mi,Nj}p_{Mi}p_{Nj} + \sum_{MNij}\mathbf{t}^{pp,Eh}_{Mi,Nj}\dot{p}_{Mi}\dot{p}_{Nj} + \sum_{MNLijk}\mathbf{g}^{ppp,Eh}_{Mi,Nj,Lk}p_{Mi}p_{Nj}p_{Lk} + \\ + \sum_{Mnlijk}\mathbf{g}^{prr,Eh}_{Mi,nj,lk}p_{Mi}r_{nj}r_{lk} + \sum_{MNij}\mathbf{d}^{pp,Eh}_{Mi,Nj}p_{Mi}\ddot{p}_{Nj} + \sum_{Mnlijk}\mathbf{d}^{prr,Eh}_{Mi,nj,lk}p_{Mi}r_{nj}\ddot{r}_{lk} + \\ + \sum_{mnij}\mathbf{t}^{rr,Eh}_{mi,nj}\dot{r}_{mi}\dot{r}_{nj} + \sum_{mnij}\mathbf{d}^{rr,Eh}_{mi,nj}r_{mi}\ddot{r}_{nj} + \sum_{MNLijk}\mathbf{t}^{ppp,Eh}_{Mi,Nj,Lk}p_{Mi}\dot{p}_{Nj}\dot{p}_{Lk} + \\ + \sum_{MNLijk}\mathbf{d}^{ppp,Eh}_{Mi,Nj,Lk}p_{Mi}p_{Nj}\ddot{p}_{Lk} + \sum_{Mnlijk}\mathbf{t}^{prr,Eh}_{Mi,nj,lk}p_{Mi}\dot{r}_{nj}\dot{r}_{lk} + \\ + \sum_{mNlijk}\mathbf{t}^{rpr,Eh}_{mi,Nj,lk}r_{mi}\dot{p}_{Nj}\dot{r}_{lk} + \sum_{mnLijk}\mathbf{d}^{rrp,Eh}_{mi,nj,Lk}r_{mi}r_{nj}\ddot{p}_{Lk} = -\eta_2\delta_{1E}e_h, \qquad (18a)$$

$$L_{r_{eh}} = \sum_{mi} \delta_{me}\delta_{ih}\mathbf{d}^{r,eh}_{mi}\ddot{r}_{mi} + \sum_{mi} \delta_{me}\delta_{ih}\mathbf{g}^{r,eh}_{mi}r_{mi} + \sum_{Mnij}\mathbf{g}^{pr,eh}_{Mi,nj}p_{Mi}r_{nj}+$$
$$+\sum_{MNlijk}\mathbf{g}^{ppr,eh}_{Mi,Nj,lk}p_{Mi}p_{Nj}r_{lk} + \sum_{mnlijk}\mathbf{g}^{rrr,eh}_{mi,nj,lk}r_{mi}r_{nj}r_{lk} + \sum_{Mnij}\mathbf{t}^{pr,eh}_{Mi,nj}\dot{p}_{Mi}\dot{r}_{nj}+$$
$$+\sum_{Mnij}\mathbf{d}^{pr,eh}_{Mi,nj}p_{Mi}\ddot{r}_{nj} + \sum_{mNLijk}\mathbf{t}^{rpp,eh}_{mi,Nj,Lk}r_{mi}\dot{p}_{Nj}\dot{p}_{Lk} + \sum_{MnLijk}\mathbf{d}^{prp,eh}_{Mi,nj,Lk}p_{Mi}r_{nj}\ddot{p}_{Lk}+$$
$$+\sum_{mNij}\mathbf{d}^{rp,eh}_{mi,Nj}r_{mi}\ddot{p}_{Nj} + \sum_{MNlijk}\mathbf{t}^{ppr,eh}_{Mi,Nj,lk}p_{Mi}\dot{p}_{Nj}\dot{r}_{lk} + \sum_{MNlijk}\mathbf{d}^{ppr,eh}_{Mi,Nj,lk}p_{Mi}p_{Nj}\ddot{r}_{lk}+$$
$$+\sum_{mnlijk}\mathbf{t}^{rrr,eh}_{mi,nj,lk}r_{mi}\dot{r}_{nj}\dot{r}_{lk} + \sum_{mnlijk}\mathbf{d}^{rrr,eh}_{mi,nj,lk}r_{mi}r_{nj}\ddot{r}_{lk} = -\eta_3\delta_{1e}e_h. \quad (18b)$$

Аналитические выражения для подсчета гидродинамических коэффициентов $\mathbf{d}$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{t}$ имеют гораздо более сложный вид, чем аналогичные формулы, полученные для прямоугольных [19,20] или вертикальных цилиндрических баков кругового сечения [25,30]. Однако, многие из них, по-прежнему, являются либо нулями, либо равны друг другу. Явный вид этих выражений приведен в Приложениях A.5 и B.

4. Асимптотическая система типа Моисеева–Нариманова

4.1. Асимптотика Моисеева–Нариманова

Для осесимметричных баков асимптотические соотношения Моисеева–Нариманова подразумевают, что обобщенные координаты p_{11} и r_{11} являются доминантными и, согласно [6, 10, 19, 22, 30],

$$p_{11}, r_{11}, \sim \epsilon \quad p_{0i}, p_{2i}, r_{2i} \sim \epsilon^2, \quad p_{1(i+1)}, r_{1(i+1)}, p_{3i}, r_{3i} \sim \epsilon^3, \qquad (19)$$

$i = 1, 2, \ldots$. Остальные обобщенные координаты имеют порядок $o(\epsilon^3)$ и, следовательно, пренебрежимо малы.

Примеры нелинейных асимптотических модальных систем, базирующихся на асимптотике (19), можно найти в [4, 25, 30] для вертикальных круговых цилиндрических емкостей, в [19–21] для прямоугольных баков, в [15, 23, 24] для сферических баков и в [10, 11, 19, 26] для конических баков.

4.2. Нелинейные асимптотические модальные уравнения

Выкладки показывают, что (19) приводит к следующим нелинейным модальным уравнениям типа Моисеева–Нариманова для случая усеченных круговых конических полостей

$$L_{p_{0h}} = \mu_{0h}\left(\ddot{p}_{0h} + \sigma_{0h}^2 p_{0h}\right) + d_{8,h}\left(\dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2\right) + \\ + d_{10,h}\left(p_{11}\ddot{p}_{11} + r_{11}\ddot{r}_{11}\right) + \mathcal{G}_{0h}\left(p_{11}^2 + r_{11}^2\right) = 0, \quad \text{(20a)}$$

$$L_{p_{2h}} = \mu_{2h}\left(\ddot{p}_{2h} + \sigma_{2h}^2 p_{2h}\right) + d_{7,h}\left(\dot{p}_{11}^2 - \dot{r}_{11}^2\right) + \\ + d_{9,h}\left(p_{11}\ddot{p}_{11} - r_{11}\ddot{r}_{11}\right) + \mathcal{G}_{4,h}\left(p_{11}^2 - r_{11}^2\right) = 0, \quad \text{(20b)}$$

$$L_{r_{2h}} = \mu_{2h}\left(\ddot{r}_{2h} + \sigma_{2h}^2 r_{2h}\right) + 2d_{7,h}\left(\dot{p}_{11}\dot{r}_{11}\right) + \\ + d_{9,h}\left(p_{11}\ddot{r}_{11} + r_{11}\ddot{p}_{11}\right) + 2\mathcal{G}_{4,h}p_{11}r_{11} = 0, \quad \text{(20c)}$$

$$L_{p_{11}} = \mu_{11}\left(\ddot{p}_{11} + \sigma_{11}^2 p_{11}\right) + d_1\left(p_{11}^2\ddot{p}_{11} + p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11} + p_{11}\dot{p}_{11}^2 + p_{11}\dot{r}_{11}^2\right) + \\ + d_2\left(r_{11}^2\ddot{p}_{11} - p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11} + 2r_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - 2p_{11}\dot{r}_{11}^2\right) + \mathcal{G}_1\left(p_{11}^3 + p_{11}r_{11}^2\right) + \\ + \sum_{j=1}\Big(d_3^j\left(\ddot{p}_{11}p_{2j} + \ddot{r}_{11}r_{2j} + \dot{p}_{11}\dot{p}_{2j} + \dot{r}_{11}\dot{r}_{2j}\right) + d_4^j\left(p_{11}\ddot{p}_{2j} + r_{11}\ddot{r}_{2j}\right) + \\ + d_5^j\left(p_{0j}\ddot{p}_{11} + \dot{p}_{0j}\dot{p}_{11}\right) + d_6^j\left(\ddot{p}_{0j}p_{11}\right) + \\ + \mathcal{G}_2^j\left(p_{0j}p_{11}\right) + \mathcal{G}_3^j\left(p_{11}p_{2j} + r_{11}r_{2j}\right)\Big) = -\ddot{\eta}_2 e_1, \quad \text{(20d)}$$

$$L_{r_{11}} = \mu_{11}\left(\ddot{r}_{11} + \sigma_{11}^2 r_{11}\right) + d_1\left(p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11} + r_{11}^2\ddot{r}_{11} + r_{11}\dot{p}_{11}^2 + r_{11}\dot{r}_{11}^2\right) + \\ + d_2\left(p_{11}^2\ddot{r}_{11} - p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11} + 2p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - 2r_{11}\dot{p}_{11}^2\right) + \mathcal{G}_1\left(p_{11}^2 r_{11} + r_{11}^3\right) + \\ + \sum_{j=1}\Big(d_3^j\left(\ddot{p}_{11}r_{2i} - \ddot{r}_{11}p_{2j} + \dot{p}_{11}\dot{r}_{2j} - \dot{r}_{11}\dot{p}_{2j}\right) + d_4^j\left(p_{11}\ddot{r}_{2j} - r_{11}\ddot{p}_{2j}\right) + \\ + d_5^j\left(p_{0j}\ddot{r}_{11} + \dot{p}_{0j}\dot{r}_{11}\right) + d_6^j\left(\ddot{p}_{0j}r_{11}\right) + \\ + \mathcal{G}_2^j\left(p_{0j}r_{11}\right) + \mathcal{G}_3^j\left(p_{11}r_{2j} - r_{11}p_{2j}\right)\Big) = -\ddot{\eta}_3 e_1, \quad \text{(20e)}$$

$$\begin{aligned}
L_{p_{3h}} = {} & \mu_{3h}\left(\ddot{p}_{3h} + \sigma_{3h}^2 p_{3h}\right) + d_{11,h}\left(p_{11}^2\ddot{p}_{11} - r_{11}^2\ddot{p}_{11} - 2p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11}\right) + \\
& d_{12,h}\left(p_{11}\dot{p}_{11}^2 - p_{11}\dot{r}_{11}^2 - 2r_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11}\right) + \mathcal{G}_{6,h}\left(p_{11}^3 - 3p_{11}r_{11}^2\right) + \\
& \sum_{j=1}\Big(d_{13,h}^j\left(\ddot{p}_{11}p_{2j} - \ddot{r}_{11}r_{2j}\right) + d_{14,h}^j\left(p_{11}\ddot{p}_{2j} - r_{11}\ddot{r}_{2j}\right) + \\
& + d_{15,h}^j\left(\dot{p}_{11}\dot{p}_{2j} - \dot{r}_{11}\dot{r}_{2j}\right) + \mathcal{G}_{5,h}^j\left(p_{11}p_{2j} - r_{11}r_{2j}\right)\Big) = 0,
\end{aligned} \tag{20f}$$

$$\begin{aligned}
L_{r_{3h}} = {} & \mu_{3h}\left(\ddot{r}_{3h} + \sigma_{3h}^2 r_{3h}\right) + d_{11,h}\left(p_{11}^2\ddot{r}_{11} - r_{11}^2\ddot{r}_{11} + 2p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11}\right) + \\
& d_{12,h}\left(r_{11}\dot{p}_{11}^2 - r_{11}\dot{r}_{11}^2 + 2p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11}\right) + \mathcal{G}_{6,h}\left(3p_{11}^2 r_{11} - r_{11}^3\right) + \\
& \sum_{j=1}\Big(d_{13,h}^j\left(\ddot{p}_{11}r_{2j} + \ddot{r}_{11}p_{2j}\right) + d_{14,h}^j\left(p_{11}\ddot{r}_{2j} + r_{11}\ddot{p}_{2j}\right) + \\
& + d_{15,h}^j\left(\dot{p}_{11}\dot{r}_{2j} + \dot{r}_{11}\dot{p}_{2j}\right) + \mathcal{G}_{5,h}^j\left(p_{11}r_{2j} + r_{11}p_{2j}\right)\Big) = 0,
\end{aligned} \tag{20g}$$

$$\begin{aligned}
L_{p_{1k}} = {} & \mu_{1k}\left(\ddot{p}_{1k} + \sigma_{1k}^2 p_{1k}\right) + d_{16,k}\left(p_{11}^2\ddot{p}_{11} + p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11}\right) + \\
& + d_{18,k}\left(p_{11}\dot{p}_{11}^2 + p_{11}\dot{r}_{11}^2\right) + d_{17,k}\left(r_{11}^2\ddot{p}_{11} - p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11}\right) + \\
& + d_{19,k}\left(r_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - p_{11}\dot{r}_{11}^2\right) + \mathcal{G}_{1k}\left(p_{11}^3 + p_{11}r_{11}^2\right) + \\
& + \sum_{j=1}\Big(d_{20,k}^j\left(\ddot{p}_{11}p_{2j} + \ddot{r}_{11}r_{2j}\right) + d_{22,k}^j\left(\dot{p}_{11}\dot{p}_{2i} + \dot{r}_{11}\dot{r}_{2j}\right) + \\
& + d_{21,k}^j\left(p_{11}\ddot{p}_{2j} + r_{11}\ddot{r}_{2j}\right) + d_{23,k}^j\left(p_{0j}\ddot{p}_{11}\right) + d_{25,k}^j\left(\dot{p}_{0j}\dot{p}_{11}\right) + \\
& + d_{24,k}^j\left(\ddot{p}_{0j}p_{11}\right) + \mathcal{G}_{3,k}^j\left(p_{0j}p_{11}\right) + \mathcal{G}_{2,k}^j\left(p_{11}p_{2j} + r_{11}r_{2j}\right)\Big) = 0,
\end{aligned} \tag{20h}$$

$$\begin{aligned}
L_{r_{1k}} = {} & \mu_{1k}\left(\ddot{r}_{1k} + \sigma_{1k}^2 r_{1k}\right) + d_{16,k}\left(p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11} + r_{11}^2\ddot{r}_{11}\right) + \\
& + d_{18,k}\left(r_{11}\dot{p}_{11}^2 + r_{11}\dot{r}_{11}^2\right) + d_{17,k}\left(p_{11}^2\ddot{r}_{11} - p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11}\right) + \\
& + d_{19,k}\left(p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - r_{11}\dot{p}_{11}^2\right) + \mathcal{G}_{1k}\left(p_{11}^2 r_{11} + r_{11}^3\right) + \\
& + \sum_{j=1}\Big(d_{20,k}^j\left(\ddot{p}_{11}r_{2j} - \ddot{r}_{11}p_{2j}\right) + d_{22,k}^j\left(\dot{p}_{11}\dot{r}_{2j} - \dot{r}_{11}\dot{p}_{2j}\right) + \\
& + d_{21,k}^j\left(r_{11}\ddot{p}_{2j} - p_{11}\ddot{r}_{2j}\right) + d_{23,k}^j\left(p_{0j}\ddot{r}_{11}\right) + d_{25,k}^j\left(\dot{p}_{0j}\dot{r}_{11}\right) + \\
& + d_{24,k}^j\left(\ddot{p}_{0j}r_{11}\right) + \mathcal{G}_{3,k}^j\left(p_{0j}r_{11}\right) + \mathcal{G}_{2,k}^j\left(p_{11}r_{2j} - r_{11}p_{2j}\right)\Big) = 0.
\end{aligned} \tag{20i}$$

Формулы для вычисления гидродинамических коэффициентов приведены в Приложении B. Заметим, что в (20) имеются коэффициенты $\mathcal{G}$, которые выражают так называемую геометрическую нелинейность, возникающую в связи с невертикальностью стенок. Такие коэффициенты отсутствуют в уравнениях для кругового цилиндрического бака.

При удержании в системе (20) только первых семи обобщенных координат с $M = 0, 1, 2, 3$ и $i = 1$ получаем, с точностью до обозначений, семимодовую модальную систему из работы [10].

Вычисление гидродинамических коэффициентов является весьма сложной процедурой, которая может порождать вычислительные ошибки и требует особой тщательности, а также проверки полученных результатов путем сравнения их с имеющимися в литературе для предельных случаев. Таким предельным случаем является, например, вертикальный круговой цилиндр ($\theta_0 \to 0$), а также случай $\mathtt{r_1} \to 0$, который соответствует неусеченному конусу. В последнем случае уравнения (20) переходят, при соответствующем ограничении на число учитываемых обобщенных координат, в пятимодовую модальную систему из работы [26].

A. Приложение

Функция $\beta_0(t)$, входящая в уравнение свободной поверхности, находится из условия сохранения объема

$$V_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{x_{20}} x_2 \left(x_{10}^2 f + x_{10} f^2 + \tfrac{1}{3} f^3 \right) dx_2 dx_3 = 0, \tag{21}$$

является функцией обобщенных координат $p_{Mi}(t)$, $r_{mi}(t)$ и определяется с точностью до $O(\epsilon^3)$,

$$\beta_0 = \sum_{Mi} \beta^{pp}_{Mi,Mi} p^2_{Mi} + \sum_{mi} \beta^{rr}_{mi,mi} r^2_{mi} + \sum_{MNLijk} \beta^{ppp}_{Mi,Nj,Lk} p_{Mi} p_{Nj} p_{Lk} + \\ + \sum_{Mnlijk} \beta^{prr}_{Mi,nj,lk} p_{Mi} r_{nj} r_{lk}, \tag{22}$$

где β-коэффициенты имеют следующий вид

$$\beta^{pp}_{Mi,Mi} = -\frac{\Lambda^{cc}_{MM} \lambda_{Mi,Mi}}{\pi x_{10} x^2_{20}}, \quad \beta^{rr}_{mi,mi} = -\frac{\Lambda^{ss}_{mm} \lambda_{mi,mi}}{\pi x_{10} x^2_{20}},$$

$$\beta^{ppp}_{Mi,Nj,Lk} = -\frac{\Lambda^{ccc}_{MNL}\lambda_{Mi,Nj,Lk}}{3\pi x_{10}^2 x_{20}^2}, \quad \beta^{prr}_{Mi,nj,lk} = -\frac{\Lambda^{css}_{Mnl}\lambda_{Mi,nj,lk}}{\pi x_{10}^2 x_{20}^2}. \tag{23}$$

Здесь введены следующие обозначения для тригонометрических составляющих

$$\Lambda^{\overbrace{c...c}^{N_1}\overbrace{s...s}^{N_2}}_{\underbrace{i..j}_{N1}\underbrace{k...l}_{N2}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(ix_3)\cdot\ldots\cdot\cos(jx_3)}_{N_1}\cdot\underbrace{\sin(kx_3)\cdot\ldots\cdot\sin(lx_3)}_{N_2}\, dx_3 \tag{24}$$

и интегральных компонент радиальных составляющих

$$\lambda_{Mi,\ldots,Nj} = \int_0^{x_{20}} x_2 f_{Mi}(x_2)\cdot\ldots\cdot f_{Nj}(x_2)\, dx_2. \tag{25}$$

A.1. Интегралы A_N

Раскладывая A^p_{Mi} и A^r_{mi} до третьего порядка малости по обобщенными координатами p_{Mi} и r_{mi}, получим следующие общие представления интегралов (13) с учетом того, что $p_{Mi} \sim r_{mi} \sim \epsilon$,

$$A^p_{Ab} = \mathbb{A}^p_{Ab} + \mathbb{A}^{p.p}_{Ab,Ab}\,p_{Ab} + \sum_{MNij}\mathbb{A}^{p.pp}_{Ab,Mi,Nj}p_{Mi}p_{Nj} + \sum_{mnij}\mathbb{A}^{p.rr}_{Ab,mi,nj}r_{mi}r_{nj} +$$
$$+ \sum_{MNLijk}\mathbb{A}^{p.ppp}_{Ab,Mi,Nj,Lk}p_{Mi}p_{Nj}p_{Lk} + \sum_{Mnlijk}\mathbb{A}^{p.prr}_{Ab,Mi,nj,lk}p_{Mi}r_{nj}r_{lk}, \tag{26a}$$

$$A^r_{ab} = \mathbb{A}^{r.r}_{ab,ab}\,r_{ab} + \sum_{Mnij}\mathbb{A}^{r.pr}_{ab,Mi,nj}p_{Mi}r_{nj} + \sum_{MNlijk}\mathbb{A}^{r.ppr}_{ab,Mi,Nj,lk}p_{Mi}p_{Nj}r_{lk} +$$
$$+ \sum_{mnlijk}\mathbb{A}^{r.rrr}_{ab,mi,nj,lk}r_{mi}r_{nj}r_{lk}, \tag{26b}$$

где коэффициенты $\mathbb{A}$ имеют вид

$$\mathbb{A}^p_{Ab} = \Lambda^c_A\hat{\mathcal{E}}^{Ab,0}, \quad \mathbb{A}^{p.pp}_{Ab,Mi,Nj} = \Lambda^{ccc}_{AMN}\hat{\mathcal{E}}^{Ab,2}_{Mi,Nj} + \delta_{MN}\delta_{ij}\Lambda^c_A\hat{\mathcal{E}}^{Ab,1}\beta^{pp}_{Mi,Nj},$$
$$\mathbb{A}^{p.p}_{Ab,Ab} = \Lambda^{cc}_{AA}\hat{\mathcal{E}}^{Ab,1}_{Ab}, \quad \mathbb{A}^{p.rr}_{Ab,mi,nj} = \Lambda^{css}_{Amn}\hat{\mathcal{E}}^{Ab,2}_{mi,nj} + \delta_{mn}\delta_{ij}\Lambda^c_A\hat{\mathcal{E}}^{Ab,1}\beta^{rr}_{mi,nj},$$
$$\mathbb{A}^{p.ppp}_{Ab,Mi,Nj,Lk} = \Lambda^{cccc}_{AMNL}\hat{\mathcal{E}}^{Ab,3}_{Mi,Nj,Lk} + 2\delta_{MA}\delta_{ib}\Lambda^{cc}_{AM}\hat{\mathcal{E}}^{Ab,2}_{Mi}\delta_{NL}\delta_{jk}\beta^{pp}_{Nj,Lk} +$$
$$+ \Lambda^c_A\hat{\mathcal{E}}^{Ab,1}\beta^{ppp}_{Mi,Nj,Lk}, \quad \mathbb{A}^{p.prr}_{Ab,Mi,nj,lk} = 3\Lambda^{ccss}_{AMnl}\hat{\mathcal{E}}^{Ab,3}_{Mi,nj,lk} +$$

$$+ 2\delta_{MA}\delta_{ib}\Lambda^{cc}_{AM}\hat{\mathcal{E}}^{Ab,2}_{Mi}\delta_{nl}\delta_{jk}\beta^{rr}_{nj,lk} + \Lambda^{c}_{A}\hat{\mathcal{E}}^{Ab,1}\beta^{prr}_{Mi,nj,lk}, \qquad (27a)$$

$$\mathbb{A}^{r.r}_{ab,ab} = \Lambda^{ss}_{aa}\hat{\mathcal{E}}^{ab,1}_{ab}, \quad \mathbb{A}^{r.pr}_{ab,Mi,nj} = 2\Lambda^{css}_{Mna}\hat{\mathcal{E}}^{ab,2}_{Mi,nj},$$
$$\mathbb{A}^{r.ppr}_{ab,Mi,Nj,lk} = 3\Lambda^{ccss}_{MNla}\hat{\mathcal{E}}^{ab,3}_{Mi,Nj,lk} + 2\delta_{al}\delta_{bk}\Lambda^{ss}_{al}\hat{\mathcal{E}}^{ab,2}_{lk}\delta_{MN}\delta_{ij}\beta^{pp}_{Mi,Nj},$$
$$\mathbb{A}^{r.rrr}_{ab,mi,nj,lk} = \Lambda^{ssss}_{mnla}\hat{\mathcal{E}}^{ab,3}_{mi,nj,lk} + 2\delta_{al}\delta_{bk}\Lambda^{ss}_{al}\hat{\mathcal{E}}^{ab,2}_{lk}\delta_{mn}\delta_{ij}\beta^{rr}_{mi,nj}. \qquad (27b)$$

Здесь

$$\hat{\mathcal{E}}^{Ab,e}_{Mi,\ldots,Nj} = \int_0^{x_{20}} x_2 B^{Ab}_e(x_2)\, f_{Mi}(x_2)\cdot\ldots\cdot f_{Nj}(x_2)\, dx_2. \qquad (28)$$

Вид интегральных коэффициентов $\hat{\mathcal{E}}$ соответствует, с точностью до обозначений, аналогичным коэффициентам, полученным в работе [10] для семимодовой модальной системы.

A.1.1. Производные A_N

Частные производные от элементов A^r_{ab}, A^r_{ab} вектора A_N по обобщенным координатам p_{Mi}, r_{mi}, с точностью до второго порядка малости, имеют следующий вид

$$\frac{\partial A^p_{Ab}}{\partial p_{Eh}} = \mathbb{V}^p_{Ab,Eh} + \sum_{Mi}\mathbb{V}^{p.p}_{Ab,Eh,Mi}p_{Mi} + \sum_{MNij}\mathbb{V}^{p.pp}_{Ab,Eh,Mi,Nj}p_{Mi}p_{Nj} +$$
$$+ \sum_{mnij}\mathbb{V}^{p.rr}_{Ab,Eh,mi,nj}r_{mi}r_{nj}, \quad \frac{\partial A^p_{Ab}}{\partial r_{eh}} = \sum_{mi}\mathbb{V}^{p.r}_{Ab,mi,eh}r_{mi} +$$
$$+ \sum_{Mnij}\mathbb{V}^{p.pr}_{Ab,Mi,nj,eh}p_{Mi}r_{nj}, \quad \frac{\partial A^r_{ab}}{\partial p_{Eh}} = \sum_{mi}\mathbb{V}^{r.r}_{ab,Eh,mi}r_{mi} +$$
$$+ \sum_{Mnij}\mathbb{V}^{r.pr}_{ab,Eh,Mi,nj}p_{Mi}r_{nj}, \quad \frac{\partial A^r_{ab}}{\partial r_{eh}} = \mathbb{V}^r_{ab,eh} + \sum_{Mi}\mathbb{V}^{r.p}_{ab,Mi,eh}p_{Mi} +$$
$$+ \sum_{MNij}\mathbb{V}^{r.pp}_{ab,Mi,Nj,eh}p_{Mi}p_{Nj} + \sum_{mnij}\mathbb{V}^{r.rr}_{ab,mi,nj,eh}r_{mi}r_{nj}, \qquad (29)$$

где коэффициенты $\mathbb{V}$ выражаются через коэффициенты вектора A_N (27) следующим образом

$$\mathbb{V}^p_{Ab,Eh} = \mathbb{A}^{p.p}_{Ab,Eh}, \quad \mathbb{V}^r_{ab,eh} = \mathbb{A}^{r.r}_{ab,eh}, \quad \mathbb{V}^{p.p}_{Ab,Eh,Mi} = 2\mathbb{A}^{p.pp}_{Ab,Eh,Mi}p_{Mi},$$

$$\mathbb{V}^{p.pp}_{Ab,Eh,Mi,Nj} = \mathbb{A}^{p.ppp}_{Ab,Eh,Mi,Nj} + 2\mathbb{A}^{p.ppp}_{Ab,Mi,Eh,Nj},$$
$$\mathbb{V}^{p.rr}_{Ab,Eh,mi,nj} = \mathbb{A}^{p.prr}_{Ab,Eh,mi,nj}, \quad \mathbb{V}^{p.pr}_{Ab,Mi,nj,eh} = 2\mathbb{A}^{p.prr}_{Ab,Mi,nj,eh} p_{Mi} r_{nj},$$
$$\mathbb{V}^{p.r}_{Ab,mi,eh} = 2\mathbb{A}^{p.rr}_{Ab,mi,eh}, \quad \mathbb{V}^{r.pr}_{ab,Eh,Mi,Nj} = 2\mathbb{A}^{r.ppr}_{ab,Eh,Mi,nj} p_{Mi} r_{nj},$$
$$\mathbb{V}^{r.p}_{ab,Mi,eh} = \mathbb{A}^{r.pr}_{ab,Mi,eh}, \quad \mathbb{V}^{r.rr}_{ab,mi,nj,eh} = 2\mathbb{A}^{r.rrr}_{ab,eh,mi,nj} + \mathbb{A}^{r.rrr}_{ab,mi,nj,eh},$$
$$\mathbb{V}^{r.r}_{ab,Eh,mi} = \mathbb{A}^{r.pr}_{ab,Eh,mi}, \quad \mathbb{V}^{r.pp}_{ab,Mi,Nj,eh} = \mathbb{A}^{r.ppr}_{ab,Mi,Nj,eh}. \qquad (30)$$

A.2. Интегралы A_{NK}

Раскладывая элементы матрицы A_{NK} (14) ($A_{NK} = \{\{A^{pp}_{NK}, A^{pr}_{NK}\}, \{A^{pr}_{NK}, A^{rr}_{NK}\}\}$) до второго порядка малости по обобщенными координатами p_{Mi} и r_{mi}, получим следующие представления интегралов

$$A^{pp}_{Ab,Cd} = \mathbb{B}^{pp.0}_{Ab,Cd} + \sum_{Mi} \mathbb{B}^{pp.p}_{Ab,Cd,Mi} p_{Mi} + \sum_{MNij} \mathbb{B}^{pp.pp}_{Ab,Cd,Mi,Nj} p_{Mi} p_{Nj} +$$
$$+ \sum_{mnij} \mathbb{B}^{pp.rr}_{Ab,Cd,mi,nj} r_{mi} r_{nj}, \quad A^{rr}_{ab,cd} = \mathbb{B}^{rr.0}_{ab,cd} + \sum_{Mi} \mathbb{B}^{rr.p}_{ab,cd,Mi} p_{Mi} +$$
$$+ \sum_{MNij} \mathbb{B}^{rr.pp}_{ab,cd,Mi,Nj} p_{Mi} p_{Nj} + \sum_{mnij} \mathbb{B}^{rr.rr}_{ab,cd,mi,nj} r_{mi} r_{nj},$$
$$A^{pr}_{Ab,cd} = \sum_{mi} \mathbb{B}^{pr.r}_{Ab,cd,mi} r_{mi} + \sum_{Mnij} \mathbb{B}^{pr.pr}_{Ab,cd,Mi,nj} p_{Mi} r_{nj}. \qquad (31)$$

Здесь коэффициенты $\mathbb{B}$ имеют следующий вид

$$\mathbb{B}^{pp.0}_{Ab,Cd} = \Lambda^{cc}_{AC} \tilde{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,0} + \Lambda^{ss}_{AC} \bar{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,0}, \quad \mathbb{B}^{pp.p}_{Ab,Cd,Mi} = \Lambda^{ccc}_{ACM} \tilde{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,1}_{Mi} +$$
$$+ \Lambda^{css}_{MAC} \bar{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,1}_{Mi}, \quad \mathbb{B}^{pp.pp}_{Ab,Cd,Mi,Nj} = \Lambda^{cccc}_{ACMN} \tilde{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,2}_{Mi,Nj} +$$
$$+ \Lambda^{ccss}_{MNAC} \bar{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,2}_{Mi,Nj} + \left(\Lambda^{cc}_{AC} \tilde{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,1} + \Lambda^{ss}_{AC} \bar{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,1} \right) \delta_{MN} \delta_{ij} \beta^{pp}_{Mi,Nj},$$
$$\mathbb{B}^{pp.rr}_{Ab,Cd,mi,nj} = \Lambda^{ccss}_{A,C,m,n} \tilde{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,2}_{mi,nj} + \Lambda^{ssss}_{A,C,m,n} \bar{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,2}_{mi,nj} +$$
$$+ \left(\Lambda^{cc}_{AC} \tilde{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,1} + \Lambda^{ss}_{AC} \bar{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,1} \right) \delta_{mn} \delta_{ij} \beta^{rr}_{mi,nj}, \qquad (32a)$$

$$\mathbb{B}^{rr.0}_{ab,cd} = \delta_{ac} \Lambda^{ss}_{ac} \tilde{\mathcal{E}}^{ab,cd,0} + \delta_{ac} \Lambda^{cc}_{ac} \bar{\mathcal{E}}^{ab,cd,0}, \quad \mathbb{B}^{rr.p}_{ab,cd,Mi} = \Lambda^{css}_{Mac} \tilde{\mathcal{E}}^{ab,cd,1}_{Mi} +$$
$$+ \Lambda^{ccc}_{acM} \bar{\mathcal{E}}^{ab,cd,1}_{Mi}, \quad \mathbb{B}^{rr.pp}_{ab,cd,Mi,Nj} = \Lambda^{ccss}_{MNac} \tilde{\mathcal{E}}^{ab,cd,2}_{Mi,Nj} + \Lambda^{cccc}_{acMN} \bar{\mathcal{E}}^{ab,cd,2}_{Mi,Nj} +$$
$$\left(\Lambda^{ss}_{ac} \tilde{\mathcal{E}}^{ab,cd,1} + \Lambda^{cc}_{ac} \bar{\mathcal{E}}^{ab,cd,1} \right) \delta_{m1} \delta_{i1} \delta_{MN} \delta_{ij} \beta^{pp}_{Mi,Nj},$$

$$\mathbb{B}^{rr.rr}_{ab,cd,mi,nj} = \Lambda^{ssss}_{mnac}\tilde{\mathcal{E}}^{ab,cd,2}_{mi,nj} + \Lambda^{ccss}_{acmn}\bar{\mathcal{E}}^{ab,cd,2}_{mi,nj} + \\ + \left(\Lambda^{ss}_{ac}\tilde{\mathcal{E}}^{ab,cd,1} + \Lambda^{cc}_{ac}\bar{\mathcal{E}}^{ab,cd,1}\right)\delta_{m1}\delta_{i1}\delta_{mn}\delta_{ij}\beta^{rr}_{mi,nj}, \quad (32b)$$

$$\mathbb{B}^{pr.r}_{Ab,cd,mi} = \Lambda^{css}_{Acm}\tilde{\mathcal{E}}^{Ab,cd,1}_{mi} - \Lambda^{css}_{cAm}\bar{\mathcal{E}}^{Ab,cd,1}_{mi}, \\ \mathbb{B}^{pr.pr}_{Ab,cd,Mi,nj} = 2\left(\Lambda^{ccss}_{AMcn}\tilde{\mathcal{E}}^{Ab,cd,2}_{Mi,nj} - \Lambda^{ccss}_{cMAn}\bar{\mathcal{E}}^{Ab,cd,2}_{Mi,nj}\right), \quad (32c)$$

где

$$\tilde{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,e}_{Mi,\ldots,Nj} = \int_0^{x_{20}} F^{AbCd}_e(x_2)\, f_{Mi}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{Nj}(x_2)\, dx_2, \quad (33a)$$

$$\bar{\mathcal{E}}^{Ab,Cd,e}_{Mi,\ldots,Nj} = AC\int_0^{x_{20}} \frac{1}{x_2} B^{AbCd}_e(x_2)\, f_{Mi}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{Nj}(x_2) dx_2. \quad (33b)$$

Указанные выше коэффициенты $\tilde{\mathcal{E}}$ и $\bar{\mathcal{E}}$ аналогичны, с точностью до обозначений, аналогичным коэффициентам, полученным в работе для семимодовой модальной системы [10].

A.2.1. Производные матрицы A_{NK}

Аналогично вышеприведенному выводим частные производные от элементов A^{pp}_{MiNj}, A^{rr}_{minj} и A^{pr}_{Minj} матрицы (14) по обобщенных координатах p_{Mi}, r_{mi} до первого порядка малости включительно

$$\frac{\partial A^{pp}_{Ab,Cd}}{\partial p_{Eh}} = \mathbb{W}^{pp.p}_{Ab,Cd,Eh} + \sum_{Mi}\mathbb{W}^{pp.pp}_{Ab,Cd,Eh,Mi}p_{Mi}, \quad \frac{\partial A^{pp}_{Ab,Cd}}{\partial r_{eh}} = \\ = \sum_{mi}\mathbb{W}^{pp.rr}_{Ab,Cd,mi,eh}r_{mi}, \quad \frac{\partial A^{rr}_{ab,cd}}{\partial p_{Eh}} = \mathbb{W}^{rr.p}_{ab,cd,Eh} + \sum_{Mi}\mathbb{W}^{rr.pp}_{ab,cd,Eh,Mi}p_{Mi}, \\ \frac{\partial A^{rr}_{ab,cd}}{\partial r_{eh}} = \sum_{m,i}\mathbb{W}^{rr.rr}_{ab,cd,mi,eh}r_{mi}, \quad \frac{\partial A^{pr}_{Ab,cd}}{\partial p_{Eh}} = \sum_{mi}\mathbb{W}^{pr.pr}_{Ab,cd,Eh,mi}r_{mi}, \\ \frac{\partial A^{pr}_{Ab,cd}}{\partial r_{eh}} = \mathbb{W}^{pr.r}_{eh} + \sum_{Mi}\mathbb{W}^{pr.pr}_{Ab,cd,Mi,eh}p_{Mi}, \quad (34)$$

где коэффициенты $\mathbb{W}$ выражаются через коэффициенты элементов матрицы A_{NK} (32) следующим образом

$$\begin{gathered}
\mathbb{W}^{pp.p}_{Ab,Cd,Eh}=\mathbb{B}^{pp.p}_{Ab,Cd,Eh},\quad \mathbb{W}^{pp.pp}_{Ab,Cd,Eh,Mi}=2\mathbb{B}^{pp.pp}_{Ab,Cd,Eh,Mi}=\\
=2\mathbb{B}^{pp.pp}_{Ab,Cd,Mi,Eh},\quad \mathbb{W}^{pp.rr}_{Ab,Cd,mi,eh}=2\mathbb{B}^{pp.rr}_{Ab,Cd,eh,mi}=2\mathbb{B}^{pp.rr}_{Ab,Cd,mi,eh},\\
\mathbb{W}^{rr.p}_{ab,cd,Eh}=\mathbb{B}^{rr.p}_{ab,cd,Eh},\quad \mathbb{W}^{rr.pp}_{ab,cd,Eh,Mi}=2\mathbb{B}^{rr.pp}_{ab,cd,Eh,Mi}=2\mathbb{B}^{rr.pp}_{ab,cd,Mi,Eh},\\
\mathbb{W}^{rr.rr}_{ab,cd,mi,eh}=2\mathbb{B}^{rr.rr}_{ab,cd,eh,mi}=2\mathbb{B}^{rr.rr}_{ab,cd,mi,eh},\ \mathbb{W}^{pr.pr}_{Ab,cd,Eh,mi}=\mathbb{B}^{pr.pr}_{Ab,cd,Eh,mi},\\
\mathbb{W}^{pr.r}_{Ab,cd,eh}=\mathbb{B}^{pr.r}_{Ab,cd,eh},\quad \mathbb{W}^{pr.pr}_{Ab,cd,Mi,eh}=\mathbb{B}^{pr.pr}_{Ab,cd,Mi,eh}. \qquad (35)
\end{gathered}$$

A.3. Обобщенные скорости P_{Cd} и R_{cd}

После подстановки общих выражений для обобщенных скоростей (17) в кинематическое уравнение (11) с учетом вида производных (29) из A.1.1, а также (34) из A.2.1, собирая подобные, получим следующие представления для коэффициентов $\mathbb{Z}$ в выражениях для обобщенных скоростей

$$\begin{gathered}
\mathbb{Z}^{p}_{Ab}=\frac{\mathbb{V}^{p}_{Ab,Ab}}{\mathbb{B}^{pp.0}_{Ab,Ab}},\quad \mathbb{Z}^{pp,Ab}_{Mi,Nj}=\frac{\mathbb{V}^{p.p}_{Ab,Nj,Mi}-\mathbb{B}^{pp.p}_{Ab,Nj,Mi}\mathbb{Z}^{p}_{Nj}}{\mathbb{B}^{pp.0}_{Ab,Ab}},\\
\mathbb{Z}^{ppp,Ab}_{Mi,Nj,Lk}=\frac{\mathbb{V}^{p.pp}_{Ab,Lk,Mi,Nj}-\mathbb{B}^{pp.pp}_{Ab,Lk,Mi,Nj}\mathbb{Z}^{p}_{Lk}-\sum_{Cd}\mathbb{B}^{pp.p}_{Ab,Cd,Mi}\mathbb{Z}^{pp,Cd}_{Nj,Lk}}{\mathbb{B}^{pp.0}_{Ab,Ab}},\\
\mathbb{Z}^{rr,Ab}_{mi,nj}=\frac{\mathbb{V}^{p.r}_{Ab,mi,nj}-\mathbb{B}^{pr.r}_{Ab,nj,mi}\mathbb{Z}^{r}_{nj}}{\mathbb{B}^{pp.0}_{Ab,Ab}},\quad \mathbb{Z}^{prr,Ab}_{Mi,nj,lk}=\\
\frac{\mathbb{V}^{p.pr}_{Ab,Mi,nj,lk}-\mathbb{B}^{pr.pr}_{Ab,lk,Mi,nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk}-\mathbb{B}^{pr.r}_{Ab,cd,nj}\mathbb{Z}^{pr,cd}_{Mi,lk}-\sum_{Cd}\mathbb{B}^{pp.p}_{Ab,Cd,Mi}\mathbb{Z}^{rr,Cd}_{nj,lk}}{\mathbb{B}^{pp.0}_{Ab,Ab}},\\
\mathbb{Z}^{rrp,Ab}_{mi,nj,Lk}=\frac{\mathbb{V}^{p.rr}_{Ab,Lk,mi,nj}-\mathbb{B}^{pp.rr}_{Ab,Lk,mi,nj}\mathbb{Z}^{p}_{Lk}-\mathbb{B}^{pr.r}_{Ab,cd,nj}\mathbb{Z}^{rp,cd}_{mi,Lk}}{\mathbb{B}^{pp.0}_{Ab,Ab}}, \qquad (36a)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbb{Z}^{r}_{ab}=\frac{\mathbb{V}^{r}_{ab,ab}}{\mathbb{B}^{rr.0}_{ab,ab}},\quad \mathbb{Z}^{pr,ab}_{Mi,nj}=\frac{\mathbb{V}^{r.p}_{ab,Mi,nj}-\mathbb{B}^{rr.p}_{ab,nj,Mi}\mathbb{Z}^{r}_{nj}}{\mathbb{B}^{rr.0}_{ab,ab}},\\
\mathbb{Z}^{rp,ab}_{mi,Nj}=\frac{\mathbb{V}^{r.r}_{ab,Nj,mi}-\mathbb{B}^{pr.r}_{Nj,ab,mi}\mathbb{Z}^{p}_{Nj}}{\mathbb{B}^{rr.0}_{ab,ab}},\\
\mathbb{Z}^{ppr,ab}_{Mi,Nj,lk}=\frac{\mathbb{V}^{r.pp}_{ab,Mi,Nj,lk}-\mathbb{B}^{rr.pp}_{ab,lk,Mi,Nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk}-\sum_{cd}\mathbb{B}^{rr.p}_{ab,cd,Mi}\mathbb{Z}^{pr,cd}_{Nj,lk}}{\mathbb{B}^{rr.0}_{ab,ab}},
\end{gathered}$$

$$\mathbb{Z}^{rrr,ab}_{mi,nj,lk} = \frac{\mathbb{V}^{r.rr}_{ab,mi,nj,lk} - \mathbb{B}^{rr.rr}_{ab,lk,mi,nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk} - \sum_{Cd}\mathbb{B}^{pr.r}_{Cd,ab,nj}\mathbb{Z}^{rr,Cd}_{mi,lk}}{\mathbb{B}^{rr.0}_{ab,ab}},$$

$$\mathbb{Z}^{prp,ab}_{Mi,nj,Lk} = \Bigg(\mathbb{V}^{r.pr}_{ab,Lk,Mi,nj} - \mathbb{B}^{pr.pr}_{Lk,ab,Mi,nj}\mathbb{Z}^{p}_{Lk} - \sum_{Cd}\mathbb{B}^{pr.r}_{Cd,ab,nj}\mathbb{Z}^{pp,Cd}_{Mi,Lk}$$
$$- \sum_{cd}\mathbb{B}^{rr.p}_{ab,cd,Mi}\mathbb{Z}^{rp,cd}_{nj,Lk}\Bigg)\Bigg/\mathbb{B}^{rr.0}_{ab,ab}. \quad (36b)$$

А.4. Интегралы l_i

Представления вектора $\vec{l}$, входящего в динамические уравнения (12) в общем виде в криволинейной системе координат, имеют вид

$$l_1 = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{x_{20}}\int_{x_0}^{f^*(x_2,x_3,t)+x_{10}} x_1^3 x_2 dx_1 dx_2 dx_3,$$
$$l_2 = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{x_{20}}\int_{x_0}^{f^*(x_2,x_3,t)+x_{10}} x_1^3 x_2^2 \cos(x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3,$$
$$l_3 = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{x_{20}}\int_{x_0}^{f^*(x_2,x_3,t)+x_{10}} x_1^3 x_2^2 \sin(x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3. \quad (37)$$

Нас интересует представление относительно всех обобщенных координат

$$l_1 = \mathbf{l}^o + \sum_{Mi}\mathbf{l}^{opp}_{Mi,Mi}p^2_{Mi} + \sum_{mi}\mathbf{l}^{orr}_{mi,mi}r^2_{mi} + \sum_{MNLijk}\mathbf{l}^{oppp}_{Mi,Nj,Lk}p_{Mi}p_{Nj}p_{Lk} +$$
$$+ \sum_{Mnlijeo}\mathbf{l}^{oprr}_{Mi,nj,lk}p_{Mi}r_{nj}r_{lk} + \sum_{MNLKijeo}\mathbf{l}^{opppp}_{Mi,Nj,Le,Ko}p_{Mi}p_{Nj}p_{Le}p_{Ko} +$$
$$+ \sum_{MNlkijeo}\mathbf{l}^{opprr}_{Mi,Nj,le,ko}p_{Mi}p_{Nj}r_{le}r_{ko} + \sum_{mnlkijeo}\mathbf{l}^{orrrr}_{mi,nj,le,ko}r_{mi}r_{nj}r_{le}r_{ko}, \quad (38)$$

где коэффициенты $\mathbf{l}$ этого разложения имеют следующий вид

$$c_l = \frac{1 - x^2_{20}}{\pi x^4_{20}}, \quad \mathbf{l}^o = \tfrac{1}{4}\pi\rho\left(x^4_{10} - x^4_0\right)x^2_{20}, \quad \mathbf{l}^{opp}_{Mi,Mi} = \tfrac{1}{2}\rho x^2_{10}\Lambda^{cc}_{MM}\lambda_{Mi,Mi},$$
$$\mathbf{l}^{orr}_{mi,mi} = \tfrac{1}{2}\rho x^2_{10}\Lambda^{ss}_{mn}\lambda_{mi,mi}, \quad \mathbf{l}^{oppp}_{Mi,Nj,Lk} = \tfrac{2}{3}\rho x_{10}\Lambda^{ccc}_{MNL}\lambda_{Mi,Nj,Lk},$$
$$\mathbf{l}^{orrrr}_{mi,nj,le,ko} = \frac{\rho}{4}\Lambda^{ssss}_{mnlk}\lambda_{mi,nj,le,ko} + 3\rho c_l\delta_{mn}\delta_{lk}\delta_{ij}\delta_{eo}\Lambda^{ss}_{mn}\Lambda^{ss}_{lk}\lambda_{mi,nj}\lambda_{le,ko},$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{l}^{oprr}_{Mi,nj,lk} = 2\rho x_{10}\Lambda^{css}_{Mnl}\lambda_{Mi,nj,lk}, \quad \mathbf{l}^{opppp}_{Mi,Nj,Le,Ko} = \frac{\rho}{4}\Lambda^{cccc}_{MNLK}\lambda_{Mi,Nj,Le,Ko} + \\
&\quad + 3\rho c_l\delta_{MN}\delta_{LK}\delta_{ij}\delta_{eo}\Lambda^{cc}_{MN}\Lambda^{cc}_{LK}\lambda_{Mi,Nj}\lambda_{Le,Ko}, \quad \mathbf{l}^{opprr}_{Mi,Nj,le,ko} = \\
&= \tfrac{3}{2}\rho\Lambda^{ccss}_{MNlk}\lambda_{Mi,Nj,le,ko} + 6\rho c_l\delta_{MN}\delta_{lk}\delta_{ij}\delta_{eo}\Lambda^{cc}_{MN}\Lambda^{ss}_{lk}\lambda_{Mi,Nj}\lambda_{le,ko}.
\end{aligned} \tag{39}
$$

Производные компоненты l_1 по обобщенным координатам приобретают тогда следующий вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l_1}{\partial p_{Eh}} &= \bar{\mathbf{l}}^{opp}_{Eh,Eh}p_{Eh} + \sum_{MNij}\bar{\mathbf{l}}^{oppp}_{Eh,Mi,Nj}p_{Mi}p_{Nj} + \sum_{mnij}\bar{\mathbf{l}}^{oprr}_{Eh,mi,nj}r_{mi}r_{nj} + \\
&+ \sum_{MNLijk}\bar{\mathbf{l}}^{opppp}_{Eh,Mi,Nj,Lk}p_{Mi}p_{Nj}p_{Lk} + \sum_{Mnlijk}\bar{\mathbf{l}}^{opprr}_{Eh,Mi,nj,lk}p_{Mi}r_{nj}r_{lk},
\end{aligned} \tag{40a}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l_1}{\partial r_{eh}} &= \bar{\mathbf{l}}^{orr}_{eh,eh}r_{eh} + \sum_{Mnij}\bar{\mathbf{l}}^{oprr}_{Mi,nj,eh}p_{Mi}r_{nj} + \\
&+ \sum_{MNlijk}\bar{\mathbf{l}}^{opprr}_{Mi,Nj,lk,eh}p_{Mi}p_{Nj}r_{lk} + \sum_{mnlijk}\bar{\mathbf{l}}^{orrrr}_{mi,nj,lk,eh}r_{mi}r_{nj}r_{lk},
\end{aligned} \tag{40b}
$$

где коэффициенты $\bar{\mathbf{l}}$ выражаются через представления l_1 следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{l}}^{opp}_{Eh,Eh} = 2\mathbf{l}^{opp}_{Eh,Eh}, \quad \bar{\mathbf{l}}^{oppp}_{Eh,Mi,Nj} = 3\mathbf{l}^{oppp}_{Eh,Mi,Nj}, \quad \bar{\mathbf{l}}^{oprr}_{Eh,mi,nj} = \mathbf{l}^{oprr}_{Eh,mi,nj}, \\
&\quad \bar{\mathbf{l}}^{opppp}_{Eh,Mi,Nj,Lk} = 4\mathbf{l}^{opppp}_{Eh,Mi,Nj,Lk}, \quad \bar{\mathbf{l}}^{opprr}_{Eh,Mi,nj,lk} = 2\mathbf{l}^{opprr}_{Eh,Mi,nj,lk},
\end{aligned} \tag{41a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{l}}^{orr}_{eh,eh} = 2\mathbf{l}^{orr}_{eh,eh}, \quad \bar{\mathbf{l}}^{oprr}_{Mi,nj,eh} = 2\mathbf{l}^{oprr}_{Mi,nj,eh}, \\
&\quad \bar{\mathbf{l}}^{opprr}_{Mi,Nj,lk,eh} = 2\mathbf{l}^{opprr}_{Mi,Nj,lk,eh}, \quad \bar{\mathbf{l}}^{orrrr}_{mi,nj,lk,eh} = 4\mathbf{l}^{orrrr}_{mi,nj,lk,eh}.
\end{aligned} \tag{41b}
$$

Среди производных от оставшихся двух компонент l_2, l_3 из (37) в рамках теории третьего порядка малости ненулевыми останутся только компоненты

$$
\frac{\partial l_2}{\partial p_{1b}} = \frac{\partial l_3}{\partial r_{1b}} = \pi e_b, \quad e_b = \int_{x_0}^{x_{20}} x_2^2 f_{1b}(x_2)\,dx_2. \tag{42}
$$

A.5. Коэффициенты d, g и t модального уравнения (18)

Наиболее общие представления для коэффициентов $\mathbf{d}$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{t}$ в модальных уравнениях (18) приобретают следующий вид

$$
\mathbf{d}^{p,Eh}_{Mi} = \delta_{M,E}\delta_{i,h}\mathbb{V}^{p}_{Mi,Eh}\mathbb{Z}^{p}_{Mi}, \quad \mathbf{g}^{p,Eh}_{Mi} = \delta_{M,E}\delta_{i,h}\bar{\mathbf{l}}^{opp}_{Eh,Mi},
$$

$$\mathbf{g}^{pp,Eh}_{Mi,Nj} = \bar{\mathbf{I}}^{oppp}_{Eh,Mi,Nj}, \quad \mathbf{g}^{prr,Eh}_{Mi,nj,lk} = \bar{\mathbf{I}}^{opprr}_{Eh,Mi,nj,lk},$$
$$\mathbf{d}^{pp,Eh}_{Mi,Nj} = \mathbb{V}^{p.p}_{Nj,Eh,Mi}\mathbb{Z}^{p}_{Nj} + \sum_{Ab}\delta_{A,E}\delta_{b,h}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\mathbb{Z}^{pp,Ab}_{Mi,Nj},$$
$$\mathbf{d}^{rr,Eh}_{mi,nj} = \mathbb{V}^{r.r}_{nj,Eh,mi}\mathbb{Z}^{r}_{nj} + \sum_{Ab}\delta_{A,E}\delta_{b,h}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\mathbb{Z}^{rr,Ab}_{mi,nj},$$
$$\mathbf{t}^{pp,Eh}_{Mi,Nj} = \frac{1}{2}\mathbb{W}^{pp.p}_{Mi,Nj,Eh}\mathbb{Z}^{p}_{Mi}\mathbb{Z}^{p}_{Nj} + \sum_{Ab}\delta_{A,E}\delta_{b,h}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\mathbb{Z}^{pp,Ab}_{Mi,Nj},$$
$$\mathbf{t}^{rr,Eh}_{mi,nj} = \frac{1}{2}\mathbb{W}^{rr.p}_{mi,nj,Eh}\mathbb{Z}^{r}_{mi}\mathbb{Z}^{r}_{nj} + \sum_{Ab}\delta_{AE}\delta_{bh}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\mathbb{Z}^{rr,Ab}_{mi,nj},$$
$$\mathbf{d}^{ppp,Eh}_{Mi,Nj,Lk} = \mathbb{V}^{p.pp}_{Lk,Eh,Mi,Nj}\mathbb{Z}^{p}_{Lk} + \sum_{Ab}\mathbb{V}^{p.p}_{Ab,Eh,Mi}\mathbb{Z}^{pp,Ab}_{Nj,Lk}+$$
$$+\sum_{Ab}\delta_{AE}\delta_{bh}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\mathbb{Z}^{ppp,Ab}_{Mi,Nj,Lk}, \quad \mathbf{d}^{prr,Eh}_{Mi,nj,lk} = \mathbb{V}^{r.pr}_{lk,Eh,Mi,nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk}+$$
$$+\sum_{ab}\mathbb{V}^{r.r}_{ab,Eh,nj}\mathbb{Z}^{pr,ab}_{Mi,lk}+\sum_{Ab}\mathbb{V}^{p.p}_{Ab,Eh,Mi}\mathbb{Z}^{rr,Ab}_{nj,lk}+\sum_{Ab}\delta_{AE}\delta_{bh}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\mathbb{Z}^{prr,Ab}_{Mi,nj,lk}, \tag{43a}$$

$$\mathbf{g}^{rr,Eh}_{mi,nj} = \bar{\mathbf{I}}^{oprr}_{Eh,mi,nj}, \; \mathbf{d}^{rrp,Eh}_{mi,nj,Lk} = \mathbb{V}^{p.rr}_{Lk,Eh,mi,nj}\mathbb{Z}^{p}_{Lk}+\sum_{ab}\mathbb{V}^{r.r}_{ab,Eh,mi}\mathbb{Z}^{rp,ab}_{nj,Lk}+$$
$$+\sum_{Ab}\delta_{AE}\delta_{bh}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\mathbb{Z}^{rrp,Ab}_{mi,nj,Lk}, \quad \mathbf{t}^{ppp,Eh}_{Mi,Nj,Lk} = \frac{1}{2}\mathbb{W}^{pp.pp}_{Nj,Lk,Eh,Mi}\mathbb{Z}^{p}_{Nj}\mathbb{Z}^{p}_{Lk}+$$
$$+\sum_{Cd}\frac{1}{2}\left(\mathbb{W}^{pp.p}_{Cd,Nj,Eh} + \mathbb{W}^{pp.p}_{Nj,Cd,Eh}\right)\mathbb{Z}^{p}_{Nj}\mathbb{Z}^{pp,Cd}_{Mi,Lk} + \sum_{Ab}\mathbb{V}^{p.p}_{Ab,Eh,Mi}\mathbb{Z}^{pp,Ab}_{Nj,Lk}+$$
$$+\sum_{Ab}\delta_{AE}\delta_{bh}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\left(\mathbb{Z}^{ppp,Ab}_{Mi,Nj,Lk} + \mathbb{Z}^{ppp,Ab}_{Nj,Mi,Lk}\right); \; \mathbf{g}^{ppp,Eh}_{Mi,Nj,Lk} = \bar{\mathbf{I}}^{opppp}_{Eh,Mi,Nj,Lk},$$
$$\mathbf{t}^{prr,Eh}_{Mi,nj,lk} = \sum_{Ab}\mathbb{V}^{p.p}_{Ab,Eh,Mi}\mathbb{Z}^{rr,Ab}_{nj,lk} + \sum_{Ab}\delta_{AE}\delta_{bh}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\mathbb{Z}^{prr,Ab}_{Mi,nj,lk}+$$
$$+\frac{1}{2}\mathbb{W}^{rr.pp}_{nj,lk,Eh,Mi}\mathbb{Z}^{r}_{nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk} + \sum_{cd}\frac{1}{2}\left(\mathbb{W}^{rr.p}_{cd,lk,Eh} + \mathbb{W}^{rr.p}_{lk,cd,Eh}\right)\mathbb{Z}^{r}_{lk}\mathbb{Z}^{pr,cd}_{Mi,nj}, \tag{43b}$$

$$\mathbf{t}^{rpr,Eh}_{mi,Nj,lk} = \mathbb{W}^{pr.pr}_{Nj,lk,Eh,mi}\mathbb{Z}^{p}_{Nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk} + \sum_{Cd}\frac{1}{2}\left(\mathbb{W}^{pp.p}_{Cd,Nj,Eh} + \mathbb{W}^{pp.p}_{Nj,Cd,Eh}\right)\times$$

$$\times \mathbb{Z}^{p}_{Nj}\mathbb{Z}^{rr,Cd}_{mi,lk} + \sum_{cd} \frac{1}{2}\left(\mathbb{W}^{rr.p}_{cd,lk,Eh} + \mathbb{W}^{rr.p}_{lk,cd,Eh}\right)\mathbb{Z}^{r}_{lk}\mathbb{Z}^{rp,cd}_{mi,Nj} +$$
$$+ \sum_{ab} \mathbb{V}^{r.r}_{ab,Eh,mi}\left(\mathbb{Z}^{pr,ab}_{Nj,lk} + \mathbb{Z}^{rp,ab}_{lk,Nj}\right) +$$
$$+ \sum_{Ab} \delta_{AE}\delta_{bh}\mathbb{V}^{p}_{Ab,Eh}\left(\mathbb{Z}^{prr,Ab}_{Nj,mi,lk} + \mathbb{Z}^{rrp,Ab}_{mi,lk,Nj} + \mathbb{Z}^{rrp,Ab}_{lk,mi,Nj}\right), \quad (43c)$$

$$\mathbf{d}^{r,eh}_{mi} = \delta_{m,e}\delta_{i,h}\mathbb{V}^{r}_{mi,eh}\mathbb{Z}^{r}_{mi}, \quad \mathbf{g}^{r,eh}_{mi} = \delta_{m,e}\delta_{i,h}\bar{\mathbf{l}}^{orr}_{mi,eh}, \quad \mathbf{g}^{pr,eh}_{Mi,nj} = \bar{\mathbf{l}}^{oprr}_{Mi,nj,eh},$$
$$\mathbf{t}^{pr,eh}_{Mi,nj} = \mathbb{W}^{pr.r}_{eh}\mathbb{Z}^{p}_{Mi}\mathbb{Z}^{r}_{nj} + \sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\left(\mathbb{Z}^{pr,ab}_{Mi,nj} + \mathbb{Z}^{rp,ab}_{nj,Mi}\right),$$
$$\mathbf{g}^{ppr,eh}_{Mi,Nj,lk} = \bar{\mathbf{l}}^{opprr}_{Mi,Nj,lk,eh}, \quad \mathbf{d}^{pr,eh}_{Mi,nj} = \mathbb{V}^{r.p}_{nj,Mi,eh}\mathbb{Z}^{r}_{nj} + \sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\mathbb{Z}^{pr,ab}_{Mi,nj},$$
$$\mathbf{g}^{rrr,eh}_{mi,nj,lk} = \bar{\mathbf{l}}^{orrrr}_{mi,nj,lk,eh} \quad \mathbf{d}^{rp,eh}_{mi,Nj} = \mathbb{V}^{p.r}_{Nj,mi,eh}\mathbb{Z}^{p}_{Nj} + \sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\mathbb{Z}^{rp,ab}_{mi,Nj}, \quad (44a)$$

$$\mathbf{d}^{prp,eh}_{Mi,nj,Lk} = \mathbb{V}^{p.pr}_{Lk,Mi,nj,eh}\mathbb{Z}^{p}_{Lk} + \sum_{Ab}\mathbb{V}^{p.r}_{Ab,nj,eh}\mathbb{Z}^{pp,Ab}_{Mi,Lk} + \sum_{ab}\mathbb{V}^{r.p}_{ab,Mi,eh}\mathbb{Z}^{rp,ab}_{nj,Lk} +$$
$$+ \sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\mathbb{Z}^{prp,ab}_{Mi,nj,Lk}, \quad \mathbf{d}^{ppr,eh}_{Mi,Nj,lk} = \mathbb{V}^{r.pp}_{lk,Mi,Nj,eh}\mathbb{Z}^{r}_{lk} +$$
$$+ \sum_{ab}\mathbb{V}^{r.p}_{ab,Mi,eh}\mathbb{Z}^{pr,ab}_{Nj,lk} + \sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\mathbb{Z}^{ppr,ab}_{Mi,Nj,lk}, \quad \mathbf{d}^{rrr,eh}_{mi,nj,lk} =$$
$$= \mathbb{V}^{r.rr}_{lk,mi,nj,eh}\mathbb{Z}^{r}_{lk} + \sum_{Ab}\mathbb{V}^{p.r}_{Ab,mi,eh}\mathbb{Z}^{rr,Ab}_{nj,lk} + \sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\mathbb{Z}^{rrr,ab}_{mi,nj,lk},$$
$$\mathbf{t}^{rpp,eh}_{mi,Nj,Lk} = \frac{1}{2}\mathbb{W}^{pp.rr}_{Nj,Lk,mi,eh}\mathbb{Z}^{p}_{Nj}\mathbb{Z}^{p}_{Lk} + \sum_{Ab}\mathbb{V}^{p.r}_{Ab,mi,eh}\mathbb{Z}^{pp,Ab}_{Nj,Lk} +$$
$$+ \sum_{cd}\mathbb{W}^{pr.r}_{Nj,cd,eh}\mathbb{Z}^{rp,cd}_{mi,Lk}\mathbb{Z}^{p}_{Nj} + \sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\mathbb{Z}^{prp,ab}_{Nj,mi,Lk}, \quad (44b)$$

$$\mathbf{t}^{ppr,eh}_{Mi,Nj,lk} = \mathbb{W}^{pr.pr}_{Nj,lk,Mi,eh}\mathbb{Z}^{p}_{Nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk} + \sum_{cd}\mathbb{W}^{pr.r}_{Nj,cd,eh}\mathbb{Z}^{pr,cd}_{Mi,lk}\mathbb{Z}^{p}_{Nj} +$$
$$+ \sum_{Ab}\mathbb{W}^{pr.r}_{Ab,lk,eh}\mathbb{Z}^{pp,Ab}_{Mi,Nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk} + \sum_{ab}\mathbb{V}^{r.p}_{ab,Mi,eh}\left(\mathbb{Z}^{pr,ab}_{Nj,lk} + \mathbb{Z}^{rp,ab}_{lk,Nj}\right) +$$

$$+\sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\left(\mathbb{Z}^{ppr,ab}_{Mi,Nj,lk}+\mathbb{Z}^{ppr,ab}_{Nj,Mi,lk}+\mathbb{Z}^{prp,ab}_{Mi,lk,Nj}\right), \quad (44c)$$

$$\mathbf{t}^{rrr,eh}_{mi,nj,lk}=\frac{1}{2}\mathbb{W}^{rr.rr}_{nj,lk,mi,eh}\mathbb{Z}^{r}_{nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk}+\sum_{Ab}\mathbb{W}^{pr.r}_{Ab,lk,eh}\mathbb{Z}^{rr,Ab}_{mi,nj}\mathbb{Z}^{r}_{lk}+$$
$$+\sum_{Ab}\mathbb{V}^{p.r}_{Ab,mi,eh}\mathbb{Z}^{rr,Ab}_{nj,lk}+\sum_{ab}\delta_{ae}\delta_{bh}\mathbb{V}^{r}_{ab,eh}\left(\mathbb{Z}^{rrr,ab}_{mi,nj,lk}+\mathbb{Z}^{rrr,ab}_{nj,mi,lk}\right). \quad (44d)$$

B. Коэффициенты модальной системы (20)

Оставшиеся ненулевые коэффициенты системы (20) также упрощаются согласно следующим зависимостям

$$\mu^{p}_{0h}=\mathbf{d}^{p,1i}_{1i}=\mu^{r}_{0h}=\mathbf{d}^{r,li}_{1i},\ \sigma^{2}_{0h}=\mathbf{g}^{p,1i}_{1i}/\mathbf{d}^{p,1i}_{1i},\ \mathcal{G}_{0h}=\mathbf{g}^{pp,1i}_{11,11}=\mathbf{g}^{rr,1i}_{11,11},$$
$$d_{8,h}=\mathbf{t}^{pp.1i}_{11,11}=\mathbf{t}^{rr,1i}_{11,11},\quad d_{10,h}=\mathbf{d}^{pp,1i}_{11,11}=\mathbf{d}^{rr,1i}_{11,11}, \quad (45a)$$

$$\mu^{p}_{2h}=\mathbf{d}^{p,2h}_{2h}=\mu^{r}_{1k}=\mathbf{d}^{r,2h}_{2h},\quad \sigma^{2}_{2h}=\mathbf{g}^{p,2h}_{2h}/\mathbf{d}^{p,2h}_{2h}=\mathbf{g}^{r,2h}_{2h}/\mathbf{d}^{r,2h}_{2h},$$
$$\mathcal{G}_{4,h}=\mathbf{g}^{pp,2h}_{11,11}=-\mathbf{g}^{rr,2h}_{11,11}=\frac{1}{2}\mathbf{g}^{pr,2h}_{11,11},\quad d_{7,h}=\mathbf{t}^{pp,2h}_{11,11}=-\mathbf{t}^{rr,2h}_{11,11}=\frac{1}{2}\mathbf{t}^{pr,2h}_{11,11},$$
$$d_{9,h}=\mathbf{d}^{pp,2h}_{11,11}=-\mathbf{d}^{rr,2h}_{11,11}=\mathbf{d}^{pr,2h}_{11,11}=\mathbf{d}^{rp,2h}_{11,11}, \quad (45b)$$

$$\mu^{p}_{11}=\mathbf{d}^{p,11}_{11}=\mu^{r}_{1k}=\mathbf{d}^{r,11}_{11},\ \sigma^{2}_{11}=\mathbf{g}^{p,11}_{11}/\mathbf{d}^{p,11}_{11}=\mathbf{g}^{r,11}_{11}/\mathbf{d}^{r,11}_{11},$$
$$\mathcal{G}_{1}=\mathbf{g}^{ppp,11}_{11,11,11}=\mathbf{g}^{prr,11}_{11,11,11}=\mathbf{g}^{ppr,11}_{11,11,11}=\mathbf{g}^{rrr,11}_{11,11,11}, \quad (45c)$$

$$\mathcal{G}^{j}_{2}=\mathbf{g}^{pp,11}_{0j,11}+\mathbf{g}^{pp,11}_{11,0j}=\mathbf{g}^{pr,11}_{0j,11},\quad \mathcal{G}^{j}_{3}=\mathbf{g}^{pp,11}_{11,2j}+\mathbf{g}^{pp,11}_{2j,11}=$$
$$=\mathbf{g}^{rr,11}_{11,2j}+\mathbf{g}^{rr,11}_{2j,11}=\mathbf{g}^{pr,11}_{11,2j}=-\mathbf{g}^{pr,11}_{2j,11},\quad d_{1}=\mathbf{d}^{ppp,11}_{11,11,11}=\mathbf{d}^{prr,11}_{11,11,11}=$$
$$=\mathbf{t}^{ppp,11}_{11,11,11}=\mathbf{t}^{prr,11}_{11,11,11}=\mathbf{d}^{prp,11}_{11,11,11}=\mathbf{d}^{rrr,11}_{11,11,11}=\mathbf{t}^{rpp,11}_{11,11,11}=\mathbf{t}^{rrr,11}_{11,11,11}, \quad (45d)$$

$$d_{2}=\mathbf{d}^{rrp,11}_{11,11,11}=-\mathbf{d}^{prr,11}_{11,11,11}=\frac{1}{2}\mathbf{t}^{rpr,11}_{11,11,11}=-\frac{1}{2}\mathbf{t}^{prr,11}_{11,11,11}=\mathbf{d}^{ppr,11}_{11,11,11}=$$
$$=-\mathbf{d}^{prp,11}_{11,11,11}=\frac{1}{2}\mathbf{t}^{ppr,11}_{11,11,11}=-\frac{1}{2}\mathbf{t}^{rpp,11}_{11,11,11},\quad d^{j}_{3}=\mathbf{d}^{pp,11}_{2j,11}=\mathbf{d}^{rr,11}_{2j,11}=$$

$$= \mathbf{t}^{pp,11}_{2j,11} + \mathbf{t}^{pp,11}_{11,2j} = \mathbf{t}^{rr,11}_{2j,11} + \mathbf{t}^{rr,11}_{11,2j} = \mathbf{d}^{rp,11}_{2j,11} = -\mathbf{d}^{pr,11}_{2j,11} = \mathbf{t}^{pr,11}_{11,2j} =$$
$$= -\mathbf{t}^{pr,11}_{2j,11}, \quad d^j_4 = \mathbf{d}^{pp,11}_{11,2j} = \mathbf{d}^{rr,11}_{11,2j} = \mathbf{d}^{pr,11}_{11,2j} = -\mathbf{d}^{rp,11}_{11,2j}, \quad d^j_5 = \mathbf{d}^{pp,11}_{0j,11} =$$
$$= \mathbf{t}^{pp,11}_{0j,11} + \mathbf{t}^{pp,11}_{11,0j} = \mathbf{d}^{pr,11}_{0j,11,11} = \mathbf{t}^{pr}_{0j,11,11}, \quad d^j_6 = \mathbf{d}^{pp,11}_{11,0j} = \mathbf{d}^{rp,11}_{11,0j}, \quad (45e)$$

$$\mu^p_{3h} = \mathbf{d}^{p,3h}_{3h} = \mu^r_{3h} = \mathbf{d}^{r,3h}_{3h}, \ \sigma^2_{3h} = \mathbf{g}^{p,3h}_{3h}/\mathbf{d}^{p,3h}_{3h} = \mathbf{g}^{r,3h}_{3h}/\mathbf{d}^{r,3h}_{3h},$$
$$\mathcal{G}_{6,h} = \mathbf{g}^{ppp,3h}_{11,11,11} = -\frac{1}{3}\mathbf{g}^{prr,3h}_{11,11,11} = \frac{1}{3}\mathbf{g}^{ppr,3h}_{11,11,11} = -\mathbf{g}^{rrr,3h}_{11,11,11},$$
$$\mathcal{G}^j_{5,h} = \mathbf{g}^{pp,3h}_{11,2j} + \mathbf{g}^{pp,3h}_{2j,11} = -\mathbf{g}^{rr,3h}_{11,2j} - \mathbf{g}^{rr,3h}_{2j,11} = \mathbf{g}^{pr,3h}_{11,2j} = \mathbf{g}^{pr,3h}_{2j,11}, \quad (45f)$$

$$d_{11,h} = \mathbf{d}^{ppp,3h}_{11,11,11} = -\mathbf{d}^{rrp,3h}_{11,11,11} = -\frac{1}{2}\mathbf{d}^{prr,3h}_{11,11,11} = \mathbf{d}^{ppr,3h}_{11,11,11} = -\mathbf{d}^{rrr,3h}_{11,11,11} =$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{d}^{prp,3h}_{11,11,11}, \quad d_{12,h} = \mathbf{t}^{ppp}_{11,11,11} = -\mathbf{t}^{prr,3h}_{11,11,11} = -\frac{1}{2}\mathbf{t}^{rpr,3h}_{11,11,11} = \mathbf{t}^{rpp,3h}_{11,11,11} =$$
$$= -\mathbf{t}^{rrr,3h}_{11,11,11} = \frac{1}{2}\mathbf{t}^{ppr,3h}_{11,11,11}, \quad d^j_{13,h} = \mathbf{d}^{pp,3h}_{2j,11} = -\mathbf{d}^{rr,3h}_{2j,11} = \mathbf{d}^{rp,3h}_{2j,11} = \mathbf{d}^{pr,3h}_{2j,11}, \quad (45g)$$

$$d^j_{14,h} = \mathbf{d}^{pp,3h}_{11,2j} = -\mathbf{d}^{rr,3h}_{11,2j} = \mathbf{d}^{pr,3h}_{11,2j} = \mathbf{d}^{rp,3h}_{11,2j}, \quad d^j_{15,h} = \mathbf{t}^{pp,3h}_{2j,11} + \mathbf{t}^{pp,3h}_{11,2j} =$$
$$= -\mathbf{t}^{rr,3h}_{2j,11} - \mathbf{t}^{rr,3h}_{11,2j} = \mathbf{t}^{pr,3h}_{11,2j} = \mathbf{t}^{pr,3h}_{2j,11}, \quad (45h)$$

$$\mu^p_{1k} = \mathbf{d}^{p,1k}_{1k} = \mu^r_{1k} = \mathbf{d}^{r,1k}_{1k}, \sigma^2_{1k} = \mathbf{g}^{p,1k}_{1k}/\mathbf{d}^{p,1k}_{1k} = \mathbf{g}^{r,1k}_{1k}/\mathbf{d}^{r,1k}_{1k},$$
$$\mathcal{G}_{1k} = \mathbf{g}^{ppp,1k}_{11,11,11} = \mathbf{g}^{prr,1k}_{11,11,11} = \mathbf{g}^{ppr,1k}_{11,11,11} = \mathbf{g}^{rrr,1k}_{11,11,11},$$
$$\mathcal{G}^j_{2,k} = \mathbf{g}^{pp,1k}_{11,2j} + \mathbf{g}^{pp,1k}_{2j,11} = \mathbf{g}^{rr,1k}_{11,2j} + \mathbf{g}^{rr,1k}_{2j,11} = \mathbf{g}^{pr,1k}_{1k,11,2j} = -\mathbf{g}^{pr,1k}_{2j,11}, \quad (45i)$$

$$\mathcal{G}^j_{3,k} = \mathbf{g}^{pp,1k}_{0j,11} + \mathbf{g}^{pp,1k}_{11,0j} = \mathbf{g}^{pr}_{1k,0j,11}, \quad d^j_{16,k} = \mathbf{d}^{ppp,1k}_{11,11,11} = \mathbf{d}^{prr,1k}_{11,11,11} =$$
$$= \mathbf{d}^{prp,1k}_{11,11,11} = \mathbf{d}^{rrr,1k}_{11,11,11}, \quad d^j_{17,k} = \mathbf{d}^{rrp,1k}_{11,11,11} = -\mathbf{d}^{prr,1k}_{11,11,11} = \mathbf{d}^{ppr,1k}_{11,11,11} =$$
$$= -\mathbf{d}^{prp,1k}_{11,11,11}, \quad d^j_{18,k} = \mathbf{t}^{ppp,1k}_{11,11,11} = \mathbf{t}^{prr,1k}_{11,11,11} = \mathbf{t}^{rpp,1k}_{11,11,11} = \mathbf{t}^{rrr,1k}_{11,11,11}, \quad (45j)$$

$$d^j_{19,k} = \mathbf{t}^{rpr,1k}_{11,11,11} = -\mathbf{t}^{prr,1k}_{11,11,11} = \mathbf{t}^{ppr,1k}_{11,11,11} = -\mathbf{t}^{rpp,1k}_{11,11,11}, \quad d^j_{20,k} = \mathbf{d}^{pp,1k}_{2j,11} =$$

$$= \mathbf{d}_{2j,11}^{rr,1k} = \mathbf{d}_{2j,11}^{rp,1k} = -\mathbf{d}_{2j,11}^{pr,1k}, \quad d_{21k}^{j} = \mathbf{d}_{11,2j}^{pp,1k} = \mathbf{d}_{11,2j}^{rr,1k} = -\mathbf{d}_{11,2j}^{rp,1k} =$$
$$= \mathbf{d}_{11,2j}^{pr,1k}, \quad d_{22,k}^{j} = \mathbf{t}_{2j,11}^{pp,1k} + \mathbf{t}_{11,2j}^{pp,1k} = \mathbf{t}_{2j,11}^{rr,1k} + \mathbf{t}_{11,2j}^{rr,1k} = \mathbf{t}_{11,2j}^{pr,1k} = -\mathbf{t}_{2j,11}^{pr,1k}, \tag{45k}$$

$$d_{23,k}^{j} = \mathbf{d}_{0j,11}^{pp,1k} = \mathbf{d}_{0j,11}^{pr,1k}, \quad d_{24,k}^{j} = \mathbf{d}_{11,0j}^{pp,1k} = \mathbf{d}_{11,0j}^{rp,1k},$$
$$d_{25,k}^{j} = \mathbf{t}_{0j,11}^{pp,1k} + \mathbf{t}_{11,0j}^{pp,1k} = \mathbf{t}_{0j,11}^{pr,1k}. \tag{45l}$$

Выводы

В данной работе автор следует недавно предложенной схеме вывода модальных уравнений из работы [24] для обобщения собственных результатов [10], где построена малоразмерная нелинейная асимптотическая модальная система, описывающая резонансные колебания жидкости в усеченных конических баках. Такое обобщение стало возможным благодаря построенным ранее приближенно–аналитическим собственным формам колебания жидкости [9].

Выведено три системы нелинейных модальных уравнений. Первая — это общая нелинейная модальная система, связывающая обобщенные координаты и скорости (11) и (12) без учета порядка их малости. Она полностью совпадает с аналогичной системой из работы [10]. Вторая модальная система (18) — это общая асимптотическая система модальных уравнений, содержащая обобщенные координаты до третьего порядка малости. Структурно, она также совпадает с аналогичной системой из [10], однако формулы для подсчета ее гидродинамических коэффициентов существенно отличаются. Третья система — это полная в смысле асимптотики Моисеева–Нариманова (20) нелинейная модальная система третьего порядка малости. Она призвана описывать резонансные колебания жидкости при возбуждении основной собственной частоты. Анализ таких колебаний будет предметом дальнейших исследований автора.

[1] *Докучаев Л.В.* К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях // Прикл. матем. и мех. — 1964.— **28**, вып. 1. — С. 151–154.

[2] *Луковский И.А.* Нелинейные колебания жидкости в полостях сложной геометрии. — Киев: Наук. думка, 1975. – 232 с.

[3] *Луковский И.А.* Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объёма жидкости со свободной поверхностью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. — Москва: Волна, 1976. — С. 260–264.

[4] *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью — Киев: Наук. думка, 1990. — 296 с.

[5] *Луковский І.О.* До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках // Доп. НАН України. Механіка. — 2002. № 5. — С. 53–58.

[6] *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наук. думка, 2010. — 407 с.

[7] *Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости — Киев: Наук. думка, 1984. — 212 с.

[8] *Луковский И.А., Билык А.Н.* Вынужденные нелинейные колебания жидкости в подвижных осесимметричных конических полостях // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. — Киев: Ин-т матем. АН УССР. — 1985. — С. 12–26.

[9] *Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н.* Собственные частоты колебаний жидкости в усеченных конических баках // Акуст. вiсник. — 2006. **9**, № 3. — С. 18–34.

[10] *Луковский И.А., Солодун А.В., Тимоха А.Н.* Нелинейная асимптотическая модальная теория резонансных колебаний жидкости в срезанных конических баках // Акуст. вiсник. — 2011.– **14**, № 4. — С. 37–64.

[11] *Луковский И.А., Тимоха А.Н.* Вариационные методы в нелинейной динамике ограниченного объёма жидкости — Киев: Ин-т матем. НАНУ, 1995. — 400 с.

[12] *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненного жидкостью — Москва: Машиностроение, 1968. — 532 с.

[13] *Моисеев Н.Н.* К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости // Прикл. мат. мех. — 1958. — **22**. — С. 612–621.

[14] *Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.

[15] *Barnyak M., Gavriljuk I., Hermann M., Timokha A. N.* Analytical velocity potentials in cells with a rigid spherical wall // ZAMM. — 2011. — **91**, N 1. — P. 38–45.

[16] *Bauer H.F.* Sloshing in conical tanks // Acta Mechanica. — 1982. — **43**, N 3-4. — P. 185–200.

[17] *Bauer H.F., Eidel W.* Non–linear liquid motion in conical container// Acta Mechanica. — 1988. — **73**, N 1-4. — P. 11–31.

[18] *El Damatty A., Korol R.M., Tang L.M.* Analytcial and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks // Proc. World Conference of Earthquake Engineering, New Zeland, 2000.– Paper No. 966, Topic No. 7.

[19] *Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // J. Fluid Mech. — 2000. — **407**. — P. 201–234.

[20] *Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N.* Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin // Ibid. — 2003. — **487**. — P. 1–42.

[21] *Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N.* Classification of three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base tank with finite depth // J. Fluids and Struct. — 2005. — **20**. — P. 81–103.

[22] *Faltinsen O.M., Timokha A.N.* Sloshing. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. — 608 p.

[23] *Faltinsen O.M., Timokha A.N.* Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape // J. Fluid Mech. — 2012. — **703**, — P. 391–401.

[24] *Faltinsen O.M., Timokha A.N.* Multimodal analysis of weakly nonlinear sloshing in a spherical tank // Ibid.— 2013. — **719**, — P. 129–164.

[25] *Gavrilyuk, I., Lukovsky, I., Timokha A.* A multimodal approach to nonlinear sloshing in a circular cylindrical tank // Hybrid Methods in Engineering. — 2000. — **2**, Issue 4. — P. 463–483.

[26] *Gavrilyuk I., Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank // Fluid Dyn. Res. — 2005. — **37**. — P. 399–429.

[27] *Ibrahim R.* Liquid sloshing dynamics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. — 948 p.

[28] *Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Modal modeling of nonlinear fluid sloshing in tanks with non-vertical walls. Non-conformal mapping technique // Intern. J. Fluid Mech. Res. — 2002.— **29**, issue 2. — P. 216–242.

[29] *Lukovsky I.A.* Variational methods of solving dynamic problems for fluid-containing bodies // International Applied Mechanics. — 2004. — **40**, issue 10. — P. 1092–1128.

[30] *Lukovsky I.A., Ovchinnikov D.V., Timokha A.N.* Asymptotic nonlinear multimodal method for liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Part 1: Modal equations // Nonlinear Oscillations. — 2012. — **14**, N 4. — P. 512–525.

[31] *Miles J.W.* Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech. — 1976. — **75**. — P. 419–448.

[32] *La Rocca M., Scortino M., Boniforti M.* A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container // Fluid Dyn. Res. — 2000. — **27**. — P. 225–229.

[33] *Shrimali M.K., Jangid R.S.* Earthquake response of isolated elevated liquid storage steel tanks // J. Constr. Steel Res.— 2003. — **59**. — P. 1267–1288.