УДК 539.4

Овчинников И.И., к.т.н., доцент**, Мигунов В.Н.** к.т.н., доцент

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛАСТИНЫ В ХЛОРИДСОДЕРЖАЩЕЙ СРЕДЕ. СООБЩЕНИЕ 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ.

Армированная прямоугольная пластина является расчетной схемой для многих плоских конструктивных элементов, находящих широкое применение в промышленном, гражданском и транспортном строительстве.

В нормативных документах различных стран пока еще отсутствуют достаточно надежные правила определения срока службы эксплуатируемых конструкций. Поэтому необходимо разрабатывать модели и методы для прогнозирования напряженно-деформированного состояния и количественного определения срока службы армированных конструкций. При этом в дополнение к предельным состояниям конструкций при действии нагрузок добавляются предельные состояния по долговечности при действии агрессивных эксплуатационных сред.

Ниже рассматривается подход к моделированию кинетики изменения напряженно - деформированного состояния прямоугольной железобетонной пластины, подвергающейся совместному действию нагрузки и хлоридсодержащей среды.

При построении модели пластины в условиях воздействия хлоридсодержащей среды применяется феноменологический подход, основывающийся на рассмотрении армированного материала как неоднородной среды с использованием методологии строительной механики. Согласно этому подходу, обобщенная модель деформирования пластины с учетом ее взаимодействия с агрессивной средой, представляется в виде совокупности моделей: 1) модели конструктивного элемента; 2) модели нагружения; 3) модели деформирования материалов пластины; 4) модели воздействия агрессивной хлоридсодержащей среды; 5) модели разрушения материала, трактуемого как процесс накопления повреждений.

Модель конструктивного элемента. В качестве модели конструктивного элемента рассматривается модель пластины по технической теории изгиба с учетом соответствующих гипотез.

Уравнения, описывающие равновесие пластины в усилиях имеют вид:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p\,. \qquad (1)$$

Здесь M_x, M_y– изгибающие моменты, H – крутящий момент, p – интенсивность внешней нагрузки.

Модель нагружения. Схема и программа нагружения пластины будет зависеть от того, моделью какого конструктивного элемента является рассматриваемая пластина.

Модель деформирования материала пластины, находящейся в плоском напряженном состоянии и подвергающейся воздействию хлоридсодержащей среды. При выводе физических соотношений будем учитывать, что наличие армирующих элементов и характерные свойства бетона придают материалу пластины анизотропные свойства. Армированный бетон является ортотропным материалом, неодинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию, причем бетон и арматура имеют близкие коэффициенты расширения, но бетон имеет отличающиеся диаграммы деформирования при растяжении и сжатии. Это позволяет использовать для описания поведения армированного бетона составную модель ортотропного нелинейного разномодульного материала. Основные соотношения, описывающие поведение элемента пластины в условиях плоского напряженного состояния, будут складываться из физических соотношений для бетона, работающего в условиях плоского напряженного состояния, и физических соотношений для арматуры, которая работает в условиях одноосного напряженного состояния для каждого направления армирования. Влияние эффекта времени на процесс деформирования учитывается путем введения параметра поврежденности в физические соотношения и конструированием специальных уравнений накопления повреждения для этого параметра.

1) Физические соотношения для бетона принимаются в виде [1]:

$$\sigma_x^b = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left(e_x + \nu_j e_y\right); \quad \sigma_y^b = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left(e_y + \nu_j e_x\right); \quad \tau_{xy}^b = \frac{\Psi_j}{2\left(1+\nu_j\right)} e_{xy}. \qquad (2)$$

где ν_j– коэффициент поперечной деформации, j = 1,2; $\sigma_x^b, \sigma_x^b, \tau_{xy}^b$ - компоненты тензора напряжений, e_x, e_y, e_{xy} - то же, деформаций, причем:

$$e_x = \varepsilon_x + \chi_x z; \quad e_y = \varepsilon_y + \chi_y z; \quad e_{xy} = \varepsilon_{xy} + 2\chi_{xy} z;$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \tag{3}$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

В этих формулах ε_x, ε_y, ε_{xy} - деформации точек срединной поверхности; χ_x, χ_y, χ_{xy}- кривизны в этих точках, z– координаты рассматриваемых точек, отсчитываемые от срединной плоскости, u, v, w– перемещения в направлении осей x, y, z.

Принимается, что любая точка пластины находится в растянутом состоянии ($j=1$), если $\sigma_0 \geq 0$, и в сжатом состоянии ($j=2$), если $\sigma_0 < 0$. Здесь σ_0– среднее напряжение, определяемое выражением:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \tag{4}$$

Функция Ψ_j имеет вид:

$$\Psi_j = \frac{\Phi_j(e_u, C, \Pi)}{e_u}, \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

где Φ_j– функции, аппроксимирующие обобщенную кривую деформирования бетона $\sigma_u^b(e_u)$ при растяжении $(j=1)$ и при сжатии $(j=2)$; σ_u^b – интенсивность напряжений; e_u – интенсивность деформаций. Влияние концентрации хлоридсодержащей среды C и уровня поврежденности Π учитывается при задании выражений для Φ_j.

2) Физические соотношения для арматуры имеют в вид:

а) для направления x: $\sigma_x = f_x(e_x)$; (6)

б) для направления y: $\sigma_y = f_y(e_y)$. (7)

Здесь f_x– функция, аппроксимирующая диаграмму деформирования стержневой арматуры, уложенной в направлении x, а f_y– в направлении y.

Модель воздействия агрессивной хлоридсодержащей среды. Процесс взаимодействия хлоридсодержащей среды с армированной пластиной состоит из нескольких стадий: проникание среды в объем пластины; взаимодействие её с материалом, приводящее к изменению механических характеристик бетона и коррозии арматуры; деформирование и разрушение с учетом происходящего процесса деградации. На стадии проникания среды формируется закон распределения агрессивной среды по объему пластины, определяющий затем характер неоднородности бетона и интенсивность коррозии арматуры.

Модель проникания хлоридсодержащей среды. Кинетика проникания хлоридсодержащей среды в пластину описывается с помощью уравнения диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = div\left(D \cdot gradC\right) - g\left(C\right), \tag{8}$$

где t – время; D – коэффициент диффузии; $g(C)$ – скорость связывания проникшей среды.

Для нахождения распределения концентрации хлоридсодержащей среды C по объему пластины в любой момент времени нужно решить это уравнение с начальными и граничными условиями, соответствующими рассматриваемой задаче.

Модель воздействия хлоридсодержащей среды на бетон. Полагая, что бетон является нелинейным разносопротивляющимся материалом, зависимость $\sigma_u^в\left(e_u, C\right)$ запишем в виде:

$$\sigma_u^b = [A_j^b(C) \cdot e_u - B_j^b(C) \cdot e_u^{m_j(C)}]/(1 + \lambda\Pi), \tag{9}$$

где $A_j^b(C)$, $B_j^b(C)$, $m_j(C)$– функции, учитывающие влияние концентрации хлоридсодержащей среды C на деформирование бетона при растяжении $(j=1)$ и сжатии $(j=2)$, а функция $(1 + \lambda\Pi)$ учитывает влияние уровня поврежденности Πна деформирование бетона. Включение функции поврежденности Π в физические соотношения для бетона (9) позволяет отразить влияние ползучести бетона на процесс его деформирования через изменение диаграммы деформирования с течением времени под влиянием поврежденности.

Модель воздействия хлоридсодержащей среды на арматуру. Так как под влиянием хлоридсодержащей среды изменения механических свойств арматуры практически не происходит, а происходит коррозионное разрушение, вызывающее изменение площади сечения арматуры, то зависимость между напряжениями и деформациями в арматуре примем в виде диаграммы Прандтля:

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot e, & \sigma < \sigma_T, \\ \sigma_T, & \sigma \geq \sigma_T \end{cases} \qquad (10)$$

где E – модуль упругости; σ_T – предел текучести.

Процесс коррозионного разрушения арматуры состоит из двух стадий: инкубационного периода t_u, в течение которого концентрация хлоридов в точке расположения арматурного стержня изменяется от начального до критического значения C_{KP} и стадии интенсивного коррозионного разрушения, в течение которой происходит коррозионный (чаще всего локальный) износ арматуры.

Кинетику коррозионного износа арматуры можно описывать с различных моделей. Полагаем, что коррозионный износ описывается функцией:

$$\delta = \begin{cases} 0, & t < t_u, \\ (\delta_K \cdot t)/(t+T), & t \geq t_u \end{cases}, \qquad (11)$$

где δ_K – предельная глубина коррозии; T – параметр.

Полагая, что коррозионный износ арматурного стержня круглого сечения с начальным диаметром d_0 происходит по хорде, площадь его сечения с учетом коррозионного поражения запишем в виде:

$$F(t) = \begin{cases} (\pi \cdot d_0^2)/4, & t < t_u, \\ (\pi \cdot d_0^2)/4 - d_0^2 \cdot (S - \sin S)/8, & t \geq t_u, \end{cases} \qquad (12)$$

где $S = 2\arccos(1 - (2 \cdot \delta / d_0))$.

Модель разрушения материала. В подавляющем большинстве случаев разрушения армированных конструкций начинается с разрушения матрицы, то есть в случае железобетона – с разрушения бетонной части конструкций. Поэтому при моделировании разрушения армированной пластины будем рассматривать процесс разрушения бетона. Причем процесс разрушения бетона будем рассматривать как процесс накопления дисперсных повреждений, распределенных по объему конструктивного элемента. Уровень поврежденности оцениваем с помощью параметра поврежденности *П*, равного нулю в начальном неповрежденном состоянии материала и равного единице в момент разрушения. Скорость изменения параметра *П* полагаем зависящей от интенсивности напряжений σ_u^b, вида напряженного состояния, концентрации хлоридсодержащей среды C и достигнутого значения поврежденности *П*. В результате уравнение накопления повреждений принимаем в виде:

$$d\Pi/dt = a_j(C)\,[\sigma^b_u/(1-\Pi)]^{в_j(C)}, \quad \Pi(0)=0, \Pi(t_p)=1, \quad j = 1, 2, \qquad (13)$$

где t_p– время до разрушения точки пластины, в которой поврежденность достигает предельного уровня $\Pi = 1$, $a_j(C)$ и $в_j(C)$ – коэффициенты уравнения накопления повреждений, зависящие от концентрации агрессивной среды C в точке пластины и от вида напряженного состояния в этой точке.

Здесь также принимается, что точка пластины находится в растянутом состоянии ($j=1$), если $\sigma_0 \geq 0$, и в сжатом состоянии ($j=2$), если $\sigma_0 < 0$.

Если предположить, что локальное разрушение пластины (в точке) можно отождествить с разрушением всей пластины, то тогда t_pможно принять за время до разрушения пластины в агрессивной среде.

Физические соотношения для усилий и деформаций, возникающих в железобетонной пластине. Полагаем, что усилия в сечениях пластинки складываются из усилий, воспринимаемых бетоном, и усилий, воспринимаемых арматурой, а на сдвиг работает только бетон.

С учетом этого имеем:

$$M_x = M_x^b + M_x^a; \quad M_y = M_y^b + M_y^a; \quad H = H^b;$$
$$N_x = N_x^b + N_x^a; \quad N_y = N_y^b + N_y^a; \quad S = S^b. \qquad (14)$$

Выражения для частей моментов и усилий, воспринимаемых бетоном:

$$M_x^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{xj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xi}^b z dz,\ M_y^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{yj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yi}^b z dz,$$

$$H^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \tau_{xyj}^b z dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \tau_{xyi}^b z dz,\ N_x^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{xj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xi}^b dz, \quad (15)$$

$$N_y^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \sigma_{yj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yi}^b dz,\ S^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \tau_{xyj}^b dz + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \tau_{xyi}^b dz\ .$$

Здесь z_0– уравнение нейтральной поверхности, определяемой из условия $\sigma_0=0$ и отделяющей растянутую зону пластинки от сжатой; i, j– индексы, характеризующие сжатую и растянутую зону пластинки. Если нижняя зона изгибаемой пластинки растянута, то $j=1$, $i=2$; если нижняя зона изгибаемой пластинки сжата, а верхняя растянута, то $j=2$, $i=1$.

Выражения для z_0 получаются из условия:

$$\sigma_0^b = \frac{\left(\sigma_x^b + \sigma_y^b\right)}{3} = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}\left[\left(1+\nu_j\right)\left(e_x+e_y\right)\right] = 0\ . \quad (16)$$

$$z_0(x,y) = -\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\chi_x+\chi_y}\ . \quad (17)$$

Для получения выражений для моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, заменим арматурные стержни в направлении координаты x сплошным эквивалентным слоем металла переменной толщины. Переменность толщины эквивалентного слоя в направлении координаты x определяется законами изменения площади поперечного сечения арматурных стержней в направлении координаты x. Переменность толщины эквивалентного слоя в направлении координаты y определяется аппроксимацией площадей арматурных стержней в направлении y некоторой функцией, задающей закон изменения толщины эквивалентного слоя в направлении y.

Обозначим η_x, η_y– толщины эквивалентных армирующих слоев в верхней части пластинки, эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно x, y; λ_x, λ_y– толщины эквивалентных армирующих слоев в нижней части пластинки, эквивалентных арматуре в направлениях, соответственно x, y; z_{η_x}, z_{η_y} – ординаты центров тяжести эквивалентных армирующих слоев в верхней части пластинки; $z_{\lambda_x}, z_{\lambda_y}$ – ординаты центров тяжести эквивалентных армирующих слоев в нижней части пластинки.

Далее будем полагать, что под влиянием коррозионного износа будет изменяться сечение арматурных стержней, приводя к изменению толщин η_x, η_y, λ_x, λ_y эквивалентных армирующих слоев, не изменяя величины координат центров тяжести $z_{\eta_x}, z_{\eta_y}, z_{\lambda_x}, z_{\lambda_y}$. Таким образом, будем полагать, что под влиянием коррозионного износа толщина эквивалентных армирующих слоев изменяется, а их положение по толщине пластинки остается неизменным.

С учетом введенных гипотез выражения для части моментов и усилий, воспринимаемых арматурой, примут вид [1]:

$$\begin{aligned} M_x^a &= \sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)\lambda_x z_{\lambda_x} + \sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)\eta_x z_{\eta_x}, \\ M_y^a &= \sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)\lambda_y z_{\lambda_y} + \sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)\eta_y z_{\eta_y}, \\ N_x^a &= \sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)\lambda_x + \sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)\eta_x, \\ N_y^a &= \sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)\lambda_y + \sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)\eta_y. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\sigma_x^a\left(z_{\lambda_x}\right)$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси *x* и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_x} от срединной поверхности; $\sigma_x^a\left(z_{\eta_x}\right)$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси *x* и расположенном в верхней части пластины на расстоянии z_{η_x} от срединной поверхности; $\sigma_y^a\left(z_{\lambda_y}\right)$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси *y* и расположенном в нижней части пластины на расстоянии z_{λ_y} от срединной поверхности; $\sigma_y^a\left(z_{\eta_y}\right)$ – напряжение в эквивалентном армирующем слое, работающем в направлении оси *y* и расположенном в верхней части пластины на расстоянии z_{η_y} от срединной поверхности. С учетом условия отсутствия продольных усилий в сечении пластины, получим следующие окончательные выражения для M_x, M_y и H:

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11}\chi_x + D_{12}\chi_y, \\ M_y &= D_{21}\chi_x + D_{22}\chi_y, \\ H &= D_3\chi_{xy}, \end{aligned} \tag{19}$$

где:

$$D_{11} = \left[f_{11}\left(J_1^b + J_{x1}^a\right) + \left(J_2^b + J_{x2}^a\right) + f_{21}I_1^b \right], \quad D_{12} = \left[f_{12}\left(J_1^b + J_{x1}^a\right) + f_{22}I_1^b + I_2^b \right],$$

$$D_{21} = \left[f_{21}\left(J_1^b + J_{y1}^a\right) + f_{11}I_1^b + I_2^b \right], \quad D_{22} = \left[f_{22}\left(J_1^b + J_{y1}^a\right) + \left(J_2^b + J_{y2}^a\right) + f_{12}I_1^b \right],$$

$$D_3 = \left[2T_2^b - 2\frac{\left(T_1^b\right)^2}{T_0^b} \right], \tag{20}$$

в этих выражениях:

$$f_{11} = \frac{I_0^b I_1^b - \left(J_0^b + J_{y0}^a\right)\left(J_1^b + J_{x1}^a\right)}{\left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_0^b + J_{y0}^a\right) - \left(I_0^b\right)^2}, \quad f_{12} = \frac{I_0^b\left(J_1^b + J_{y1}^a\right) - \left(J_0^b + J_{y0}^a\right)I_1^b}{\left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_0^b + J_{y0}^a\right) - \left(I_0^b\right)^2},$$

$$f_{22} = \frac{I_0^b I_1^b - \left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_1^b + J_{y1}^a\right)}{\left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_0^b + J_{y0}^a\right) - \left(I_0^b\right)^2}, \quad f_{21} = \frac{I_0^b\left(J_1^b + J_{x1}^a\right) - \left(J_0^b + J_{x0}^a\right)I_1^b}{\left(J_0^b + J_{x0}^a\right)\left(J_0^b + J_{y0}^a\right) - \left(I_0^b\right)^2}. \tag{21}$$

Жесткости, входящие в эти выражения, определяются формулами:
для бетона:

$$J_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i z^k \partial z, \ \kappa = 0,1,2. \quad I_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \alpha_j \nu_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \alpha_i \nu_i z^k \partial z, \ \kappa = 0,1,2.$$

$$T_k^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} \beta_j z^k \partial z + \int_{z_0}^{\frac{h}{2}} \beta_i z^k \partial z, \ \kappa = 0,1,2; \tag{22}$$

для арматуры:

$$J_{xk}^a = E_a\left(\lambda_x z_{\lambda_x}^k + \eta_x z_{\eta_x}^k\right), \quad J_{yk}^a = E_a\left(\lambda_y z_{\lambda_y}^k + \eta_y z_{\eta_y}^k\right) \ \kappa = 0,1,2. \tag{23}$$

В формулах:

$$z_0 = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\chi_x + \chi_y} = -\frac{\chi_x\left(f_{11} + f_{21}\right) + \chi_y\left(f_{12} + f_{22}\right)}{\chi_x + \chi_y} \tag{3.24}$$

$$\alpha_j = \frac{\Psi_j}{1-\nu_j^2}, \quad \alpha_i = \frac{\Psi_i}{1-\nu_i^2}, \quad \beta_j = \frac{\Psi_j}{2\left(1+\nu_j\right)}, \quad \beta_i = \frac{\Psi_i}{2\left(1+\nu_i\right)} \tag{25}$$

Следует учитывать, что при выводе вышеприведенных выражений предполагается, что арматура и бетон работают совместно, невзирая на коррозионный износ арматуры.

Разрешающее уравнение изгибаемой армированной пластины. Подставляя (19) в (1) и учитывая (3), получим следующее разрешающее дифференциальное уравнение изгиба армированной пластины в условиях хлоридной коррозии:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[D_3\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_{21}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]+\right.\\&\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]\right)-2m\nabla^2 W+nW=p\left(x,y\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Для определения характеристик напряженно-деформированного состояния армированной пластины в каждый момент времени необходимо из решения уравнения диффузии (8) с соответствующими начальными и граничными условиями найти закон распределения концентрации C хлоридсодержащей среды по объему пластины в рассматриваемый момент времени, по уравнениям (13) определить уровень накопления повреждений в точках объема пластины к рассматриваемому моменту времени, по уравнениям (11), (12) определить степень коррозионного поражения арматуры пластины к этому моменту времени, и решить уравнение (25) с соответствующими граничными условиями, позволяющими получить для каждого конкретного случая однозначное решение. Имея решение этого уравнения, можно определить напряжения и деформации в любой точке армированной пластины в рассматриваемый момент времени. Полученное дифференциальное уравнение изгиба армированной пластины в сочетании с уравнениями проникания хлоридсодержащей среды, уравнениями накопления повреждений в бетоне и уравнениями коррозионного износа арматуры позволяет рассчитывать долговечность пластины при разном характере нагружения, при разных схемах опирания пластины по контуру (шарнирное, жесткое, их сочетания), разных программах воздействия агрессивной хлоридсодержащей среды (среда сверху, снизу, среда с обеих сторон и среда действует на часть поверхности) и определять время до разрушения пластины.

Литература:

1. Овчинников И.И., Наумова Г.А. Накопление повреждений в стержневых и пластинчатых армированных конструкциях, взаимодействующих с агрессивными средами. Волгогр. гос. архит. – строит.ун-т. Волгоград. Изд – во ВолгГАСУ. 2007. 272 с.