УДК 621.398.96

В. В. ОНИЩЕНКО,
Государственный университет телекоммуникаций, Киев

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДРОБНОЙ ДИНАМИКОЙ И ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрена игровая задача сближения с терминальным множеством для динамической системы, которая описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными и подвергается влиянию импульсов в фиксированные моменты времени. При помощи метода разрешающих функций получены достаточные условия сближения с терминальным множеством за конечное время.

Ключевые слова: дробная производная; игровая задача; многозначное отображение; импульс; функция Миттаг–Леффлера; телекоммуникационная сеть; передача данных; моделирование.

Введение

Опишем процессы в информационно-телекоммуникационных системах при помощи теории динамических игр.

Задача принятия решения о наиболее эффективном управляющем воздействии в теории информации формулируется таким образом: зная целевое состояние объекта управления, на основе его информационной модели определить такие входные параметры, которые с учетом предыстории и текущего состояния объекта управления, а также воздействия среды с максимальной эффективностью переведут его в целевое состояние, характеризуемое исходными параметрами.

Рассмотрим упрощенную ситуацию: информация о функционировании телекоммуникационной сети и двух ее компонентов поступает в систему управления. В результате обработки информации, поступающей в систему управления от объектов (элементов) управления, формируется обобщенная информационная модель состояния сети телекоммуникаций, на основе которой принимаются решения разного уровня и выполняются необходимые процедуры управления.

Процесс функционирования сети в каждый момент времени t характеризуется вектором переменных состояний $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$. Указанные переменные состояний являются случайными величинами со своими законами распределения $P(x_i)$. Управление сетью — процесс приведения переменных состояния сети за заданное время из начального состояния в установленное. Например, x_i — промежуток времени доставки информации между двумя узлами сети. Качество функционирования сети характеризуется средней задержкой сообщений, которая определяется средним значением задержки на всех узлах.

Каждую совокупность значений параметров информационной сети можно рассматривать как некоторое состояние сети. Попытаемся описать систему управления сетью при помощи модели динамической игры [2].

Вспомогательные результаты

В [4] была введена матричная обобщенная функция Миттаг–Леффлера

$$\mathrm{E}_{\rho,\mu}(\mathrm{B}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}^k}{\Gamma(k\rho+\mu)},$$

где $\rho > 0$, а B — это произвольная квадратная матрица порядка n.

Следует отметить, что функция $\mathrm{E}_{\rho,\mu}(\mathrm{B})$ обобщает матричную экспоненту, поскольку

$$\mathrm{E}_{1,1}(\mathrm{B}) = e^{\mathrm{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}^k}{k!}.$$

Матричная обобщенная функция Миттаг–Леффлера играет важную роль при изучении линейных систем дробного порядка.

Регуляризованная дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, определяется так:

$$\mathrm{D}_{t_0}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau.$$

Рассмотрим следующую систему дробного порядка в смысле Капуто:

$$\mathrm{D}_{t_0}^{(\alpha)} z = \mathrm{A}z + g, \ 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$z(t_0) = z_0. \tag{2}$$

Здесь $z \in R^n$; A — $n \times n$ матрица; $g:[t_0, \infty) \to R^n$— измеримая почти всюду ограниченная функция.

Следующая лемма [2] предоставляет аналитическое решение задачи Коши (1), (2).

Лемма 2. Решение задачи типа Коши (1), (2) имеет вид

$$z(t) = \mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}(t-t_0)^\alpha\right)z_0 + \int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\mathrm{A}(t-\tau)^\alpha\right)g(\tau)d\tau \qquad (3)$$

при условии, что интеграл в правой части сходится.

Системы дробного порядка с импульсным воздействием

Рассмотрим последовательность $\{\tau_k\}_0^\infty$, такую что $\tau_0 = t_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k = \infty$.

Пусть динамика системы дробного порядка α, $0 < \alpha < 1$, в смысле Капуто описывается системой уравнений

$$\mathrm{D}_{\tau_k}^{(\alpha)}z = \mathrm{A}z + g,\ \ t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (4)$$

с начальными условиями

$$z\,(t_0) = z_0. \qquad (5)$$

Предположим также, что в моменты τ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ справедливы следующие равенства:

$$\Delta z\big|_{t=\tau_k} = \mathrm{B}_k z + a_k, \qquad (6)$$

где B_k — квадратные матрицы порядка n; $a_k \in R^n$; $\Delta z\big|_{t=\tau_k} = z\left(\tau_k^+\right) - z(\tau_k)$.

Для $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ введем матричные функции $\mathrm{Z}_j\,(t)$:

$$\mathrm{Z}_j(t) = \begin{cases} \mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}(t-\tau_i)^\alpha\right), \text{ если } j = i; \\ \mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}(t-\tau_i)^\alpha\right)\prod\limits_{k=i-1}^{j}(\mathrm{B}_{k+1} + \mathrm{I})\,\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}(\tau_{k+1}-\tau_k)^\alpha\right), \text{ если } \ j < 1. \end{cases}$$

Будем полагать, что $\mathrm{B}_0 = 0$.

Можно показать, что $\mathrm{Z}_0(t)$ является решением следующей задачи Коши для матричного однородного уравнения:

$$D_{\tau_k}^{(\alpha)}\mathrm{Z} = \mathrm{AZ},\ t \in (\tau_k, \tau_{k+1}],\ \ \Delta\mathrm{Z}\big|_{t=\tau_k} = \mathrm{B}_k\mathrm{Z},\ \ \mathrm{Z}(t_0) = \mathrm{I}.$$

Теорема 1. Траектория системы, описываемой на интервалах $(\tau_k, \tau_{k+1}]$ уравнением (4) с начальным условием (5) и удовлетворяющей равенствам (6) в моменты $t = \tau_k$, имеет вид

$$z(t) = \mathrm{Z}_0(t)z_0 + \sum_{j=1}^{k}\mathrm{Z}_j(t)a_j + \sum_{j=1}^{k}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}(\tau_j-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{Z}_j(t)(\mathrm{B}_j + \mathrm{I})\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\mathrm{A}(\tau_j-\tau)^\alpha\right)g(\tau)d\tau +$$
$$+ \int_{\tau_k}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\mathrm{A}(t-\tau)^\alpha\right)g(\tau)d\tau,\ \ t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \qquad (7)$$

Доказательство. Легко видеть, что матричные функции $\mathrm{Z}_j\,(t)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\mathrm{Z}_j(t) = \mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}(t-\tau_i)^\alpha\right)(\mathrm{B}_i + \mathrm{I})\,\mathrm{Z}_j(\tau_i),\ \text{ если } i > j,$$
$$\mathrm{Z}_j(t) = \mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}(t-\tau_i)^\alpha\right),\ \text{ если } \ i = j,$$

где $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Воспользовавшись этими соотношениями, можно получить представление (7) из формулы (3) методом математической индукции.

Метод разрешающих функций для дифференциальных игр дробного порядка с импульсным воздействием

Рассмотрим следующую динамическую игру.

Пусть динамика системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_{\tau_k}^{(\alpha)}z = \mathrm{A}z + u - \upsilon,\ \ t \in (\tau_k, \tau_{k+1}],\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, \\ &\Delta z\big|_{t=\tau_k} = \mathrm{B}_k z + a_k, \end{aligned} \qquad (8)$$

где управления игроков $u(\tau)$, $u : R_+ \to U$, и $\upsilon(\tau)$, $\upsilon : R_+ \to V$, являются измеримыми функциями времени, принимающими значения из непустых компактов соответственно U и V.

Кроме системы (8) задано цилиндрическое терминальное множество M^*, т. е. узел, куда необходимо направить информационный поток вида

$$M^* = M_0 + M, \qquad (9)$$

где M_0 — линейное подпространство в R^n; M — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M_0 в R^n.

Цель системы управления — направить первый информационный поток в соответствующий узел сети, несмотря на помехи второго потока.

Цели первого u и второго v игроков противоположны. Первый пытается вывести траекторию системы (8) на терминальное множество в кратчайшее время, в то время как второй старается максимально оттянуть момент выхода траектории на множество M^* или вообще избежать этого.

Примем сторону первого игрока и будем полагать, что оппонент выбирает в качестве своего управления произвольную измеримую функцию со значениями в V. Предположим также, что первый игрок выбирает свое управление в каждый момент t, располагая информацией о начальном положении z_0 и текущем значении $v(t)$:

$$u(t) = u(z_0, v(t)), \; u(t) \in U. \qquad (10)$$

Таким образом, $u(t)$ представляет собой контруправление Н. Н. Красовского [12].

Если игроками выбраны допустимые управления $u(\tau)$, $v(\tau)$, то, согласно теореме 1, решение задачи типа Коши (8) дано формулой

$$z(t) = \mathrm{Z}_0(t) z_0 + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Z}_j(t) a_j + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\left[u(\tau) - v(\tau)\right] d\tau, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \qquad (11)$$

где

$$\Phi(t,\tau) = \begin{cases} (\tau_j - \tau)^{\alpha-1} \mathrm{Z}_j(t) \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\mathrm{A}(\tau_j - \tau)^{\alpha}\right)(\mathrm{B}_j + \mathrm{I}), & \text{если } \tau \in [\tau_{j-1} - \tau_j), \quad j \le k, \\ (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\mathrm{A}(t-\tau)^{\alpha}\right), & \text{если } \tau \in [\tau_k, t). \end{cases}$$

Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n на L. Пусть $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$W(t,\tau,v) = \pi\Phi(t,\tau)(U - v),$$
$$W(t,\tau) = \bigcap W(t,\tau,v) = \pi\Phi(t,\tau)U^* - \pi\Phi(t,\tau)V.$$

Условие 1 (Понтрягина). Многозначное отображение $W(t,\tau)$ принимает непустые значения для всех $t_0 \le \tau < t$.

Учитывая свойства матричных функций Миттаг–Леффлера и $\mathrm{Z}_j(t)$, можно заключить, что для любого фиксированного $t > t_0$ отображение $W(t,\tau,v)$ измеримо по τ на интервале $[t_0, t]$ и замкнутозначно по v, $v \in V$. В таком случае [13] отображение $W(t,\tau)$ является замкнутозначным и измеримым по $\tau \in [t_0, t]$.

Из условия Понтрягина и теоремы об измеримом выборе [13] следует, что для любого $t \ge t_0$ существует по крайней мере один селектор $\gamma(t,\tau)$, измеримый по τ и такой, что $\gamma(t,\tau) \in W(t,\tau)$, $t_0 \le \tau < t$. Согласно сделанным предположениям, $\gamma(t,\tau)$ суммируем по τ, $\tau \in [t_0, t]$, для любого $t > t_0$. Зафиксируем некоторый селектор $\gamma(t,\tau)$ и введем функцию

$$\xi(t) = \pi\mathrm{Z}_0(t) z_0 + \sum_{j=1}^{k} \pi\mathrm{Z}_j(t) a_j + \int_{t_0}^{t} \gamma(t,\tau) d\tau.$$

Рассмотрим многозначное отображение $\mathfrak{R}(t,\tau,v) = \{\rho \ge 0 : [W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)] \cap \rho[M - \xi(t)] \ne \varnothing\}$, и его опорную функцию в направлении +1: $\rho(t,\tau,v) = \sup\{\rho : \rho \in \mathfrak{R}(t,\tau,v)\}$, $t_0 \le \tau \le t$, $v \in V$. Эту функцию принято называть разрешающей [12]. В силу условия Понтрягина, многозначное отображение $\mathfrak{R}(t,\tau,v)$ замкнуто и непустозначно.

Необходимо отметить, что если $\xi(t) \in M$, то $\mathfrak{R}(t,\tau,v) = [0,\infty)$ и, следовательно, $\rho(t,\tau,v) = \infty$ для всех $t_0 \le \tau < t$ и $v \in V$.

Принимая во внимание свойства параметров системы (8), (9) и применяя теоремы о характеризации и обратном образе [13], можно показать, что многозначное отображение $\mathfrak{R}(t,\tau,v)$ является $L \times B$-измеримым [10; 13] по τ, v, $\tau \in [t_0, t]$, $v \in V$. Если $\xi(t) \notin M$, то разрешающая функция $\rho(t,\tau,v)$ также является $L \times B$-измеримой по τ, v, в силу теоремы об опорной функции [13].

Обозначим

$$\mathfrak{T} = \left\{ t \ge t_0 : \int_{t_0}^{t} \inf_{v \in V} \rho(t,\tau,v) d\tau \ge 1 \right\}. \qquad (12)$$

Если для некоторого $t \ge t_0$ имеет место $\xi(t) \notin M$, то будем полагать, что функция $\inf_{v \in V} \rho(t, \tau, v)$ измерима по τ, $\tau \in [t_0, t]$. В противном случае определим множество $\mathfrak{T}$ следующим образом:

$$\mathfrak{T} = \left\{ t \ge t_0 : \inf_{v(\cdot) \in \Omega_V} \int_{t_0}^{t} \rho(t, \tau, v(\tau)) d\tau \ge 1 \right\},$$

где Ω_V обозначает множество всех измеримых функций, принимающих значения в V.

Поскольку функция $\rho(t, \tau, v)$ $L \times B$-измерима по τ, v, то она суперпозиционно измерима [10; 13]. Если $\xi(t) \in M$, то $\rho(t, \tau, v) = +\infty$ для $\tau \in [t_0, t]$ и в этом случае естественно положить значение интеграла в фигурных скобках равным $+\infty$. Тогда неравенство в (12) выполнено автоматически.

Пусть $T \in \mathfrak{T} \neq \varnothing$.

Условие 2. Отображение $\mathfrak{R}(T, \tau, v)$ выпуклозначно для всех $\tau \in [t_0, T]$, $v \in V$.

Теорема 2. Пусть для игровой задачи (8), (9) выполнено условие Понтрягина, а множество M выпукло. Если существует конечное число T, $T \in \mathfrak{T} \neq \varnothing$, такое что выполнено условие 2, то траектория системы (8) может быть выведена на терминальное множество (9) из начального положения z_0 в момент T при помощи управления вида (10).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v : [t_0, T] \to V$, — произвольная измеримая функция. Рассмотрим вначале случай, когда $\xi(T) \notin M$. Обозначим $K = \max\{k \in \mathfrak{T} : \tau_k < T\}$, $\rho(T) = \int_{t_0}^{T} \inf_{v \in V} \rho(T, \tau, v) d\tau$ и положим

$$\rho^*(T, \tau) = \frac{1}{\rho(T)} \inf_{v \in V} \rho(T, \tau, v).$$

Поскольку $\rho(T) \ge 1$ в силу (17) и условие 2 выполнено, то функция $\rho^*(T, \tau)$, $0 \le \rho^*(T, \tau) \le \rho(T, \tau, v)$, $\tau \in [t_0, T]$, $v \in V$, является измеримым селектором многозначного отображения $\mathfrak{R}(T, \tau, v)$, $v \in V$, т. е. $\rho^*(T, \tau) \in \mathfrak{R}(T, \tau, v)$, $\tau \in [t_0, T]$, $v \in V$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau, v) = \left\{ u \in U : \pi\Phi(T, \tau)(u - v) - \gamma(T, \tau) \in \rho^*(T, \tau)[M - \xi(T)] \right\}. \quad (13)$$

Поскольку функция $\rho^*(T, \tau)$ измерима в силу сделанных предположений, $M \in K(R^n)$, а функция $\xi(T)$ ограничена, то, следовательно, отображение $\rho^*(T, \tau)[M - \xi(T)]$ измеримо по τ. Кроме того, левая часть включения в (13) является $L \times B$-измеримой по (τ, v) и непрерывной по u. Следовательно, отображение $U(\tau, v)$ является $L \times B$-измеримым. Таким образом, в силу теоремы об измеримом выборе, оно содержит $L \times B$-измеримый селектор $u(\tau, v)$, который, в свою очередь, является суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление первого игрока равным $u(\tau) = u(\tau, v, (\tau))$, $\tau \in [t_0, T]$.

В случае, если $\xi(T) \in M(T)$, будем формировать управление первого игрока следующим образом. Положим $\rho^*(T, \tau) \equiv 0$ в (13) и обозначим $U_0(\tau, v)$ многозначное отображение, полученное таким образом из $U(\tau, v)$. Выберем управление первого игрока в виде $u_0(\tau) = u_0(\tau, v, (\tau))$, $\tau \in [0, T]$, где $u_0(\tau, v)$ — измеримый селектор отображения $U_0(\tau, v)$.

Покажем, что в каждом из рассмотренных случаев траектория системы (8) попадает на терминальное множество в момент T.

Согласно (11), имеем

$$\pi z(T) = \pi Z_0(T) z_0 + \sum_{j=1}^{K} \pi Z_j(T) a_j + \int_{t_0}^{T} \pi\Phi(T, \tau)[u(\tau) - v(\tau)] d\tau. \quad (14)$$

Рассмотрим случай $\xi(T) \notin M$. Прибавим и вычтем из левой части выражения (14) вектор

$$\int_{t_0}^{T} \gamma(T, \tau) d\tau. \quad (15)$$

Принимая во внимание закон выбора управления первым игроком, получаем из (14) следующее включение:

$$\pi z(T) \in \xi(T)\left[1 - \int_{t_0}^{T} \rho^*(T, \tau) d\tau\right] + \int_{t_0}^{T} \rho^*(T, \tau) M d\tau.$$

Поскольку M — выпуклое компактное множество, $\rho^*(T, \tau)$ — неотрицательная функция и $\int_{t_0}^{T} \rho^*(T, \tau) d\tau = 1$, то, следовательно, $\int_{t_0}^{T} \rho^*(T, \tau) M d\tau = M$, откуда получаем, что $\pi z(T) \in M$.

Предположим теперь, что $\xi(T) \in M$. Прибавляя и вычитая вектор (15) из правой части (14) и принимая во внимание правило выбора управления первым игроком, получаем $\pi z(T) = \xi(T) \in M$.

Выводы

Внедрение новых технологий, возрастание объема услуг — все это приводит к соответствующему увеличению объема информации управления, которая циркулирует в сети и может быть источником ее значительной загрузки. Таким образом, решение задачи минимизации объемов информации управления приобретает большое значение. Случай двух информационных потоков в дальнейшем планируется расширить на *n* и смоделировать соответствующие процессы.

Литература

1. **Самко, С. Г.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев.— Минск: Наука и техника, 1987.— 688 с.*

2. **Kilbas, A. A.** *Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo.— Amsterdam: Elsevier, 2006.— 523 p.*

3. **Chikrii, A. A.** *Dynamic game problems of approach for fractional-order equations / A. A. Chikrii, S. D. Eidelman // Ukrainian Mathematical Journal.— 2000.— 52, № 11.— P. 1787–1806.*

4. **Chikrii, A. A.** *Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order / A. A. Chikrii, S. D. Eidelman // Cybernetics and Systems Analysis.— 2000.— 36, № 3. — P. 315–338.*

5. **Чикрий, А. А.** *Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана — Лиувилля / А. А. Чикрий, С. Д. Эйдельман // Кибернетика и системный анализ.— 2001.— № 6.— С. 66–99.*

6. **Чикрий, А. А.** *Представление решений линейных систем с дробными производными Римана — Лиувилля, Капуто и Миллера–Росса / А. А. Чикрий, И. И. Матичин // Проблемы управления и информатики.— 2008.— № 3.— С. 133–142.*

7. **Самойленко, А. М.** *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк.— К.: Вища шк. 1987.— 288 с.*

8. **Кривонос, Ю. Г.** *Динамические игры с разрывными траекториями / Ю. Г. Кривонос, И. И. Матичин, А. А. Чикрий.— К.: Наук. думка, 2005.— 220 с.*

9. **Чикрий, А. А.** *Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов / А. А. Чикрий, К. Г. Дзюбенко // Проблемы управления и информатики.— 1997.— № 1.— С. 92–107.*

10. **Chikrii, A. A.** *Multivalued mappings and their selectors in the theory of conflict-controlled processes / A. A. Chikrii, J. S. Rappoport, K. A. Chikrii // Cybernetics and Systems Analysis.— 2007.— 43, № 5.— P. 719–730.*

11. **Чикрий, А. А.** *О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями / А. А. Чикрий, А. А. Белоусов // Труды института математики и механики УрО РАН.— 2009.— 15, № 4.— С. 290–301.*

12. **Chikrii, A. A.** *Conflict-controlled processes / A. A. Chikrii.— Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1997.— 424 p.*

13. **Aubin, J.-P.** *Set-valued analysis / J.-P. Aubin, H. Frankowska.— Boston: Birkhäuser, 1990.— 461 p.*

Рецензент: доктор техн. наук, профессор **Л. Ф. Купченко**, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.

В. В. Онищенко

ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ З ДРОБОВОЮ ДИНАМІКОЮ ТА ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Розглянуто ігрову задачу зближення з термінальною множиною для динамічної системи, описуваної дифференціальними рівняннями з дробовими похідними, яка зазнає впливу імпульсів у фіксовані моменти часу. За допомогою методу розв'язувальних функцій виведено достатні умови зближення з термінальною множиною за скінченний час.

Ключові слова: дробова похідна; ігрова задача; многозначне відображення; імпульс; функція Міттаг–Леффлера; телекомунікаційна мережа; передавання даних; моделювання.

V. V. Onyshchenko

DYNAMICAL SYSTEMS WITH FRACTIONAL DYNAMICS AND IMPULSE IMPACT

In the article game-theoretical problem of approaching a terminal set is considered for dynamical system described by differential equations with fractional derivatives and under impulse impact at fixed time instants. Sufficient conditions for approaching the terminal set in a finite time are obtained using method of resolving functions.

Keywords: fractional derivative; game-theoretical problem; multivalued map; impulse; Mittag–Leffler function; telecommunication network; data transfer; modeling.